THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
510.5
AC
v.44-45

READING ROOM
MATHEMATICS LIBRARY

Return this book on or before the **Latest Date** stamped below. A charge is made on all overdue books.
University of Illinois Library

Oct. 1, '45
25 July 52
Sept 30 1954
11-26-58
Dec 5, 1958
Aug. 22
FEB 20 1963
MAR 20 1963
JUN 5 1963
JUN 11 1963
JUN 17 1963
JUL 15 1963
SEP 20 1973
SEP 20 REC'D
NOV 27 1973
NOV 26 REC'D
APR 6 1976
MAR 25 REC'D
FEB 22 1978
FEB 17 REC'D
JUN 3 1981
JUN 24 REC'D
DEC 15 1981
JAN 26 REC'D
JUN 15 REC'D
OCT 26 REC'D
NOV 09 1991
NOV 21 REC'D

M32

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

44

DJURSHOLM
ACTA MATHEMATICA

UNIVERSITY OF ILLINOIS URBANA

UPPSALA 1923
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

REDACTION

SVERIGE:

I. FREDHOLM, Stockholm.
H. VON KOCH, »
A. LINDSTEDT, »
J. MALMQUIST, »
G. MITTAG-LEFFLER »
E. PHRAGMÉN, »
A. WIMAN, Uppsala.

NORGE:

C. STÖRMER, Christiania.

DANMARK:

HARALD BOHR, Kjöbenhavn.
J. HJELMSLEV, »
J. L. W. V. JENSEN, »
N. E. NÖRLUND, »

FINLAND:

ERNST LINDELÖF, Helsingfors.
HJ. MELLIN, »
KARL F. SUNDMAN, »

612798

INHALTSVERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 44. — 1923. — TOME 44.

SOME PROBLEMS OF 'PARTITIO NUMERORUM'; III: ON THE EXPRESSION OF A NUMBER AS A SUM OF PRIMES.

By

G. H. Hardy and J. E. Littlewood.

New College, Oxford. Trinity College, Cambridge.

1. Introduction.

1. 1. It was asserted by Goldbach, in a letter to Euler dated 7 June, 1742, that *every even number $2m$ is the sum of two odd primes*, and this proposition has generally been described as 'Goldbach's Theorem'. There is no reasonable doubt that the theorem is correct, and that the number of representations is large when m is large; but all attempts to obtain a proof have been completely unsuccessful. Indeed it has never been shown that every number (or every *large* number, any number, that is to say, from a certain point onwards) is the sum of 10 primes, or of 1 000 000; and the problem was quite recently classified as among those 'beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaft unangreifbar'.[1]

What about 4 ?

In this memoir we attack the problem with the aid of our new transcendental method in 'additiver Zahlentheorie'.[2] We do not solve it: we do not

[1] E. Landau, 'Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion', *Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge, 1912, vol. 1, pp. 93—108 (p. 105). This address was reprinted in the *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, vol. 21 (1912), pp. 208—228.

[2] We give here a complete list of memoirs concerned with the various applications of this method.

G. H. Hardy.

1. 'Asymptotic formulae in combinatory analysis', *Comptes rendus du quatrième Congrès des mathematiciens Scandinaves à Stockholm*, 1916, pp. 45—53.

2. 'On the expression of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five or seven', *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 4 (1918), pp. 189—193.

even prove that any number is the sum of 1 000 000 primes. In order to prove anything, we have to assume the truth of an unproved hypothesis, and, even on this hypothesis, we are unable to prove Goldbach's Theorem itself. We show, however, that the problem is not 'unangreifbar', and bring it into contact with the recognized methods of the Analytic Theory of Numbers.

3. 'Some famous problems of the Theory of Numbers, and in particular Waring's Problem' (Oxford, Clarendon Press, 1920, pp. 1—34).

4. 'On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five', *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 21 (1920), pp. 255—284.

5. 'Note on Ramanujan's trigonometrical sum $c_q(n)$', *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 20 (1921), pp. 263—271.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood.

1. 'A new solution of Waring's Problem', *Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, vol. 48 (1919), pp. 272—293.

2. 'Note on Messrs. Shah and Wilson's paper entitled: On an empirical formula connected with Goldbach's Theorem', *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 19 (1919), pp. 245—254.

3. 'Some problems of 'Partitio numerorum'; I: A new solution of Waring's Problem', *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1920), pp. 33—54.

4. 'Some problems of 'Partitio numerorum'; II: Proof that any large number is the sum of at most 21 biquadrates', *Mathematische Zeitschrift*, vol. 9 (1921), pp. 14—27.

G. H. Hardy and S. Ramanujan.

1. 'Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n', *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 2 Jan. 1917.

2. 'Asymptotic formulae in combinatory analysis', *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, vol. 17 (1918), pp. 75—115.

3. 'On the coefficients in the expansions of certain modular functions', *Proceedings of the Royal Society of London* (A), vol. 95 (1918), pp. 144—155.

E. Landau.

1. 'Zur Hardy-Littlewood'schen Lösung des Waringschen Problems', *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1921), pp. 88—92.

L. J. Mordell.

1. 'On the representations of numbers as the sum of an odd number of squares', *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 22 (1919), pp. 361—372.

A. Ostrowski.

1. 'Bemerkungen zur Hardy-Littlewood'schen Lösung des Waringschen Problems', *Mathematische Zeitschrift*, vol. 9 (1921), pp. 28—34.

S. Ramanujan.

1. 'On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers', *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 22 (1918), pp. 259—276.

N. M. Shah and B. M. Wilson.

1. 'On an empirical formula connected with Goldbach's Theorem', *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 19 (1919), pp. 238—244.

Our main result may be stated as follows: *if a certain hypothesis* (a natural generalisation of Riemann's hypothesis concerning the zeros of his Zeta-function) *is true, then every large odd number n is the sum of three odd primes; and the number of representations is given asymptotically by*

$$\bar{N}_3(n) \sim C_3 \frac{n^2}{(\log n)^3} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{(\mathfrak{p}-1)(\mathfrak{p}-2)}{\mathfrak{p}^2-3\mathfrak{p}+3}\right), \tag{1. 11}$$

where $\mathfrak{p}$ runs through all odd prime divisors of n, and

$$C_3 = \Pi\left(1+\frac{1}{(\varpi-1)^3}\right), \tag{1. 12}$$

the product extending over all odd primes ϖ.

Hypothesis R.

1. 2. We proceed to explain more closely the nature of our hypothesis. Suppose that q is a positive integer, and that

$$h = \varphi(q)$$

is the number of numbers less than q and prime to q. We denote by

$$\chi(n) = \chi_k(n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

one of the h Dirichlet's 'characters' to modulus q[1]: χ_1 is the 'principal' character.

By $\bar{\chi}$ we denote the complex number conjugate to χ: $\bar{\chi}$ is a character.

By $L(s, \chi)$ we denote the function defined for $\sigma > 1$ by

$$L(s) = L(\sigma+it) = L(s,\chi) = L(s,\chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Unless the contrary is stated the modulus is q. We write

$$\bar{L}(s) = L(s, \bar{\chi}).$$

By

$$\varrho = \beta + i\gamma$$

[1] Our notation, so far as the theory of L-functions is concerned, is that of Landau's *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, vol. 1, book 2, pp. 391 *et seq.*, except that we use q for his k, k for his $\varkappa$, and ϖ for a typical prime instead of p. As regards the 'Farey dissection', we adhere to the notation of our papers *3* and *4*.

We do not profess to give a complete summary of the relevant parts of the theory of the L-functions; but our references to Landau should be sufficient to enable a reader to find for himself everything that is wanted.

we denote a typical zero of $L(s)$, those for which $\gamma = 0$, $\beta \leqq 0$ being excluded. We call these the *non-trivial* zeros. We write $N(T)$ for the number of ϱ's of $L(s)$ for which $0 \leqq \gamma \leqq T$.

The natural extension of Riemann's hypothesis is

HYPOTHESIS R. Every ϱ has its real part less than or equal to $\frac{1}{2}$.*[1]

We shall not have to use the full force of this hypothesis. What we shall in fact assume is

HYPOTHESIS R. There is a number $\Theta < \frac{3}{4}$ such that

$$\beta \leqq \Theta$$

for every ϱ of every $L(s)$.

The assumption of this hypothesis is fundamental in all our work; *all the results of the memoir, so far as they are novel, depend upon it*[2]; and we shall not repeat it in stating the conditions of our theorems.

We suppose that Θ has its smallest possible value. In any case $\Theta \geqq \frac{1}{2}$. For, if ϱ is a complex zero of $L(s)$, $\bar{\varrho}$ is one of $\bar{L}(s)$. Hence $1 - \bar{\varrho}$ is one of $\bar{L}(1-s)$, and so, by the functional equation[3], one of $L(s)$.

Further notation and terminology.

1.3. We use the following notation throughout the memoir.

A is a positive absolute constant wherever it occurs, but not the same constant at different occurrences. B is a positive constant depending on the single parameter r. O's refer to the limit process $n \to \infty$, the constants which they involve being of the type B, and o's are uniform in all parameters *except* r.

ϖ is a prime. $\mathfrak{p}$ (which will only occur in connection with n) is an odd prime divisor of n. p is an integer. If $q = 1$, $p = 0$; otherwise

$$0 < p < q, \quad (p, q) = 1.$$

(m, n) is the greatest common factor of m and n. By $m \mid n$ we mean that n is divisible by m; by $m \nmid n$ the contrary.

$\Lambda(n)$, $\mu(n)$ have the meanings customary in the Theory of Numbers. Thus $\Lambda(n)$ is $\log \varpi$ if $n = \varpi^m$ and zero otherwise: $\mu(n)$ is $(-1)^k$ if n is a product of

[1] The hypothesis must be stated in this way because

(a) it has not been proved that no $L(s)$ has real zeros between $\frac{1}{2}$ and 1,

(b) the L-functions as ociated with *imprimitive* (uneigentlich) characters have zeros on the line $\sigma = 0$.

[2] Naturally many of the results stated incidentally do not depend upon the hypothesis.

[3] Landau, p. 489. All references to 'Landau' are to his *Handbuch*, unless the contrary is stated.

k different prime factors, and zero otherwise. The fundamental function with which we are concerned is

(1.31) $$f(x) = \sum_{\varpi} \log \varpi \; x^{\varpi}.$$

To simplify our formulae we write

$$e(x) = e^{2\pi i x}, \quad e_q(x) = e\left(\frac{x}{q}\right).$$

Also

(1.32) $$c_q(n) = \sum_{p} e_q(n p).$$

If χ_k is primitive,

(1.33) $$\tau_k = \tau(\chi_k) = \sum_{p} e_q(p)\, \chi_k(p) = \sum_{m=1}^{q} e_q(m)\, \chi_k(m).$$ [1]

This sum has the absolute value[2] $\sqrt{q}$.

The Farey dissection.

1.4. We denote by Γ the circle

(1.41) $$|x| = e^{-H} = e^{-\frac{1}{n}}.$$

We divide Γ into arcs $\xi_{p,q}$ which we call *Farey arcs,* in the following manner. We form the Farey's series of order

(1.42) $$N = [\sqrt{n}],$$

the first and last terms being $\frac{0}{1}$ and $\frac{1}{1}$. We suppose that $\frac{p}{q}$ is a term of the series, and $\frac{p'}{q'}$ and $\frac{p''}{q''}$ the adjacent terms to the left and right, and denote by $j_{p,q}$ $(q > 1)$ the intervals

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q(q+q')}, \quad \frac{p}{q} + \frac{1}{q(q+q'')};$$

by $j_{0,1}$ and $j_{1,1}$ the intervals $\left(0, \frac{1}{N+1}\right)$ and $\left(1 - \frac{1}{N+1}, 1\right)$. These intervals just

[1] $\chi_k(m) = 0$ if $(m, q) > 1$.
[2] Landau, p. 497.

fill up the interval $(0, 1)$, and the length of each of the parts into which $j_{p,q}$ is divided by $\frac{p}{q}$ is less than $\frac{1}{qN}$ and not less than $\frac{1}{2qN}$. If now the intervals $j_{p,q}$ are considered as intervals of variation of $\frac{\theta}{2\pi}$, where $\theta = \arg x$, and the two extreme intervals joined into one, we obtain the desired dissection of Γ into arcs $\xi_{p,q}$.[1]

When we are studying the arc $\xi_{p,q}$, we write

$$x = e^{\frac{2p\pi i}{q}} X = e_q(p) X = e_q(p) e^{-Y}, \tag{1. 43}$$

$$Y = \eta + i\theta. \tag{1. 44}$$

The whole of our work turns on the behaviour of $f(x)$ as $|x| \to 1$, $\eta \to 0$, and we shall suppose throughout that $0 < \eta \leqq \frac{1}{2}$. When x varies on $\xi_{p,q}$, X varies on a congruent arc $\zeta_{p,q}$, and

$$\theta = -\left(\arg x - \frac{2p\pi}{q}\right)$$

varies (in the inverse direction) over an interval $-\theta'_{p,q} \leqq \theta \leqq \theta_{p,q}$. Plainly $\theta_{p,q}$ and $\theta'_{p,q}$ are less than $\frac{2\pi}{qN}$ and not less than $\frac{\pi}{qN}$, so that

$$\vartheta_{p,q} = \operatorname{Max}(\theta_{p,q}, \theta'_{p,q}) < \frac{A}{qN}.$$

In all cases $Y^{-s} = (\eta + i\theta)^{-s}$ has its principal value

$$\exp(-s \log(\eta + i\theta)),$$

wherein (since η is positive)

$$-\frac{1}{2}\pi < \Im \log(\eta + i\theta) < \frac{1}{2}\pi.$$

By $N_r(n)$ we denote the number of representations of n by a sum of r primes, attention being paid to order, and repetitions of the same prime being allowed, so that

$$\sum_{n=2}^{\infty} N_r(n) x^n = \left(\sum_{\varpi} x^{\varpi}\right)^r. \tag{1. 45}$$

[1] The distinction between major and minor arcs, fundamental in our work on Waring's Problem, does not arise here.

By $\nu_r(n)$ we denote the sum

(1. 46) $$\nu_r(n) = \sum_{\varpi_1 + \varpi_2 + \cdots + \varpi_r = n} \log \varpi_1 \log \varpi_2 \ldots \log \varpi_r,$$

so that

(1. 47) $$\sum_{n=2}^{\infty} \nu_r(n)\, x^n = (f(x))^r.$$

Finally S_r is the *singular series*

(1. 48) $$S_r = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n).$$

2. Preliminary lemmas.

2. 1. *Lemma 1. If* $\eta = \Re(Y) > 0$ *then*

(2. 11) $$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

where

(2. 12) $$f_1(x) = \sum_{(q,n)>1} \Lambda(n) x^n - \sum_{\varpi} \log \varpi (x^{\varpi^2} + x^{\varpi^3} + \cdots),$$

(2. 13) $$f_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^{-s}\, \Gamma(s)\, Z(s)\, ds,$$

Y^{-s} *has its principal value,*

(2. 14) $$Z(s) = \sum_{k=1}^{h} C_k \frac{L'_k(s)}{L_k(s)},$$

C_k *depends only on* p, q *and* χ_k,

(2. 15) $$C_1 = -\frac{\mu(q)}{h}$$

and

(2. 16) $$|C_k| \leq \frac{\sqrt{q}}{h}.$$

We have

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x) = \sum_{(q,n)=1} \Lambda(n)\, x^n$$

$$= \sum_{1 \leq j \leq q,\, (q,j)=1} e_q(pj) \sum_{l=0}^{\infty} \Lambda(lq+j)\, e^{-(lq+j)Y}$$

$$= \sum_j e_q(pj) \sum_l \Lambda(lq+j) \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^{-s}\Gamma(s)(lq+j)^{-s}\, ds,$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^{-s}\Gamma(s)Z(s)\, ds,$$

where

$$Z(s) = \sum_j e_q(pj) \sum_l \frac{\Lambda(lq+j)}{(lq+j)^s}.$$

Since $(q, j) = 1$, we have[1]

$$\sum_l \frac{\Lambda(lq+j)}{(lq+j)^s} = -\frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} \bar{\chi}_k(j) \frac{L'_k(s)}{L_k(s)};$$

and so

$$Z(s) = \sum_{k=1}^{h} C_k \frac{L'_k(s)}{L_k(s)},$$

where

$$C_k = -\frac{1}{h} \sum_{j=1}^{q} e_q(pj)\, \bar{\chi}_k(j).$$

Since $\bar{\chi}_k(j) = 0$ if $(q, j) > 1$, the condition $(q, j) = 1$ may be omitted or retained at our discretion.

Thus[2]

$$C_1 = -\frac{1}{h} \sum_{1 \leq j \leq q,\, (q,j)=1} e_q(pj)$$

$$= -\frac{1}{h} \sum_{1 \leq m \leq q,\, (q,m)=1} e_q(m) = -\frac{\mu(q)}{h}.$$

---

[1] Landau, p. 421.

[2] Landau, pp. 572—573.

Again, if $k > 1$ we have[1]

$$C_k = -\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{q}{}' e_q(pj)\,\bar{\chi}_k(j) = -\frac{\chi_k(p)}{h}\sum_{m=1}^{q}{}' e_q(m)\,\bar{\chi}_k(m).$$

If $\bar{\chi}_k$ is a primitive character,

$$\sum_{m=1}^{q}{}' e_q(m)\,\bar{\chi}_k(m) = \tau(q, \bar{\chi}_k),$$

$$|\tau(q, \bar{\chi}_k)| = \sqrt{q}\,,[2]$$

$$|C_k| = \frac{\sqrt{q}}{h}.$$

If $\bar{\chi}$ is imprimitive, it belongs to $Q = \frac{q}{d}$, where $d > 1$. Then $\bar{\chi}_k(m)$ has the period Q, and

$$\sum_{m=1}^{q}{}' e_q(m)\,\bar{\chi}_k(m) = \sum_{n=1}^{Q}{}' e_q(n)\,\bar{\chi}_k(n)\sum_{l=0}^{d-1} e_q(lQ).$$

The inner sum is zero. Hence $C_k = 0$, [see (4) on p. 69] and the proof of the lemma is completed.[3]

2. 2. *Lemma 2. We have*

(2. 21) $$|f_1(x)| < A(\log(q+1))^A\,\eta^{-\frac{1}{2}}.$$

We have

$$f_1(x) = \sum_{(q,n)>1} \Lambda(n)\,x^n - \sum_{\varpi}\log\varpi\,(x^{\varpi^2} + x^{\varpi^3} + \cdots) = f_{1,1}(x) - f_{1,2}(x).$$

But

$$|f_{1,1}(x)| \leq \sum_{\varpi\mid q}\log\varpi\sum_{r=1}^{\infty}|x|^{\varpi^r}$$

$$< A\log(q+1)\log q\sum_{r=1}^{\infty}|x|^{2^r} < A(\log(q+1))^2\sum_{r=1}^{\infty}e^{-\eta 2^r}$$

$$< A(\log(q+1))^A\log\frac{1}{\eta} < A(\log(q+1))^A\,\eta^{-\frac{1}{2}}.$$

---

[1] Landau, p. 485. The result is stated there only for a primitive character, but the proof is valid also for an imprimitive character when $(p, q) = 1$.

[2] Landau, pp. 485, 489, 492.

[3] See the additional note at the end.

Also

$$\sum_{r \geq 2,\, \varpi^r \leq \xi} \log \varpi < A \sqrt{\xi},$$

and so

$$|f_{1,2}(x)| \leq \sum_{r \geq 2,\, \varpi} \log \varpi \, |x|^{\varpi^r} < A(1-|x|) \sum_n \sqrt{n}\, |x|^n$$

$$< A(1-|x|)^{-\frac{1}{2}} < A \eta^{-\frac{1}{2}}.$$

From these two results the lemma follows.

2. 3. *Lemma 3. We have*

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = -\frac{\mathfrak{b}}{s-1} + \frac{\mathfrak{d}-\mathfrak{b}}{s} + b - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right) + \sum_\varrho \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right), \tag{2. 31}$$

where

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

the $\mathfrak{a}$'s, $\mathfrak{b}$'s, $\mathfrak{d}$'s *and* b's *are constants depending upon* q *and* χ, $\mathfrak{a}$ *is* 0 *or* 1,

$$\mathfrak{b}_1 = 1, \qquad \mathfrak{b}_k = 0 \qquad (k > 1), \tag{2. 32}$$

and

$$0 \leq \mathfrak{d} < A \log (q+1). \tag{2. 33}$$

All these results are classical except the last.[1]

The precise definition of $\mathfrak{d}$ is rather complicated and does not concern us. We need only observe that $\mathfrak{d}$ does not exceed the number of different primes that divide q,[2] and so satisfies (2. 33).

2. 41. *Lemma 4. If* $0 < \eta \leq \frac{1}{2}$, *then*

$$f(x) = \frac{\mu(q)}{hY} + \sum_{k=1}^{h} C_k G_k + P, \tag{2. 411}$$

where

$$G_k = \sum_{\varrho_k} \Gamma(\varrho)\, Y^{-\varrho}, \tag{2. 412}$$

[1] Landau, pp. 509, 510, 519.

[2] Landau, p. 511 (footnote).

$$(2.\ 413)\qquad |P| < A\sqrt{q}\,(\log(q+1))^A\left(\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h}|b_k| + \eta^{-\frac{1}{2}} + |Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$(2.\ 414)\qquad \delta = \arc\tan\frac{\eta}{|\theta|}.$$

We have, from (2. 13) and (2. 14),

$$(2.\ 415)\qquad f_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^{-s}\Gamma(s)\,Z(s)\,ds$$

$$= \sum_{k=1}^{h}\frac{C_k}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'_k(s)}{L_k(s)}\,ds = \sum_{k=1}^{h} C_k f_{2,k}(x),$$

say. But [1]

$$(2.416)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds = -\frac{\mathfrak{b}}{Y} + R + \sum_{\varrho}\Gamma(\varrho)\,Y^{-\varrho} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty} Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds,$$

where

$$R = \left\{Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}\right\}_0,$$

$\{f(s)\}_0$ denoting generally the residue of $f(s)$ for $s=0$.

Now [2]

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = \log\frac{\pi}{Q} + \sum_{\nu=1}^{\mathfrak{c}}\frac{\varepsilon_\nu\log\varpi_\nu}{\varpi_\nu^s - \varepsilon_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\mathfrak{c}}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\log\varpi_\nu}{\varpi_\nu^{1-s} - \bar{\varepsilon}_\nu}$$

$$-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\right) - \frac{\bar{L}'(1-s)}{\bar{L}(1-s)},$$

where Q is the divisor of q to which χ belongs, $\mathfrak{c}$ is the number of primes which divide q but not Q, $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ are the primes in question, and ε_ν is a root of unity. Hence, if $\sigma = -\frac{1}{4}$, we have

---

[1] This application of Cauchy's Theorem may be justified on the lines of the classical proof of the 'explicit' formulae' for $\psi(x)$ and $\pi(x)$: see Landau, pp. 333—368. In this case the proof is much easier, since $Y^{-s}\Gamma(s)$ tends to zero, when $|t|\to\infty$, like an exponential $e^{-a|t|}$. Compare pp. 134—135 of our memoir 'Contributions to the theory of the Riemann Zeta-function and the theory of the distribution of primes', *Acta Mathematica*, vol. 41 (1917), pp. 119—196.

[2] Landau, p. 517.

(2. 417) $$\left|\frac{L'(s)}{L(s)}\right| < A \log q + A\mathfrak{c} \log q + A \log(|t|+2) + A$$

$$< A (\log (q+1))^A \log(|t|+2).$$

Again, if $s = -\frac{1}{4} + it,\ Y = \eta + i\theta,$ we have

$$|Y^{-s}| = |Y|^{\frac{1}{4}} \exp\left(t \operatorname{arc\,tan} \frac{\theta}{\eta}\right),$$

$$|Y^{-s}\Gamma(s)| < A|Y|^{\frac{1}{4}}(|t|+2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tan}\frac{|\theta|}{\eta}\right)|t|\right),$$

$$< A|Y|^{\frac{1}{4}} \frac{|t|^{-\frac{1}{2}}}{\log(|t|+2)} e^{-\delta|t|};$$

and so

(2. 418) $$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty} Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds\right| < A(\log(q+1))^A |Y|^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-\delta t}\,dt$$

$$< A(\log(q+1))^A |Y|^{\frac{1}{4}} \delta^{-\frac{1}{2}}.$$

2. 42. We now consider R. Since

$$\sum\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right) = 0 \qquad (s=0),$$

we have

$$R = \{(\mathfrak{b}+b)\Gamma(s)\}_0 + \left\{\frac{\mathfrak{d}-\mathfrak{b}}{s} Y^{-s}\Gamma(s)\right\}_0 - \frac{1}{2}\left\{Y^{-s}\Gamma(s)\psi\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)\right\}_0$$

$$= A_1(\mathfrak{b}+b) - (\mathfrak{d}-\mathfrak{b})(A_2 + A_3 \log Y) + C_1(\mathfrak{a}) + C_2(\mathfrak{a}) \log Y,$$

where each of the C's has one of two absolute constant values, according to the value of $\mathfrak{a}$. Since

$$0 \leqq \mathfrak{b} \leqq 1,\ 0 \leqq \mathfrak{d} < A \log(q+1),\ |\log Y| < A \log\frac{1}{\eta} < A\eta^{-\frac{1}{2}},$$

we have

(2. 421) $$|R| < A|b| + A\log(q+1)\eta^{-\frac{1}{2}}.$$

From (2. 415), (2. 416), (2. 418), (2. 421) and (2. 15) we deduce

$$f_{2,k}(x) = -\frac{\mathfrak{b}}{Y} + G_k + P_k,$$

$$|P_k| < A\,(\log(q+1))^A \left(|b| + \eta^{-\frac{1}{2}} + |Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$f_2(x) = -\frac{\mu(q)}{hY} + \sum_k C_k G_k + P, \tag{2. 422}$$

$$|P| < A\sqrt{q}\,(\log(q+1))^A \left(\frac{1}{h}\sum_k |b_k| + \eta^{-\frac{1}{2}} + |Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{2. 423}$$

Combining (2. 422) and (2. 423) with (2. 11) and (2. 21), we obtain the result of Lemma 4.

2. 5. *Lemma 5. If $q > 1$ and χ_k is a primitive (and therefore non-principal*[1]*) character, then*

$$L(s) = \frac{a e^{bs}}{\Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)} \prod_{\varrho} \left(\left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}}\right), \tag{2. 51}$$

where

$$a = a(q, \chi) = a_k,$$

$$|L(1)| = \pi q^{-\frac{1}{2}} |L(0)| \qquad (\mathfrak{a} = 1), \tag{2. 521}$$

$$|L(1)| = 2 q^{-\frac{1}{2}} |L'(0)| \qquad (\mathfrak{a} = 0). \tag{2. 522}$$

Further

$$1 - \Theta \leq \Re(\varrho) \leq \Theta, \tag{2. 53}$$

and

$$\left|\frac{L'(1)}{L(1)}\right| < A\,(\log(q+1))^A. \tag{2. 54}$$

This lemma is merely a collection of results which will be used in the proof of Lemmas 6 and 7. They are of very unequal depth. The formula (2. 51) is classical.[2] The two next are immediate deductions from the functional equation for $L(s)$.[3] The inequalities (2. 53) follow from the functional equation and the

[1] Landau, p. 480.
[2] Landau, p. 507.
[3] Landau, pp. 496, 497.

absence (for primitive χ) of factors $1-\varepsilon_\nu \varpi_\nu^{-s}$ from L. Finally (2. 54) is due to GRONWALL.[1]

2. 61. *Lemma 6. If $M(T)$ is the number of zeros ϱ of $L(s)$ for which*

$$0 \leq T \leq |\gamma| \leq T+1,$$

then

$$M(T) < A(\log(q+1))^A \log(T+2). \tag{2. 611}$$

The ϱ's of an imprimitive $L(s)$ are those of a certain primitive $L(s)$ corresponding to modulus Q, where $Q \mid q$, together with the zeros (other than $s=0$) of certain functions

$$E_\nu = 1-\varepsilon_\nu \varpi_\nu^{-s},$$

where

$$|\varepsilon_\nu| = 1, \quad \varpi_\nu \mid q.$$

---

[1] T. H. GRONWALL, 'Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes', *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 35 (1913), pp. 145—159. Gronwall proves that

$$\frac{1}{|L(1)|} < A \log q (\log\log q)^{\frac{3}{8}}$$

for every *complex* χ, and states that the same is true for *real* χ if hypothesis R (or a much less stringent hypothesis) is satisfied. LANDAU ('Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper', *Göttinger Nachrichten*, 1918, pp. 285—295 (p. 286, f. n. 2)) has, however, observed that, in the case of a real χ, Gronwall's argument leads only to the slightly less precise inequality

$$\frac{1}{|L(1)|} < A \log q \sqrt{\log\log q}.$$

Landau also gives a proof (due to HECKE) that

$$\frac{1}{|L(1)|} < A \log q$$

for the special character $\left(\frac{-q}{n}\right)$ associated with the fundamental discriminant $-q$.

The first results in this direction are due to Landau himself ('Über das Nichtverschwinden der Dirichletschen Reihen, welche komplexen Charakteren entsprechen', *Math. Annalen*, vol. 70 (1911), pp. 69—78). Landau there proves that

$$\frac{1}{|L(1)|} < A (\log q)^5$$

for complex χ.

It is easily proved (see p. 75 of Landau's last quoted memoir) that

$$|L'(1)| < A(\log q)^2,$$

so that any of these results gives us more than all that we require.

The number of ϖ_ν's is less than $A \log (q+1)$, and each E_ν has a set of zeros, on $\sigma = 0$, at equal distances

$$\frac{2\pi}{\log \varpi_\nu} > \frac{2\pi}{\log (q+1)}.$$

The contribution of these zeros to $M(T)$ is therefore less than $A\,(\log (q+1))^2$; and we need consider only a primitive (and therefore, if $q > 1$, non-principal) $L(s)$.

We observe:

(a) that $\mathfrak{a}$ is the same for $L(s)$ and $\bar{L}(s)$;

(b) that $L(s)$ and $\bar{L}(s)$ are conjugate for real s, so that the b corresponding to $\bar{L}(s)$ is $\bar{b}$, the conjugate of the b of $L(s)$;

(c) that the typical ϱ of $\bar{L}(s)$ may be taken to be either $\bar{\varrho}$ or (in virtue of the functional equation) $1-\varrho$, so that

$$S = \sum \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{1-\varrho}\right) = \sum \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\bar{\varrho}}\right)$$

is real.

Bearing these remarks in mind, suppose first that $\mathfrak{a} = 1$. We have then, from (2. 51) and (2. 521),

$$\frac{\pi^2}{q} = \left|\frac{L(1)\,\bar{L}(1)}{L(0)\,\bar{L}(0)}\right| = A \left| e^{b} \prod \left(\left(1-\frac{1}{\varrho}\right) e^{\frac{1}{\varrho}}\right) e^{\bar{b}} \prod \left(\left(1-\frac{1}{1-\varrho}\right) e^{\frac{1}{1-\varrho}}\right) \right|$$

$$= A\, e^{2\Re(b)+S},$$

since

$$\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)\left(1-\frac{1}{1-\varrho}\right) = 1.$$

Thus

(2. 612) $$|2\Re(b)+S| < A \log (q+1).$$

On the other hand, if $\mathfrak{a} = 0$, we have, from (2. 51) and (2. 522),

$$\frac{4}{q} = \left|\frac{L(1)\,\bar{L}(1)}{L'(0)\,\bar{L}'(0)}\right| = A \left| e^{b} \prod \left(\left(1-\frac{1}{\varrho}\right) e^{-\frac{1}{\varrho}}\right) e^{\bar{b}} \prod \left(\left(1-\frac{1}{1-\varrho}\right) e^{\frac{1}{1-\varrho}}\right) \right|,$$

and (2. 612) follows as before.

2. 62. Again, by (2. 31)

(2. 621) $$\frac{L'(1)}{L(1)} = \mathfrak{b} + b - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1+\mathfrak{a}}{2}\right) + \sum \left(\frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right),$$

for every non-principal character (whether primitive or not). In particular, when χ is primitive, we have, by (2. 621), (2. 54), and (2. 33),

$$(2.\ 622) \qquad |\Re(b)+S| = \left|\Re\frac{L'(1)}{L(1)} - \mathfrak{b} + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1+\mathfrak{a}}{2}\right)\right| < A\,(\log(q+1))^A.$$

Combining (2. 612) and (2. 622) we see that

$$(2.\ 623) \qquad S < A\,(\log(q+1))^A$$

and

$$(2.\ 624) \qquad |\Re(b)| < A\,(\log(q+1))^A.$$

2. 63. If now $q > 1$, and χ is primitive (so that $\mathfrak{b} = 0$), and $s = 2 + iT$, we have, by (2. 31), (2. 33), and (2. 624),

$$0 < \sum\left(\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right) = \Re\sum\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right)$$

$$= \Re\frac{L'(s)}{L(s)} - \Re\left(\frac{\mathfrak{b}}{s}\right) - \Re(b) + \frac{1}{2}\Re\left(\psi\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)\right)$$

$$\leqq \left|\frac{L'(s)}{L(s)}\right| + \left|\frac{\mathfrak{b}}{s}\right| + |\Re(b)| + \left|\psi\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)\right|$$

$$< A + A\log(q+1) + A\,(\log(q+1))^A + A\log(|T|+2)$$

$$< A\,(\log(q+1))^A\log(|T|+2),$$

$$\sum_{|T-\gamma|\leqq 1}\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} < A\,(\log(q+1))^A\log(|T|+2).$$

Every term on the left hand side is greater than A, and the number of terms is not less than $M(T)$. Hence we obtain the result of the lemma. We have excluded the case $q = 1$, when the result is of course classical.[1]

2. 71. *Lemma 7. We have*

$$(2.\ 711) \qquad |b| < Aq\,(\log(q+1))^A.$$

Suppose first that χ is non-principal. Then, by (2. 621) and (2. 54),

$$(2.\ 712) \qquad |b| < A\,(\log(q+1))^A + \left|\sum\left(\frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right)\right|.$$

[1] Landau, p. 337.

We write

$$\sum = \sum_1 + \sum_2, \tag{2. 713}$$

where $\sum_1$ is extended over the zeros for which $1 - \Theta \leq \Re(\varrho) \leq \Theta$ and $\sum_2$ over those for which $\Re(\varrho) = 0$. Now $\sum_1 = S'$, where S' is the S corresponding to a primitive $L(s)$ for modulus Q, where $Q \mid q$. Hence, by (2. 623),

$$\left|\sum_1\right| < A\,(\log (Q+1))^A < A\,(\log (q+1))^A. \tag{2. 714}$$

Again, the ϱ's of $\sum_2$ are the zeros (other than $s = 0$) of

$$\prod_\nu \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{\varpi_\nu^s}\right),$$

the ϖ_ν's being divisors of q and ε_ν an m-th root of unity, where $m = \varphi(Q) < q$ [1]; so that the number of ϖ_ν's is less than $A \log q$ and

$$\varepsilon_\nu = e^{2\pi i \omega_\nu},$$

where either $\omega_\nu = 0$ or

$$\frac{1}{q} \leq |\omega_\nu| \leq \frac{1}{2}.$$

Let us denote by ϱ_ν a zero (other than $s = 0$) of $1 - \varepsilon_\nu \varpi_\nu^{-s}$, by ϱ'_ν a ϱ_ν for which $|\varrho_\nu| \leq 1$, and by ϱ''_ν a ϱ_ν for which $|\varrho_\nu| > 1$. Then

$$\left|\sum_2 \left(\frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right)\right| \leq \sum_\nu \left(\sum_{\varrho'_\nu} + \sum_{\varrho''_\nu}\right) \left|\frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right|. \tag{2. 715}$$

Any ϱ_ν is of the form

$$\varrho_\nu = \frac{2\pi i (m + \omega_\nu)}{\log \varpi_\nu},$$

where m is an integer. Hence the number of zeros ϱ'_ν is less than $A \log \varpi_\nu$ or than $A \log (q+1)$; and the absolute value of the corresponding term in our sum is less than

$$\frac{A}{|\varrho|} < \frac{A \log \varpi_\nu}{|\omega_\nu|} < A q \log (q+1); \tag{2. 716}$$

[1] For (Landau, p. 482) $\varepsilon_\nu = X(\varpi_\nu)$, where X is a character to modulus Q.

so that

(2. 717) $$\left|\sum_{\varrho'_\nu}\right| < A q\,(\log (q+1))^2.$$

Also

(2. 718) $$\left|\sum_{\varrho''_\nu}\right| \leq \sum_{\varrho''_\nu}\left|\frac{1}{\varrho(1-\varrho)}\right| < \sum_{\varrho''_\nu}\frac{1}{|\varrho|^2}$$

$$< A\,(\log \varpi_\nu)^2 \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} < A\,(\log (q+1))^2.$$

From (2. 715), (2. 717) and (2. 718) we deduce

(2. 719) $$\left|\sum\nolimits_2\right| < A q\,(\log (q+1))^A;$$

and from (2. 713), (2. 714) and (2. 719) the result of the lemma.

2. 72. We have assumed that χ is not a principal character: For the principal character (mod. q) we have[1]

$$L_1(s) = \prod_{\varpi \mid q}\left(1 - \frac{1}{\varpi^s}\right)\zeta(s).$$

Since $\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{b} = 1$, we have

$$\sum_{\varpi \mid q}\frac{\log \varpi}{\varpi^s - 1} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{L'_1(s)}{L_1(s)}$$

$$= \frac{\mathfrak{b}-1}{s} - \frac{1}{s-1} + b - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}s\right) + \sum\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right),^2$$

$$\sum_{\varpi \mid q}\frac{\log \varpi}{\varpi - 1} + \lim_{s \to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) = \mathfrak{b} - 1 + b - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \sum\left(\frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right),$$

$$|b| < A \log (q+1) + \left|\sum\left(\frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right)\right|.$$

This corresponds to (2. 712), and from this point the proof proceeds as before.

---

[1] Landau, p. 423.

[2] $\sum$ refers to the complex zeros of $L_1(s)$, not merely to those of $\zeta(s)$.

2. 81. *Lemma 8. If* $0<\eta\leqq\frac{1}{2}$ *then*

$$f(x)=\frac{\mu(q)}{hY}+\sum_{k=1}^{h}C_k G_k+P, \tag{2. 811}$$

where

$$G_k=\sum_{\varrho_k}\Gamma(\varrho)\,Y^{-\varrho}, \tag{2. 812}$$

$$|P|<A\sqrt{q}\,(\log(q+1))^A\left(q+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}\right), \tag{2. 813}$$

$$\delta=\operatorname{arc\,tan}\frac{\eta}{|\theta|}. \tag{2. 814}$$

This is an immediate corollary of Lemmas 4 and 7.

2. 82. *Lemma 9. If* $0<\eta\leqq\frac{1}{2}$ *then*

$$f(x)=\varphi+\Phi, \tag{2. 821}$$

where

$$\varphi=\frac{\mu(q)}{hY}, \tag{2. 822}$$

$$|\Phi|<A\sqrt{q}\,(\log(q+1))^A\left(q+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{-\Theta}\delta^{-\Theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)\right), \tag{2. 823}$$

$$\delta=\operatorname{arc\,tan}\frac{\eta}{|\theta|}. \tag{2. 824}$$

We have

$$|G_k|\leqq\sum\nolimits_1|\Gamma(\varrho)\,Y^{-\varrho}|+\sum\nolimits_2|\Gamma(\varrho)\,Y^{-\varrho}|, \tag{2. 825}$$

where $\sum_1$ extends over ϱ_k's for which $|\gamma|\geqq 1$, $\sum_2$ over those for which $|\gamma|<1$. In $\sum_1$ we have

$$\begin{aligned}|\Gamma(\varrho)\,Y^{-\varrho}|&=|\Gamma(\beta+i\gamma)|\,|Y|^{-\beta}\exp\left(\gamma\operatorname{arc\,tan}\frac{\theta}{\eta}\right)\\&\leqq A|\gamma|^{\beta-\frac{1}{2}}|Y|^{-\beta}\exp\left(-\left(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{arc\,tan}\frac{|\theta|}{\eta}\right)|\gamma|\right)\\&\leqq A|\gamma|^{\Theta-\frac{1}{2}}|Y|^{-\Theta}e^{-\delta|\gamma|}\end{aligned}$$

(since $|Y| < A$ and, by hypothesis R, $\beta \leqq \Theta$). The number $M(T)$ of ϱ's for which $|\gamma|$ lies between T and $T+1$ $(T \geqq 0)$ is less than $A(\log(q+1))^A \log(T+2)$, by (2. 611). Hence

$$\sum\nolimits_1 |\gamma|^{\Theta-\frac{1}{2}} e^{-\delta|\gamma|} \leqq A(\log(q+1))^A \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{\Theta-\frac{1}{2}} \log(n+2)\, e^{-\delta n}$$

$$< A(\log(q+1))^A \delta^{-\Theta-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{\delta}+2\right),$$

(2. 826) $$\sum\nolimits_1 |\Gamma(\varrho)\, Y^{-\varrho}| < A(\log(q+1))^A |Y|^{-\Theta} \delta^{-\Theta-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{\delta}+2\right).$$

2. 83. Again, once more by (2. 611), $\sum_2$ has at most $A(\log(q+1))^A$ terms. We write

(2. 831) $$\sum\nolimits_2 = \sum\nolimits_{2,1} + \sum\nolimits_{2,2},$$

$\sum_{2,1}$ applying to zeros for which $1-\Theta \leqq \beta \leqq \Theta$, and $\sum_{2,2}$ to those for which $\beta = 0$. Now, in $\sum_2$,

$$|Y^{-\varrho}| = |Y|^{-\beta} \exp\left(\gamma \arc\tan\frac{\theta}{\eta}\right) < A|Y|^{-\beta};$$

and in $\sum_{2,1}$, $|\Gamma(\varrho)| < A$. Hence

(2. 832) $$\left|\sum\nolimits_{2,1}\right| < A|Y|^{-\beta} \sum\nolimits_{2,1} |\Gamma(\varrho)| < A|Y|^{-\Theta} \sum\nolimits_{2,1} 1 < A(\log(q+1))^A |Y|^{-\Theta}.$$

Again, in $\sum_{2,2}$, $|Y| < A$ and

$$\frac{1}{|\varrho|} < Aq\log(q+1),$$

by (2. 716); so that

(2. 833) $$\left|\sum\nolimits_{2,2}\right| < A\sum\nolimits_{2,2} |\Gamma(\varrho)| = A\sum\nolimits_{2,2} \frac{|\Gamma(1+\varrho)|}{|\varrho|}$$

$$< A\sum\nolimits_{2,2} \frac{1}{|\varrho|} < Aq(\log(q+1))^A.$$

From (2. 825), (2. 826), (2. 831), (2. 832), and (2. 833), we obtain

(2. 834) $$|G_k| < A(\log(q+1))^A \left(q + |Y|^{-\Theta} \delta^{-\Theta-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)\right) = H_k,$$

say; and from (2. 811), (2. 812), (2. 813), (2. 821), (2. 822) and (2. 834) we deduce

$$|\Phi| = \left|\sum_{k=1}^{h} C_k G_k + P\right|$$

$$< \sum_{k=1}^{h} |C_k G_k| + A\sqrt{q}\,(\log(q+1))^A \left(q + \eta^{-\frac{1}{2}} + |Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$< \frac{\sqrt{q}}{h}\sum_{k=1}^{h} H_k + A\sqrt{q}\,(\log(q+1))^A \left(q + \eta^{-\frac{1}{2}} + |Y|^{-\Theta}\delta^{-\Theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)\right)$$

$$< A\sqrt{q}\,(\log(q+1))^A \left(q + \eta^{-\frac{1}{2}} + |Y|^{-\Theta}\delta^{-\Theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)\right);$$

that is to say (2. 823).

2. 9. *Lemma 10. We have*

(2. 91) $$h = \varphi(q) > A q\,(\log q)^{-A}.$$

We have in fact[1]

$$\varphi(q) > (1-\delta)\, e^{-C} \frac{q}{\log\log q} \qquad (q > q_0(\delta))$$

for every positive δ, C being Euler's constant.

3. Proof of the main theorems.

Approximation to $\nu_r(n)$ by the singular series.

3. 11. **Theorem A.** *If r is an integer, $r \geq 3$, and*

(3. 111) $$(f(x))^r = \sum \nu_r(n)\, x^n,$$

so that

(3. 112) $$\nu_r(n) = \sum_{\varpi_1+\varpi_2+\cdots+\varpi_r = n} \log\varpi_1 \log\varpi_2 \cdots \log\varpi_r,$$

then

(3. 113) $$\nu_r(n) = \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} S_r + O\left(n^{r-1+\left(\Theta-\frac{3}{4}\right)} (\log n)^B\right) \sim \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} S_r,$$

[1] Landau, p. 217.

where

(3. 114)
$$S_r = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n).$$

It is to be understood, here and in all that follows, that O's refer to the limit-process $n \to \infty$, and that their constants are functions of r alone.

If $n \geqq 2$, we have

(3. 115)
$$\nu_r(n) = \frac{1}{2\pi i}\int (f(x))^r \frac{dx}{x^{n+1}},$$

the path of integration being the circle $|x| = e^{-H}$, where $H = \frac{1}{n}$, so that

$$1 - |x| = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Using the Farey dissection of order $N = [\sqrt{n}]$, we have

(3. 116)
$$\nu_r(n) = \sum_{q=1}^{N} \sum_{p<q,\,(p,q)=1} \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_{p,q}} (f(x))^r \frac{dx}{x^{n+1}}$$
$$= \sum e_q(-np)\frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta_{p,q}} (f(x))^r \frac{dX}{X^{n+1}}$$
$$= \sum e_q(-np)\, j_{p,q},$$

say. Now

$$|f^r - \varphi^r| \leqq |\Phi|(|f^{r-1}| + |f^{r-2}\varphi| + \cdots + |\varphi^{r-1}|)$$
$$< B(|\Phi f^{r-1}| + |\Phi\varphi^{r-1}|).$$

Also $|X^{-n}| = e^{nH} < A$. Hence

(3. 117)
$$j_{p,q} = l_{p,q} + m_{p,q},$$

where

(3. 118)
$$l_{p,q} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta_{p,q}} \varphi^r \frac{dX}{X^{n+1}},$$

(3. 119)
$$|m_{p,q}| = O\left(\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} (|\Phi f^{r-1}| + |\Phi\varphi^{r-1}|)\, d\theta\right).$$

3. 12. We have $\eta = H = \frac{1}{n}$ and $q \leqq \sqrt{n}$, and so, by (2. 823),

$$(3.\ 121)\qquad |\Phi| < An^{\frac{3}{4}} (\log n)^A + A (\log n)^A \sqrt{q}\, |Y|^{-\Theta} \delta^{-\Theta - \frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{\delta} + 2\right),$$

where $\delta = \operatorname{arc\,tan} \frac{\eta}{|\theta|}$. We must now distinguish two cases. If $|\theta| \leqq \eta$, we have

$$|Y| > A\eta,\ \delta > A,$$

and

$$(3.\ 122)\qquad \sqrt{q}\, |Y|^{-\Theta} \delta^{-\Theta - \frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{\delta} + 2\right) < A\, n^{\frac{1}{4}} \eta^{-\Theta} = A\, n^{\Theta + \frac{1}{4}}.$$

If on the other hand $\eta < |\theta| \leqq \bar{\theta}_{p,q}$, we have

$$\delta > A \frac{\eta}{|\theta|} > \frac{A}{n},\ |Y| > A|\theta|,$$

$$(3.\ 123)\qquad \sqrt{q}\, |Y|^{-\Theta} \delta^{-\Theta - \frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{\delta} + 2\right) < A \sqrt{q} \,.\, |\theta|^{-\Theta} \,.\, \eta^{-\Theta - \frac{1}{2}} |\theta|^{\Theta + \frac{1}{2}} \,.\, \log n$$

$$= A n^{\Theta + \frac{1}{2}} \log n\, (q|\theta|)^{\frac{1}{2}} < A n^{\Theta + \frac{1}{2}} \log n \,.\, n^{-\frac{1}{4}} = A n^{\Theta + \frac{1}{4}} \log n,$$

since $q|\theta| \leqq q\bar{\theta}_{p,q} < An^{-\frac{1}{2}}$. Thus (3. 123) holds in either case. Also $\Theta \geqq \frac{1}{2}$ and so, by (3. 121),

$$(3.\ 124)\qquad |\Phi| < An^{\Theta + \frac{1}{4}} (\log n)^A$$

3. 13. Now, remembering that $r \geqq 3$, we have

$$\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} |\varphi|^{r-1} d\theta < Bh^{-(r-1)} \int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} |Y|^{-(r-1)} d\theta$$

$$< Bh^{-(r-1)} \int_0^{\infty} (\eta^2 + \theta^2)^{-\frac{1}{2}(r-1)}\, d\theta$$

$$< Bh^{-(r-1)} n^{r-2};$$

and so

$$(3.\ 131)\qquad \sum_{p,q} \int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} |\Phi\varphi^{r-1}|\, d\theta < Bn^{r-2}\,(\operatorname{Max}|\Phi|)\sum_q h^{-(r-2)}$$

$$< Bn^{r-2+\Theta+\frac{1}{4}}(\log n)^B = Bn^{r-1+\left(\Theta-\frac{3}{4}\right)}(\log n)^B,$$

by (3. 124) and (2. 91).

3. 14. Again, if $\arg x = \psi$, we have

$$\sum \int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} |f|^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} |f|^2\, d\psi$$

$$= 2\pi \sum_{\varpi} (\log \varpi)^2 |x|^{2\varpi} < A\sum_{m=2}^{\infty} \log m\, \Lambda(m)\, |x|^{2m}$$

$$< A(1-|x|^2)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{m} \log k\, \Lambda(k)\right)|x|^{2m}$$

$$< A(1-|x|)\sum_{m=2}^{\infty} m\log m\, |x|^{2m}$$

$$< \frac{A}{1-|x|}\log\left(\frac{1}{1-|x|}\right) < An\log n.$$

Similarly

$$|f| \leq \sum_{\varpi} \log \varpi\, |x|^{\varpi} < \sum_m \Lambda(m)\,|x|^m < \frac{A}{1-|x|} < An.$$

Hence

$$(3.\ 141)\qquad \sum_{p,q} \int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} |f|^{r-1}|\Phi|\, d\theta \leq \operatorname{Max}|\Phi f^{r-3}| \int_0^{2\pi} |f|^2\, d\psi$$

$$< B\,n^{\Theta+\frac{1}{4}}\log n \,.\, n^{r-3} \,.\, n\log n$$

$$< Bn^{r-1+\left(\Theta-\frac{3}{4}\right)}(\log n)^B.$$

From (3. 116), (3. 117), (3. 119), (3. 131) and (3. 141) we deduce

$$\nu_r(n) = \sum e_q(-np)\, l_{p,q} + O\left(n^{r-1+\left(\Theta-\frac{3}{4}\right)} (\log n)^B\right), \tag{3. 142}$$

where $l_{p,q}$ is defined by (3. 118).

3. 15. In $l_{p,q}$ we write $X = e^{-Y}$, $dX = -e^{-Y} dY$, so that Y varies on the straight line from $\eta + i\theta_{p,q}$ to $\eta - i\theta'_{p,q}$. Then, by (2. 822) and (3. 118),

$$l_{p,q} = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\mu(q)}{h}\right)^r \int\limits_{\eta+i\theta_{p,q}}^{\eta-i\theta'_{p,q}} Y^{-r} e^{nY} dY. \tag{3. 151}$$

Now

$$-\int\limits_{\eta+i\theta_{p,q}}^{\eta-i\theta'_{p,q}} = \int\limits_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} Y^{-r} e^{nY} dY + O\left(\int\limits_{\theta_q}^{\infty} |\eta + i\theta|^{-r} d\theta\right) \tag{3. 152}$$

$$= 2\pi i \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} + O\left(\int\limits_{\theta_q}^{\infty} |\eta + i\theta|^{-r} d\theta\right),$$

where

$$\theta_q = \operatorname*{Min}_{p<q} (\theta_{p,q},\, \theta'_{p,q}) \geq \frac{1}{2qN}.$$

Also

$$\int\limits_{\theta_q}^{\infty} (\eta + i\theta)^{-r} d\theta < \int\limits_{\theta_q}^{\infty} \theta^{-r} d\theta < B\theta_q^{1-r} < B(q\sqrt{n})^{r-1}. \tag{3. 153}$$

From (3. 151), (3. 152) and (3. 153), we deduce

$$\sum e_q(-np)\, l_{p,q} = \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} \sum_{p,q} \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r e_q(-np) + Q, \tag{3. 154}$$

where

$$|Q| < B\sum_{p,q} h^{-r} q^{r-1} n^{\frac{1}{2}(r-1)} < Bn^{\frac{1}{2}(r-1)} \sum_q \left(\frac{q}{h}\right)^{r-1} \tag{3. 155}$$

$$< Bn^{\frac{1}{2}(r-1)} \sum_{q=1}^{N} (\log q)^B < Bn^{\frac{1}{2}r} (\log n)^B.$$

Since $r \geqq 3$ and $\Theta \geqq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} r < r - 1 - \frac{1}{4} \leqq r - 1 + \left(\Theta - \frac{3}{4}\right)$; and from (3. 142), (3. 154), and (3. 155) we obtain

$$(3.\ 156) \qquad \nu_r(n) = \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} \sum_{p,q} \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r e_q(-n\,p) + O\left(n^{r-1+\left(\Theta-\frac{3}{4}\right)} (\log n)^B\right)$$

$$= \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} \sum_{q<N} \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n) + O\left(n^{r-1+\left(\Theta-\frac{3}{4}\right)} (\log n)^B\right).$$

3. 16. In order to complete the proof of Theorem A, we have merely to show that the finite series in (3. 156) may be replaced by the infinite series S_r. Now

$$\left| n^{r-1} \sum_{q>N} \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n) \right| < B n^{r-1} \sum_{q>N} q^{1-r} (\log q)^B < B n^{\frac{1}{2}r} (\log n)^B,$$

and $\frac{1}{2} r < r - 1 + \left(\Theta - \frac{3}{4}\right)$. Hence this error may be absorbed in the second term of (3. 156), and the proof of the theorem is completed.

Summation of the singular series.

3. 21. *Lemma 11. If*

$$(3.\ 211) \qquad c_q(n) = \sum e_q(n\,p),$$

where n is a positive integer and the summation extends over all positive values of p less than and prime to q, $p = 0$ being included when $q = 1$, but not otherwise, then

$$(3.\ 212) \qquad c_q(-n) = c_q(n);$$

$$(3.\ 213) \qquad c_{qq'}(n) = c_q(n)\, c_{q'}(n)$$

if $(q, q') = 1$; and

$$(3.\ 214) \qquad c_q(n) = \sum \delta \mu \left(\frac{q}{\delta}\right),$$

where δ is a common divisor of q and n.

The terms in p and $q - p$ are conjugate. Hence $c_q(n)$ is real. As $c_q(n)$ and $c_q(-n)$ are conjugate we obtain (3. 212).[1]

[1] The argument fails if $q = 1$ or $q = 2$; but $c_1(n) = c_1(-n) = 1$, $c_2(n) = c_2(-n) = (-1)$.

Again

$$c_q(n)\,c_{q'}(n)=\sum_{p,p'}\exp\left(2n\pi i\left(\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}\right)\right)=\sum_{p,p'}\exp\left(\frac{2nP\pi i}{qq'}\right),$$

where

$$P=pq'+p'q.$$

When p assumes a set of $\varphi(q)$ values, positive, prime to q, and incongruent to modulus q, and p' a similar set of values for modulus q', then P assumes a set of $\varphi(q)\varphi(q')=\varphi(qq')$ values, plainly all positive, prime to qq' and incongruent to modulus qq'. Hence we obtain (3. 213).

Finally, it is plain that

$$\sum_{d\mid q}c_d(n)=\sum_{h=0}^{q-1}e_q(nh),$$

which is zero unless $q\mid n$ and then equal to q. Hence, if we write

$$\eta(q)=q\quad(q\mid n),\qquad \eta(q)=0\quad(q\nmid n),$$

we have

$$\sum_{d\mid q}c_d(n)=\eta(q),$$

and therefore

$$c_q(n)=\sum_{d\mid q}\eta(d)\,\mu\left(\frac{q}{d}\right)$$

by the well-known inversion formula of Möbius.[1] This is (3. 214).[2]

3. 22. *Lemma 12. Suppose that* $r\geqq 2$ *and*

(3. 221) $$S_r=\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n).$$

Then

(3. 222) $$S_r=0$$

---

[1] Landau, p. 577.

[2] The formula (3. 214) is proved by RAMANUJAN ('On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers', *Trans. Camb. Phil. Soc.*, vol. 22 (1918), pp. 259—276 (p. 260)). It had already been given for $n=1$ by LANDAU (*Handbuch* (1909), p. 572: Landau refers to it as a known result), and in the general case by JENSEN ('Et nyt Udtryk for den talteoretiske Funktion $\sum\mu(n)=M(n)$', *Den 3. Skandinaviske Matematiker-Kongres, Kristiania 1913*, Kristiania (1915), p. 145). Ramanujan makes a large number of very beautiful applications of the sums in question, and they may well be associated with his name.

if n and r are of opposite parity. But if n and r are of like parity then

(3. 223)
$$S_r = 2C_r \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{(\mathfrak{p}-1)^r + (-1)^r(\mathfrak{p}-1)}{(\mathfrak{p}-1)^r - (-1)^r}\right),$$

where $\mathfrak{p}$ is an odd prime divisor of n and

(3. 224)
$$C_r = \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^r}{(\varpi-1)^r}\right).$$

Let

(3. 225)
$$\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n) = A_q.$$

Then

$$\mu(qq') = \mu(q)\mu(q'),\ \varphi(qq') = \varphi(q)\varphi(q'),\ c_{qq'}(-n) = c_q(-n)\,c_{q'}(-n)$$

if $(q, q') = 1$; and therefore (on the same hypothesis)

(3. 226)
$$A_{qq'} = A_q A_{q'}.$$

Hence [1]

$$S_r = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = 1 + A_2 + \cdots = \prod_{\varpi} \chi_{\varpi}$$

where

(3. 227)
$$\chi_{\varpi} = 1 + A_{\varpi} + A_{\varpi^2} + A_{\varpi^3} + \cdots = 1 + A_{\varpi},$$

since $A_{\varpi^2}, A_{\varpi^3}, \cdots$ vanish in virtue of the factor $\mu(q)$.

3. 23. If $\varpi \nmid n$, we have

$$\mu(\varpi) = -1,\ \varphi(\varpi) = \varpi - 1,\ c_{\varpi}(n) = \mu(\varpi) = -1;$$

(3. 231)
$$A_{\varpi} = -\frac{(-1)^r}{(\varpi-1)^r}.$$

If on the other hand $\varpi \mid n$, we have

$$c_{\varpi}(n) = \mu(\varpi) + \varpi\mu(1) = \varpi - 1,$$

(3. 232)
$$A_{\varpi} = \frac{(-1)^r}{(\varpi-1)^{r-1}}.$$

---

[1] Since $|c_q(n)| \leq \sum \delta$, where $\delta \mid n$, we have $c_q(n) = O(1)$ when n is fixed and $q \to \infty$. Also by Lemma 10, $\varphi(q) > Aq(\log q)^{-A}$. Hence the series and products concerned are absolutely convergent.

Hence

$$S_r = \prod_{\varpi \mid n} \left(1 + \frac{(-1)^r}{(\varpi - 1)^{r-1}}\right) \prod_{\varpi \nmid n} \left(1 - \frac{(-1)^r}{(\varpi - 1)^r}\right). \tag{3. 233}$$

If n is even and r is odd, the first factor vanishes in virtue of the factor for which $\varpi = 2$; if n is odd and r even, the second factor vanishes similarly. Thus $S_r = 0$ whenever n and r are of opposite parity.

If n and r are of like parity, the factor corresponding to $\varpi = 2$ is in any case 2; and

$$S_r = 2 \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^r}{(\varpi - 1)^r}\right) \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{(\mathfrak{p} - 1)^r + (-1)^r (\mathfrak{p} - 1)}{(\mathfrak{p} - 1)^r - (-1)^r}\right),$$

as stated in the lemma.

Proof of the final formulae.

3. 3. **Theorem B.** *Suppose that $r \geqq 3$. Then, if n and r are of unlike parity,*

$$\nu_r(n) = o(n^{r-1}). \tag{3. 31}$$

But if n and r are of like parity then

$$\nu_r(n) \sim \frac{2C_r}{(r-1)!} n^{r-1} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{(\mathfrak{p} - 1)^r + (-1)^r (\mathfrak{p} - 1)}{(\mathfrak{p} - 1)^r - (-1)^r}\right), \tag{3. 32}$$

where $\mathfrak{p}$ is an odd prime divisor of n and

$$C_r = \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^r}{(\varpi - 1)^r}\right). \tag{3. 33}$$

This follows immediately from Theorem A and Lemma 12.[1]

3. 4. *Lemma 13. If $r \geqq 3$ and n and r are of like parity, then*

$$\nu_r(n) > B n^{r-1},$$

for $n \geqq n_0(r)$.

[1] Results equivalent to these are stated in equations (5. 11)—(5. 22) of our note 2, but incorrectly, a factor

$$(\log n)^{-r}$$

being omitted in each, owing to a momentary confusion between $\nu_r(n)$ and $N_r(n)$. The $\nu_r(n)$ of 2 is the $N_r(n)$ of this memoir.

This lemma is required for the proof of Theorem C. If r is *even*

$$\prod\left(\frac{(p-1)^r+p-1}{(p-1)^r-1}\right)>1.$$

If r is *odd*

$$\prod\left(\frac{(p-1)^r-p+1}{(p-1)^r+1}\right)>\prod\left(\frac{(p-1)^r-p}{(p-1)^r}\right)>\prod_{\varpi=3}^{\infty}\left(1-\frac{\varpi}{(\varpi-1)^3}\right)=A.$$

In either case the conclusion follows from (3. 32).

3. 5. **Theorem C.** *If $r\geqq 3$ and n and r are of like parity, then*

$$N_r(n)\sim\frac{\nu_r(n)}{(\log n)^r}. \tag{3. 51}$$

We observe first that

$$N_r(n)=\sum_{\varpi_1+\varpi_2+\cdots+\varpi_r=n} 1 \leqq \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_r=n} 1 < Bn^{r-1}$$

and

$$\nu_r(n)=\sum_{\varpi_1+\varpi_2+\cdots+\varpi_r=n}\log\varpi_1\cdots\log\varpi_r\leqq(\log n)^r N_r(n)<Bn^{r-1}(\log n)^r. \tag{3. 511}$$

Write now

$$\nu_r=\nu'_r+\nu''_r,\quad N_r=N'_r+N''_r, \tag{3. 512}$$

where ν'_r and N'_r include all terms of the summations for which

$$\varpi_s\geqq n^{1-\delta}\quad(0<\delta<1,\ s=1,2,\ldots,r).$$

Then plainly

$$\nu'_r(n)\geqq(1-\delta)^r(\log n)^r N'_r(n). \tag{3. 513}$$

Again

$$N''_r(n)\leqq r\sum_{\varpi_r<n^{1-\delta}}\left(\sum_{\varpi_1+\varpi_2+\cdots+\varpi_{r-1}=n-\varpi_r}1\right)$$

$$<B\sum_{\varpi_r<n^{1-\delta}}N_{r-1}(n-\varpi_r)<Bn^{1-\delta}.\,n^{r-2}<Bn^{r-1-\delta},$$

$$\nu''_r(n)\leqq(\log n)^r N''_r(n)<Bn^{r-1-\delta}(\log n)^r.$$

But $\nu_r(n)>Bn^{r-1}$ for $n\geqq n_0(r)$, by Lemma 13; and so

$$(\log n)^r N''_r(n)=o(\nu_r(n)),\quad \nu''_r(n)=o(\nu_r(n)), \tag{3. 514}$$

for every positive δ.

From (3. 511), (3. 512), (3. 513), and (3. 514) we deduce

$$(1-\delta)^r (\log n)^r (N_r - N''_r) \leq \nu_r - \nu''_r \leq (\log n)^r N_r,$$

$$(1-\delta)^r (\log n)^r N_r \leq \nu_r + o(\nu_r) \leq (\log n)^r N_r,$$

$$(1-\delta)^r \leq \underline{\lim} \frac{\nu_r}{(\log n)^r N_r}, \quad \overline{\lim} \frac{\nu_r}{(\log n)^r N_r} \leq 1.$$

As δ is arbitrary, this proves (3. 51).

3. 6. **Theorem D**. *Every large odd number n is the sum of three odd primes. The asymptotic formula for the number of representations $\bar{N}_3(n)$ is*

$$\bar{N}_3(n) \sim C_3 \frac{n^2}{(\log n)^3} \prod \left(\frac{(\mathfrak{p}-1)(\mathfrak{p}-2)}{\mathfrak{p}^2 - 3\mathfrak{p} + 3}\right), \tag{3. 61}$$

where $\mathfrak{p}$ is a prime divisor of n and

$$C_3 = \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{(\varpi - 1)^3}\right). \tag{3. 62}$$

This is an almost immediate corollary of Theorems B and C. These theorems give the corresponding formula for $N_3(n)$. If not all the primes are odd, two must be 2 and $n-4$ a prime. The number of such representations is one at most.

Theorem E. *Every large even number n is the sum of four odd primes (of which one may be assigned.) The asymptotic formula for the total number of representations is*

$$\bar{N}_4(n) \sim \frac{1}{3} C_4 \frac{n^3}{(\log n)^4} \prod \left(\frac{(\mathfrak{p}-1)(\mathfrak{p}^2 - 3\mathfrak{p} + 3)}{(\mathfrak{p}-2)(\mathfrak{p}^2 - 2\mathfrak{p} + 2)}\right), \tag{3. 63}$$

where $\mathfrak{p}$ is an odd prime divisor of n and

$$C_4 = \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(\varpi - 1)^4}\right). \tag{3. 64}$$

This is a corollary of the same two theorems. We have only to observe that the number of representations by four primes which are not all odd is plainly $O(n)$. There are evidently similar theorems for any greater value of r.

4. Remarks on 'Goldbach's Theorem'.

4. 1. Our method fails when $r = 2$. It does not fail *in principle*, for it leads to a definite result which appears to be correct; but we cannot overcome the difficulties of the proof, even if we assume that $\Theta = \frac{1}{2}$. The best upper bound that we can determine for the error is too large by (roughly) a power $n^{\frac{1}{4}}$.

The formula to which our method leads is contained in the following

Conjecture A. *Every large even number is the sum of two odd primes. The asymptotic formula for the number of representatives is*

$$N_2(n) \sim 2C_2 \frac{n}{(\log n)^2} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right) \tag{4. 11}$$

where $\mathfrak{p}$ *is an odd prime divisor of* n, *and*

$$C_2 = \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(\varpi-1)^2}\right). \tag{4. 12}$$

We add a few words as to the history of this formula, and the empirical evidence for its truth.[1]

The first definite formulation of a result of this character appears to be due to Sylvester[2], who, in a short abstract published in the *Proceedings of London Mathematical Society* in 1871, suggested that

$$N_2(n) \sim \frac{2n}{\log n} \prod \left(\frac{\varpi-2}{\varpi-1}\right), \tag{4. 13}$$

where

$$3 \leqq \varpi < \sqrt{n}, \quad \varpi \nmid n.$$

Since

$$\prod_{\varpi<\sqrt{n}} \left(\frac{\varpi-2}{\varpi-1}\right) = \prod_{\varpi<\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{(\varpi-1)^2}\right) \prod_{\varpi<\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\varpi}\right) \sim C_2 \prod_{\varpi<\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\varpi}\right),$$

---

[1] As regards the earlier history of 'Goldbach's Theorem', see L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. 1 (Washington 1919), pp. 421—425.

[2] J. J. Sylvester, 'On the partition of an even number into two primes', *Proc. London Math. Soc.*, ser. 1, vol. 4 (1871), pp. 4—6 (*Math. Papers*, vol. 2, pp. 709—711). See also 'On the Goldbach-Euler Theorem regarding prime numbers', *Nature*, vol. 55 (1896—7), pp. 196—197, 269 (*Math. Papers*, vol. 4, pp. 734—737).

We owe our knowledge of Sylvester's notes on the subject to Mr. B. M. Wilson of Trinity College, Cambridge. See, in connection with all that follows, Shah and Wilson, 1, and Hardy and Littlewood, 2.

and [1]

$$\prod_{\varpi < \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\varpi}\right) \sim \frac{2\,e^{-C}}{\log n}, \tag{4. 14}$$

where C is Euler's constant, (4. 13) is equivalent to

$$N_2(n) \sim 4\,e^{-C}\,C_2 \frac{n}{(\log n)^2} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right), \tag{4. 15}$$

and contradicts (4. 11), the two formulae differing by a factor $2\,e^{-C} = 1.123\ldots$ We prove in 4. 2 that (4. 11) is the only formula of the kind that can possibly be correct, so that Sylvester's formula is erroneous. But Sylvester was the first to identify the factor

$$\prod \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right), \tag{4. 16}$$

to which the *irregularities* of $N_2(n)$ are due. There is no sufficient evidence to show how he was led to his result.

A quite different formula was suggested by STÄCKEL [2] in 1896, viz.,

$$N_2(n) \sim \frac{n}{(\log n)^2} \prod \left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}\right).$$

This formula does not introduce the factor (4. 16), and does not give anything like so good an approximation to the facts; it was in any case shown to be incorrect by LANDAU [3] in 1900.

In 1915 there appeared an uncompleted essay on Goldbach's Theorem by MERLIN.[4] MERLIN does not give a complete asymptotic formula, but recognises (like Sylvester before him) the importance of the factor (4. 16).

About the same time the problem was attacked by BRUN [5]. The formula to which Brun's argument naturally leads is

---

[1] Landau, p. 218.

[2] P. STÄCKEL, 'Über Goldbach's empirisches Theorem: Jede grade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden', *Göttinger Nachrichten*, 1896, pp. 292—299.

[3] E. LANDAU, 'Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz', *Göttinger Nachrichten*, 1900, pp. 177—186.

[4] J. MERLIN, 'Un travail sur les nombres premiers', *Bulletin des sciences mathématiques*, vol. 39 (1915), pp. 121—136.

[5] V. BRUN, 'Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare', *Archiv for Mathematik* (Christiania), vol. 34, part 2 (1915), no. 8, pp. 1—15. The formula (4. 18) is not actually formulated by Brun: see the discussion by Shah and Wilson, 1, and Hardy and Littlewood, 2. See also a second paper by the same author, 'Sur les nombres premiers de la forme $ap+b$', *ibid.*, part. 4 (1917), no. 14, pp. 1—9; and the postscript to this memoir.

$$N_2(n) \sim 2Hn \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right), \tag{4.17}$$

where

$$H = \prod_{3 \leqq \varpi < \sqrt{n}} \left(1 - \frac{2}{\varpi}\right). \tag{4.171}$$

This is easily shown to be equivalent to

$$N_2(n) \sim 8e^{-2\gamma} C_2 \frac{n}{(\log n)^2} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right), \tag{4.18}$$

and differs from (4. 11) by a factor $4e^{-2C} = 1.263\ldots$ The argument of 4. 2 will show that this formula, like Sylvester's, is incorrect.

Finally, in 1916 Stäckel[1] returned to the subject in a series of memoirs published in the *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, which we have until very recently been unable to consult. Some further remarks concerning these memoirs will be found in our final postscript.

4. 2. We proceed to justify our assertion that the formulae (4. 15) and (4. 18) cannot be correct.

Theorem F. *Suppose it to be true that*[2]

$$N_2(n) \sim A \frac{n}{(\log n)^2} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right) \tag{4.21}$$

if

$$n = 2^{a} \mathfrak{p}^{a} \mathfrak{p}'^{a'} \ldots \qquad (\alpha > 0,\ a,\ a', \ldots > 0),$$

and

$$N_2(n) = o\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right) \tag{4.22}$$

if n is odd. Then

$$A = 2C_2 = 2\prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(\varpi-1)^2}\right). \tag{4.23}$$

---

[1] P. Stäckel, 'Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei Primzahlen', 8 August 1916; 'Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen', I. Teil 27 Dezember 1917, II. Teil 19 Januar 1918, III. Teil 19 Juli 1918.

[2] Throughout 4.2 A is *the same* constant.

Write

$$(4.\ 24)\qquad \Omega(n)=An\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right)\ (n\ \textit{even}),\ \Omega(n)=0\ (n\ \textit{odd}).$$

Then, by (4. 21) and Theorem C, now valid in virtue of (4. 21),

$$(4.\ 25)\qquad \nu_2(n)=\sum_{\varpi+\varpi'=n}\log\varpi\log\varpi'\sim\Omega(n),$$

it being understood that, when n is odd, this formula means

$$\nu_2(n)=o(n).$$

Further let

$$f(s)=\sum\frac{\Omega(n)}{n^s}=\sum\frac{\Omega(n)}{n^{1+u}},$$

these series being absolutely convergent if $\Re(s)>2$, $\Re(u)>1$. Then

$$(4.\ 26)\qquad f(s)=A\sum_{n\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ 2)}n^{-u}\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right)$$

$$=A\sum_{a>0}2^{-au}\,\mathfrak{p}^{-au}\,\mathfrak{p}'^{-a'u}\cdots\frac{(\mathfrak{p}-1)(\mathfrak{p}'-1)\dots}{(\mathfrak{p}-2)(\mathfrak{p}'-2)\dots}$$

$$=\frac{2^{-u}A}{1-2^{-u}}\prod_{\varpi=3}^{\infty}\left(1+\frac{\varpi-1}{\varpi-2}\,\frac{\varpi^{-u}}{1-\varpi^{-u}}\right)=\frac{2^{-u}A}{1-2^{-u}}\xi(u),$$

say. Suppose now that $u\to 1$, and let

$$\eta(u)=\prod_{\varpi=3}^{\infty}\left(1+\frac{\varpi^{-u}}{1-\varpi^{-u}}\right)=\prod_{\varpi=3}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\varpi^{-u}}\right)=(1-2^{-u})\,\zeta(u).$$

Then

$$\frac{\xi(u)}{\eta(u)}=\prod\left(\left(1+\frac{\varpi-1}{\varpi-2}\,\frac{\varpi^{-u}}{1-\varpi^{-u}}\right)\Big/\left(1+\frac{\varpi^{-u}}{1-\varpi^{-u}}\right)\right)$$

$$\to\prod\left(\left(1+\frac{1}{\varpi-2}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{\varpi-1}\right)\right)=\prod\left(\frac{(\varpi-1)^2}{\varpi(\varpi-2)}\right)$$

$$=\prod\left(\frac{(\varpi-1)^2}{(\varpi-1)^2-1}\right)=\frac{1}{C_2}.$$

Hence

$$(4.\ 27)\qquad f(s)\sim A\xi(u)\sim\frac{A}{C_2}\eta(u)\sim\frac{A}{2C_2}\zeta(u)\sim\frac{A}{2C_2(u-1)}=\frac{A}{2C_2(s-2)}.$$

On the other hand, when $x \to 1$,

$$\sum \nu_2(n)\, x^n \sim \left(\sum \log \varpi\, x^{\varpi}\right)^2 \sim \frac{1}{(1-x)^2},$$

and so[1]

$$\nu_2(1) + \nu_2(2) + \cdots + \nu_2(n) \sim \frac{1}{2} n^2. \tag{4. 28}$$

It is an elementary deduction[2] that

$$g(s) = \sum \frac{\nu_2(n)}{n^s} \sim \sum \frac{1}{n^{s-1}} \sim \frac{1}{s-2}$$

when $s \to 2$; and hence[2] that (under the hypotheses (4. 21) and (4. 22))

$$f(s) \sim \frac{1}{s-2}. \tag{4. 29}$$

Comparing (4. 27) and (4. 29), we obtain the result of the theorem.

4. 3. The fact that both Sylvester's and Brun's formulae contain an erroneous constant factor, and that this factor is in each case a simple function of the number e^{-C}, is not so remarkable as it may seem.

In the first place we observe that any formula in the theory of primes, *deduced from considerations of probability,* is likely to be erroneous in just this way. Consider, for example, the problem *'what is the chance that a large number n should be prime?'* We know that the answer is that the chance is approximately $\frac{1}{\log n}$.

Now the chance that n should not be divisible by any prime less than a *fixed* number x is asymptotically equivalent to

$$\prod_{\varpi < x} \left(1 - \frac{1}{\varpi}\right);$$

[1] We here use Theorem 8 of our paper 'Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive', *Proc. London Math. Soc.,* ser. 2, vol. 13, pp. 174—192. This is the quickest proof, but by no means the most elementary. The formula (4. 28) is equivalent to the formula

$$\sum_1^n N_2(m) \sim \frac{n^2}{2(\log n)^2}$$

used by Landau in his note quoted on p. 33.

[2] For general theorems including those used here as very special cases, see K. Knopp, 'Divergenzcharactere gewisser Dirichlet'scher Reihen', *Acta Mathematica,* vol. 34, 1909, pp. 165—204 (*e. g.* Satz III, p. 176).

and it would be natural to infer[1] that the chance required is asymptotically equivalent to

$$\prod_{\varpi < \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\varpi}\right).$$

But[2]

$$\prod_{\varpi > \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\varpi}\right) \sim \frac{2e^{-C}}{\log n};$$

and our inference is incorrect, to the extent of a factor $2e^{-C}$.

It is true that Brun's argument is not stated in terms of probabilities[3], but it involves a heuristic passage to the limit of exactly the same character as that in the argument we have just quoted. Brun finds first (by an ingenious use of the 'sieve of Eratosthenes') an asymptotic formula for the number of representations of n as the sum of two numbers, *neither divisible by any fixed number of primes.* This formula is correct and the proof valid. So is the first stage in the argument above; it rests on an enumeration of cases, and all reference to 'probability'[4] is easily eliminated. It is in the passage to the limit that error is introduced, and the nature of the error is the same in one case as in the other.

4. 4. Shah and Wilson have tested Conjecture A extensively by comparison with the empirical data collected by Cantor, Aubry, Haussner, and Ripert. We reprint their table of results; but some preliminary remarks are required. In the first place it is essential, in a numerical test, to work with a formula $N_2(n)$, such as (4. 11), and not with one for $\nu_2(n)$, such as (4. 25). In our analysis, on the other hand, it is $\nu_2(n)$ which presents itself first, and the formula for $N_2(n)$ is secondary. In order to derive the asymptotic formula for $N_2(n)$, we write

$$\nu_2(n) = \sum_{\varpi + \varpi' = n} \log \varpi \log \varpi' \sim (\log n)^2 N_2(n).$$

The factor $(\log n)^2$ is certainly in error to an order $\log n$, and it is more natural[5] to replace $\nu_2(n)$ by

$$((\log n)^2 - 2 \log n + \cdots) N_2(n).$$

---

[1] One might well replace $\varpi < \sqrt{n}$ by $\varpi < n$, in which case we should obtain a probability half as large. This remark is in itself enough to show the unsatisfactory character of the argument.

[2] Landau, p. 218.

[3] Whether Sylvester's argument was or was not we have no direct means of judging.

[4] *Probability* is not a notion of pure mathematics, but of philosophy or physics.

[5] Compare Shah and Wilson, *l. c.*, p. 238. The same conclusion may be arrived at in other ways.

For the *asymptotic* formula, naturally, it is indifferent which substitution we adopt. But, for purposes of *verification within the limits of calculation*, it is by no means indifferent, for the term in $\log n$ is by no means of negligible importance; and it will be found that is makes a vital difference in the plausibility of the results. Bearing these considerations in mind, Shah and Wilson worked, not with the formula (4. 11), but with the modified formula

$$N_2(n) \backsim \varrho(n) = 2\,C_2 \frac{n}{(\log n)^2 - 2 \log n} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right).$$

Failure to make allowances of this kind has been responsible for a good deal of misapprehension in the past. Thus (as is pointed out by Shah and Wilson[1]) Sylvester's erroneous formula gives, for values of n within the limits of Table I, decidedly *better* results than those obtained from the *unmodified* formula (4. 11).

There is another point of less importance. The function which presents itself most naturally in our analysis is not

$$f(x) = \sum \log \varpi\, x^{\varpi}$$

but

$$g(x) = \sum \Lambda(n)\, x^n = \sum_{\varpi,\, l} \log \varpi\, x^{\varpi^l}.$$

The corresponding numerical functions are not $\nu_2(n)$ and $N_2(n)$, but

$$g_2(n) = \sum_{m+m'=n} \Lambda(m)\,\Lambda(m'),\quad Q_2(n) = \sum_{\varpi^l + \varpi'^{l'} = n} 1$$

(so that $Q_2(n)$ is the number of decompositions of n *into two primes or two powers of primes*). Here again, $N_2(n)$ and $Q_2(n)$ are asymptotically equivalent; the difference between them is indeed of lower order than errors which we are neglecting in any case; but there is something to be said for taking the latter as the basis for comparison, when (as is inevitable) the values of n are not very large.

In the table the decompositions into primes, and powers of primes, are reckoned separately; but it is the total which is compared with $\varrho(n)$. The value of the constant $2\,C_2$ is $1\,.\,3203$. It will be seen that the correspondence between the calculated and actual values is excellent.

[1] *l. c.*, p. 242.

Table I.

n	$Q_2(n)$	$\rho(n)$	$Q_2(n):\rho(n)$
$30 = 2 . 3 . 5$	$6 + 4 = 10$	22	0.45
$32 = 2^5$	$4 + 7 = 11$	8	1.38
$34 = 2 . 17$	$7 + 6 = 13$	9	1.44
$36 = 2^2 . 3^2$	$8 + 8 = 16$	17	0.94
$210 = 2 . 3 . 5 . 7$	$42 + 0 = 42$	49	0.85
$214 = 2 . 107$	$17 + 0 = 17$	16	1.07
$216 = 2^3 . 3^3$	$28 + 0 = 28$	32	0.88
$256 = 2^8$	$16 + 3 = 19$	17	1.10
$2,048 = 2^{11}$	$50 + 17 = 67$	63	1.06
$2,250 = 2 . 3^2 . 5^3$	$174 + 26 = 200$	179	1.11
$2,304 = 2^8 . 3^2$	$134 + 8 = 142$	136	1.04
$2,306 = 2 . 1153$	$67 + 20 = 87$	69	1.26
$2,310 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11$	$228 + 16 = 244$	244	1.00
$3,888 = 2^4 . 3^5$	$186 + 24 = 210$	197	1.06
$3,898 = 2 . 1949$	$99 + 6 = 105$	99	1.06
$3,990 = 2 . 3 . 5 . 7 . 19$	$328 + 20 = 348$	342	1.02
$4,096 = 2^{12}$	$104 + 5 = 109$	102	1.06
$4,996 = 2^2 . 1249$	$124 + 16 = 140$	119	1.18
$4,998 = 2 . 3 . 7^2 . 17$	$228 + 20 = 308$	305	1.01
$5,000 = 2^3 . 5^4$	$150 + 26 = 176$	157	1.12
$8,190 = 2 . 3^2 . 5 . 7 . 13$	$578 + 26 = 604$	597	1.01
$8,192 = 2^{13}$	$150 + 32 = 182$	171	1.06
$8,194 = 2 . 17 . 241$	$192 + 10 = 202$	219	0.92
$10,008 = 2^3 . 3^2 . 139$	$388 + 30 = 418$	396	1.06
$10,010 = 2 . 5 . 7 . 11 . 13$	$384 + 36 = 420$	384	1.09
$10,014 = 2 . 3 . 1669$	$408 + 8 = 416$	396	1.05
$30,030 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13$	$1,800 + 54 = 1854$	1795	1.03
$36,960 = 2^5 . 3 . 5 . 7 . 11$	$1,956 + 38 = 1994$	1937	1.03
$39,270 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 17$	$2,152 + 36 = 2188$	2213	0.99
$41,580 = 2^2 . 3^3 . 5 . 7 . 11$	$2,140 + 44 = 2184$	2125	1.03
$50,026 = 2 . 25013$	$702 + 8 = 710$	692	1.03
$50,144 = 2^5 . 1567$	$607 + 32 = 706$	694	1.02
$170,166 = 2 . 3 . 79 . 359$	$3,734 + 46 = 3780$	3762	1.00
$170,170 = 2 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17$	$3,784 + 8 = 3792$	3841	0.99
$170,172 = 2^2 . 3^2 . 29 . 163$	$3,732 + 48 = 3780$	3866	0.98

5. Other problems.

5. 1. This last section is frankly conjectural, and is not to be judged by the same standards as §§ 1—3.

The problems to which we have applied our method may be divided roughly into three classes. The typical problem of the first class is Waring's Problem. Our solution of this problem is not yet as conclusive as we should desire, and we have not exhausted the possibilities of our method, even when allowance is made for still unpublished work; we cannot at present prove, for example, that every large number is the sum of 7 cubes or 16 biquadrates. But our proofs, so far as they go, are complete.

The typical problem of the second class is that considered in §§ 1—3. The arguments by which we prove our results are rigorous, but the results depend upon the unproved hypothesis R.

There is a third class of problems, of which Goldbach's Problem is typical. Here we are unable (with or without Hypothesis R) to offer anything approaching to a rigorous proof. What our method yields is a *formula*, and one which seems to stand the test of comparison with the facts. In this concluding section we propose to state a number of further formulae of the same kind. Our apology for doing so must be (1) that no similar formulae have been suggested before, and that the process by which they are deduced has at any rate a certain algebraical interest, and (2) that it seems to us very desirable that (in default of proof) the formulae should be checked, and that we hope that some of the many mathematicians interested in the computative side of the theory of numbers may find them worthy of their attention.

Conjugate problems: the problem of prime-pairs.

5. 2. The problems to which our method is applicable group themselves in pairs in an interesting manner which will be most easily understood by an example.

In Goldbach's Problem we have to study the integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int (f(x))^2 \frac{dx}{x^{n+1}},$$

where

$$f(x) = \sum \log \varpi\, x^{\varpi},\ x = Re^{i\varphi} = e^{-\frac{1}{n}+i\varphi},$$

or

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi})f(Re^{i\psi})\,e^{1-ni\psi}\,d\psi. \tag{5. 21}$$

The formal transformations of this integral to which we are led may be stated shortly as follows. We divide up the range of integration into a large number of pieces by means of the Farey arcs $\xi_{p,q}$, ψ varying over the interval $\left(\frac{2p\pi}{q}-\theta'_{p,q}, \frac{2p\pi}{q}+\theta_{p,q}\right)$ when x varies over $\xi_{p,q}$. We then replace $f(x)$ by the appropriate approximation

$$\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{1}{\log\left(\frac{e_q(p)}{x}\right)}=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{1}{\frac{1}{n}-i\left(\psi-\frac{2p\pi}{q}\right)},$$

$\psi-\frac{2p\pi}{q}$ by u, and the integral

$$e_q(-np)\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}}\frac{e^{1-niu}}{\left(\frac{1}{n}-iu\right)^2}\,du \tag{5. 22}$$

by

$$n\,e_q(-np)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{1-iw}}{(1-iw)^2}\,dw=2\pi n e_q(-np). \tag{5. 23}$$

We are thus led to the singular series S_2.

Now suppose that, instead of the integral (5. 21), we consider the integral

$$J(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi})f(Re^{-i\psi})\,e^{ki\psi}\,d\psi, \tag{5. 24}$$

where now k is a *fixed* positive integer. Instead of (5. 22), we have now

$$e_q(kp)\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}}\frac{e^{kiu}}{\left(\frac{1}{n}-iu\right)\left(\frac{1}{n}+iu\right)}\,du \sim e_q(kp)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\frac{1}{n^2}+u^2}=\pi n\, e_q(kp).$$

We are thus led to suppose that

(5. 25) $$J(R) \sim \frac{1}{2} n \sum \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^2 e_q(kp)$$

when $R = e^{-\frac{1}{n}}$, $n \to \infty$.

The series here (which we call for the moment S'_2) is the singular series S_2 with $-k$ in the place of n. On the other hand

$$J(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum \log \varpi \, R^{\varpi} e^{\varpi i \psi} \, . \sum \log \varpi \, R^{\varpi} e^{-\varpi i \psi} \, . \, e^{k i \psi} \, d\psi = R^k \sum a_{\varpi} R^{2\varpi},$$

where

$$a_{\varpi} = \log \varpi \log (\varpi + k)$$

if both ϖ *and* $\varpi + k$ *are prime,* and $a_{\varpi} = 0$ otherwise. Hence we obtain

$$\sum a_{\varpi} R^{2\varpi} \sim \frac{1}{1 - R^2} S'_2 .$$

Here $R = e^{-\frac{1}{n}}$, but the result is easily extended to the case of continuous approach to the limit 1, and we deduce[1]

(5. 26) $$\sum_{\varpi < n} a_{\varpi} \sim n S'_2 .$$

And from this it would be an easy deduction that the number of prime pairs differing by k, and less than a large number n, is asymptotically equivalent to

$$\frac{n}{(\log n)^2} S'_2 .$$

We are thus led to the following

Conjecture B. *There are infinitely many prime pairs*

$$\varpi, \varpi' = \varpi + k,$$

for every even k. *If* $P_k(n)$ *is the number of pairs less than* n, *then*

$$P_k(n) \sim 2 C_2 \frac{n}{(\log n)^2} \prod \left(\frac{\mathfrak{p} - 1}{\mathfrak{p} - 2}\right),$$

where C_2 *is the constant of* § 4 *and* $\mathfrak{p}$ *is an odd prime divisor of* k.

[1] We appeal again here to the Tauberian theorem referred to at the end of 4. 2 (f. n. 1). This time, of course, there is no question of an alternative argument.

[2] Note that $S'_2 = 0$ if k is odd, as it should be.

It will be observed that the analysis connected with Conjectures A and B, which deal respectively with the equations

$$n = \varpi + \varpi', \quad \varpi' = \varpi + k,$$

is substantially the same. It is pairs of problems connected in this manner that we call *conjugate* problems.

Numerical verifications.

5. 31. For $k = 2, 4, 6$ we obtain

(5. 311) $$P_2(n) \sim \frac{2C_2 n}{(\log n)^2},$$

(5. 312) $$P_4(n) \sim \frac{2C_2 n}{(\log n)^2},$$

(5. 313) $$P_6(n) \sim \frac{4C_2 n}{(\log n)^2},$$

Thus there should be approximately equal numbers of prime-pairs differing by 2 and by 4, but about twice as many differing by 6. The actual numbers of pairs, below the limits

100, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000

are

9	24	35	61	81	103	125
9	26	41	63	86	107	121
16	47	73	125	168	201	241

The correspondence is as accurate as could be desired.

5. 32. The first formula (5. 311) has been verified much more systematically. A little caution has to be exercised in undertaking such a verification. The formula (5. 26) is equivalent, when $k = 2$, to

(5. 321) $$\sum_{m<n} \Lambda(m)\Lambda(m+2) \sim 2C_2 n;$$

and, when we pass from this formula to one for the number of prime-pairs, the formula which arises most naturally is not (5. 311) but[1]

[1] This formula follows from (5. 321) in exactly the same way that

$$\pi(x) \sim Li\, x$$

follows from

$$\sum_{m<x} \Lambda(m) \sim x.$$

(5. 322) $$P_2(n) \sim 2\,C_2 \int^n \frac{dx}{(\log x)^2};$$

indeed it is not unreasonable to expect this approximation to be a really good one, and much better than the formulae of 4. 4. The formula (5. 322) is naturally equivalent to (5. 311). But

$$\int^n \frac{dx}{(\log x)^2} = \frac{n}{(\log n)^2}\left(1 + \frac{2\,!}{\log n} + \frac{3\,!}{(\log n)^2} + \cdots\right),^{1}$$

and the second factor on the right hand side is (for such values of n as we have to consider) far from negligible. It is for this reason that Brun, when he attempted to deduce a value of the constant in (5. 311) from the statistical results, was led to a value seriously in error.

We therefore take the formula (5. 322) as our basis for comparison, choosing the lower limit to be 2. For our statistics as to the actual number of prime-pairs we are indebted to (*a*) a count up to 100,000 made by Glaisher in 1878 [2] and (*b*) a much more extensive count made for us recently by Mrs. G. A. Streatfeild. The results obtained by Mrs. Streatfeild are as follows.

n	$P_2(n)$	$2\,C_2 \int_2^n \frac{dx}{(\log x)^2}$	Ratio
100000	1224	1246.3	1.018
200000	2159	2179.5	1.009
300000	2992	3035.4	1.015
400000	3801	3846.1	1.012
500000	4562	4625.6	1.014
600000	5328	5381.5	1.010
700000	6058	6118.7	1 010
800000	6763	6840.2	1.011
900000	7469	7548.6	1.011
1000000	8164	8245.6	1.010

[1] The series is of course divergent, and must be regarded as closed after a finite number of terms, with an error term of lower order than the last term retained.

[2] J. W. L. Glaisher, 'An enumeration of prime-pairs', *Messenger of Mathematics*, vol. 8 (1878), pp. 28—33. Glaisher counts (1, 3) as a pair, so that his figure exceeds ours by 1.

5.33. Similar reasoning leads us to the following more general results.

Conjecture C. *If a, b are fixed positive integers and $(a, b) = 1$, and $N(n)$ is the number of representations of n in the form*

$$n = a\varpi + b\varpi',$$

then

$$N(n) = o\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right)$$

unless $(n, a) = 1$, $(n, b) = 1$, and one and only one of n, a, b is even.[1] *But if these conditions are satisfied then*

$$N(n) \sim \frac{2C_2}{ab}\frac{n}{(\log n)^2}\prod\left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right),$$

where C_2 is the constant of § 4, and the product extends over all odd primes $\mathfrak{p}$ which divide n, a, or b.

Conjecture D. *If $(a, b) = 1$ and $P(n)$ is the number of pairs of solutions of*

$$a\varpi' - b\varpi = k$$

such that $\varpi' < n$, then

$$P(n) = o\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right)$$

unless $(k, a) = 1$, $(k, b) = 1$, and just one of k, a, b is even. But if these conditions are satisfied then

$$P(n) \sim \frac{2C_2}{a}\frac{n}{(\log n)^2}\prod\left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right),$$

where $\mathfrak{p}$ is an odd prime factor of k, a, or b.

It should be clear that the theorems proved in §§ 1—3 must be capable of a similar generalisation. Thus we might investigate the number of representations of n in the form

$$n = a\varpi + b\varpi' + c\varpi'';$$

and here proof would be possible, though only with the assumption of hypothesis R. We have not performed the actual calculations.

[1] This is trivial. If n and a have a common factor, it divides $b\varpi'$, and must therefore be ϖ', which is thus restricted to a finite number of values. If n, a, b are all odd, ϖ or ϖ' must be 2.

Primes of the forms m^2+1, am^2+bm+c.

5. 41. Of the four problems mentioned by Landau in his Cambridge address, two were Goldbach's problem and the problem of the prime-pairs. The third was that of *the existence of an infinity of primes of the form m^2+1.*[1]

Our method is applicable to this problem also. We have now to consider the integral

$$J(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi})\,\vartheta(Re^{-i\psi})\,e^{-i\psi}\,d\psi,$$

where $f(x)$ is the same function as before and

$$\vartheta(x)=\sum_{m=1}^{\infty} x^{m^2}.$$

The approximation for $\vartheta(\bar{x})=\vartheta(Re^{-i\psi})$ on $\xi_{p,q}$ is

$$\vartheta(Re^{-i\psi})\sim\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\bar{S}_{p,q}}{q}\left(\frac{1}{n}+i\left(\psi-\frac{2p\pi}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{2}},$$

where

$$S_{p,q}=\sum_{h=1}^{q} e_q(h^2p)$$

and $\bar{S}_{p,q}$ is the conjugate of $S_{p,q}$; and we find, as an approximation for $J(R)$,

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\sum_{p,q}\frac{\mu(q)}{q\,\varphi(q)}\bar{S}_{p,q}\,e_q(-p)\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}}\frac{e^{-iu}\,du}{\left(\frac{1}{n}-iu\right)\sqrt{\frac{1}{n}+iu}}.$$

We replace the ntegral here by

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\left(\frac{1}{n}-iu\right)\sqrt{\frac{1}{n}+iu}}=\pi\sqrt{2n};$$

[1] The fourth was that of the existence of a prime between n^2 and $(n+1)^2$ for every $n>0$. The problem of primes am^2+bm+c must not be confused with the much simpler (though still difficult) problem of primes included in the definite quadratic form $ax^2+bxy+cy^2$ in two independent variables. This problem, of course, was solved in the classical researches of DE LA VALLÉE POUSSIN. Our method naturally leads to de la Vallée Poussin's results, and the formal verification of them in this manner is not without interest. Here, however, our method is plainly not the right one, and could lead at best to a proof encumbered with an unnecessary hypothesis and far more difficult than the accepted proof.

and we are led to the formula

$$(5.411)\qquad J(R) \sim \frac{1}{4} \sqrt{2\pi n}\, S,$$

where S is the singular series

$$(5.412)\qquad S = \sum_{p,q} \frac{\mu(q)}{q\,\varphi(q)} \bar{S}_{p,q}\, e_q(-p).$$

Repeating the arguments of § 5. 2, we conclude that *the number $P(n)$ of primes of the form m^2+1 and less than n is given asymptotically by*

$$(5.413)\qquad P(n) \sim \frac{\sqrt{n}}{\log n} S.$$

5. 42. The singular series (5. 412) may be summed by the method of § 3. 2. Writing

$$S = \sum A_q = 1 + A_2 + A_3 + \cdots,$$

there is no difficulty in proving that $A_{qq'} = A_q A_{q'}$ if $(q, q') = 1$. Hence we write [1]

$$S = \prod \chi_{\varpi},$$

where

$$\chi_{\varpi} = 1 + A_{\varpi} + A_{\varpi^2} + \cdots = 1 + A_{\varpi}.$$

If $\varpi = 2$, $A_{\varpi} = 0$, $\chi_{\varpi} = 1$. If $\varpi > 2$, [2]

$$S_{p,\varpi} = \left(\frac{p}{\varpi}\right) i^{\frac{1}{4}(\varpi-1)^2} \sqrt{\varpi},\ \bar{S}_{p,\varpi} = \left(\frac{p}{\varpi}\right) i^{-\frac{1}{4}(\varpi-1)^2} \sqrt{\varpi},$$

and

$$A_{\varpi} = -\frac{1}{(\varpi-1)\sqrt{\varpi}} i^{-\frac{1}{4}(\varpi-1)^2} \sum_{p=1}^{\varpi-1} \left(\frac{p}{\varpi}\right) e_{\varpi}(-p)$$

$$= -\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\varpi-1)}}{\varpi-1} = -\frac{1}{\varpi-1}\left(\frac{-1}{\varpi}\right).$$

[1] Even this is a formal process, for (5. 412) is not absolutely convergent.

[2] See Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, ed. 4 (1894), pp. 293 *et seq.*

Thus finally we are led to

Conjecture E. *There are infinitely many primes of the form m^2+1. The number $P(n)$ of such primes less than n is given asymptotically by*

$$P(n) \sim C\frac{\sqrt{n}}{\log n},$$

where

$$C = \prod_{\varpi=3}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\varpi-1}\left(\frac{-1}{\varpi}\right)\right).$$

5.43. Generalising the analysis of §§ 5.41, 5.42, we arrive at

Conjecture F. *Suppose that a, b, c are integers and a is positive; that $(a, b, c)=1$; that $a+b$ and c are not both even; and that $D=b^2-4ac$ is not a square. Then there are infinitely many primes of the form am^2+bm+c. The number $P(n)$ of such primes less than n is given asymptotically by*

$$P(n) \sim \frac{\varepsilon C}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{n}}{\log n}\prod\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}\right),$$

where $\mathfrak{p}$ is a common odd prime divisor of a and b, ε is 1 if $a+b$ is odd and 2 if $a+b$ is even, and

(5.4321) $$C = \prod_{\varpi>3,\ \varpi \nmid a}\left(1-\frac{1}{\varpi-1}\left(\frac{D}{\varpi}\right)\right).$$

It is instructive here to observe the genesis of the exceptional cases. If $(a, b, c)=d>1$, there can obviously be at most one prime of the form required. In this case χ_ϖ vanishes for every ϖ for which $\varpi|d$. If $a+b$ and c are both even, am^2+bm+c is always even: in this case χ_2 vanishes. If $D=k^2$, then

$$4a(am^2+bm+c)=(2am+b)^2-k^2,$$

and

$$4a\varpi=(2am+b)^2-k^2$$

involves $2am+b\pm k\,|\,4a$, which can be satisfied by at most a finite number of values of m. In this case no factor χ_ϖ vanishes, but the product (5.4321) diverges to zero.

5.44. The conjugate problem is that of the expression of a number n in the form

(5.441) $$n = am^2+bm+\varpi.$$

Here we are led to

Conjecture G. *Suppose that a and b are integers, and $a > 0$, and let $N(n)$ be the number of representations of n in the form $am^2 + bm + \varpi$. Then if n, a, b have a common factor, or if n and $a+b$ are both even, or if $b^2 + 4an$ is a square, then*

$$N(n) = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right). \tag{5.442}$$

In all other cases

$$N(n) \sim \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{n}}{\log n} \prod \left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}\right) \prod_{\varpi \geqq 3,\, \varpi \nmid a} \left(1 - \frac{1}{\varpi - 1}\left(\frac{b^2 + 4an}{\varpi}\right)\right), \tag{5.443}$$

where $\mathfrak{p}$ is a common odd prime divisor of a and b, and ε is 1 if $a+b$ is odd and 2 if $a+b$ is even.

The following are particularly interesting special cases of this proposition.

Conjecture H. *Every large number n is either a square or the sum of a prime and a square. The number $N(n)$ of representations is given asymptotically by*

$$N(n) \sim \frac{\sqrt{n}}{\log n} \prod_{\varpi = 3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\varpi - 1}\left(\frac{n}{\varpi}\right)\right). \tag{5.444}$$

There does not seem to be anything in mathematical literature corresponding to this conjecture: probably because the idea that *every* number is a square, or the sum of a prime and a square, is refuted (even if 1 is counted as a prime) by such immediate examples as 34 and 58. But the problem of the representation of an *odd* number in the form $\varpi + 2m^2$ has received some attention; and it has been verified that the only odd numbers less than 9000, and not of the form desired, are 5777 and 5993.[1]

Conjecture I. *Every large odd number n is the sum of a prime and the double of a square. The number $N(n)$ of representations is given asymptotically by*

$$N(n) \sim \frac{\sqrt{2n}}{\log n} \prod_{\varpi = 3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\varpi - 1}\left(\frac{2n}{\varpi}\right)\right). \tag{5.445}$$

[1] By STERN and his pupils in 1856. See Dickson's *History* (referred to on p. 32) p. 424. The tables constructed by Stern were preserved in the library of Hurwitz, and have been very kindly placed at our disposal by Mr. G. Pólya. These manuscripts also contain a table of decompositions of primes $q = 4m + 3$ into sums $q = p + 2p'$, where p and p' are primes of the form $4m + 1$, extending as far as $q = 20983$. The conjecture that such a decomposition is always possible (1 being counted as a prime) was made by Lagrange in 1775 (see Dickson, *l. c.*, p. 424).

5.45 We may equally work out the number of representations of n as the sum of a prime and any number of squares. Thus, for example, we find

Conjecture J. *The numbers of representations of n in the forms*

$$n = \varpi + m_1^2 + m_2^2, \quad n = \varpi + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2,$$

are given asymptotically by the formulae

(5.451) $$N(n) \sim C\pi n \prod_{\mathfrak{p} \equiv 1 \pmod{4}} \left(\frac{(\mathfrak{p}-1)^2}{\mathfrak{p}^2-\mathfrak{p}+1}\right) \prod_{\mathfrak{p} \equiv 3 \pmod{4}} \left(\frac{\mathfrak{p}^2-1}{\mathfrak{p}^2-\mathfrak{p}-1}\right),$$

where

(5.4511) $$C = \sum_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\varpi(\varpi-1)}\left(\frac{-1}{\varpi}\right)\right);$$

and

(5.452) $$N(n) \sim \frac{1}{2} C\pi^2 n^2 \prod \left(\frac{(\mathfrak{p}-1)^2(\mathfrak{p}+1)}{\mathfrak{p}^3-\mathfrak{p}^2+1}\right),$$

where

(5.4521) $$C = \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\varpi^2(\varpi-1)}\right),$$

Here $\mathfrak{p}$ is an odd prime divisor of n, and representations which differ only in the sign or order of the numbers $m_1, m_2, \ldots$ are counted as distinct.

The last pair of formulae should be capable of rigorous proof.

Problems with cubes.

5.5. The corresponding problems with cubes have, so far as we are aware, never been formulated. The problem which suggests itself first is that of the existence of an infinity of primes of the form $m^3 + 2$ or, more generally, $m^3 + k$, where k is any number other than a (positive or negative) cube.

Here again our method may be used, but the algebraical transformations, depending, as obviously they must, on the theory of cubic residuacity, are naturally a little more complex. As there is in any case no question of proof, we content ourselves with stating a few of the results which are suggested.

Conjecture K. *If k is any fixed number other than a (positive or negative) cube, then there are infinitely many primes of the form $m^3 + k$. The number $P(n)$ of such primes less than n is given asymptotically by*

(5.51) $$P(n) \sim \frac{n^{\frac{1}{3}}}{\log n} \prod_{\varpi} \left(1 - \frac{2}{\varpi - 1}(-k)_{\varpi}\right),$$

where

$$\varpi \equiv 1 \pmod{3}, \quad \varpi \nmid k,$$

and $(-k)_{\varpi}$ *is equal to* 1 *or to* $-\frac{1}{2}$ *according as* $-k$ *is or is not a cubic residue of* ϖ.

Conjecture L. *Every large number* n *is either a cube or the sum of a prime and a (positive) cube. The number* $N(n)$ *of representations is given asymptotically by*

$$N(n) \sim \frac{n^{\frac{1}{3}}}{\log n} \prod_{\varpi} \left(1 - \frac{2}{\varpi - 1}(n)_{\varpi}\right),$$

the range of values of ϖ *being defined as in* K.

Conjecture M. *If* k *is any fixed number other than zero, there are infinitely many primes of the form* $l^3 + m^3 + k$, *where* l *and* m *are both positive. The number* $P(n)$ *of such primes less than* n, *every prime being counted multiply according to its number of representations, is given asymptotically by*

$$P(n) \sim \frac{\left(\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\log n} \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{2}{\mathfrak{p}}\right) \prod_{\varpi} (1 + A_{\varpi}),$$

where $\mathfrak{p}$ *and* ϖ *are odd primes of the form* $3r + 1$, $\mathfrak{p} \mid k$, $\varpi \nmid k$, *and*

$$A_{\varpi} = -\frac{A - 2}{\varpi(\varpi - 1)}$$

if $-k$ *is a cubic residue of* ϖ,

$$A_{\varpi} = \frac{\frac{1}{2}A \pm \frac{9}{2}B - 2}{\varpi(\varpi - 1)}$$

in the contrary case. The positive sign is to be chosen if

$$\left(\frac{-k}{\omega}\right)_3 = e^{\frac{2}{3}\pi i} = \varrho,$$

$\omega = a + b\varrho$ *being that complex prime factor of* ϖ *for which* $a \equiv -1$, $b \equiv 0 \pmod{3}$; *the negative in the contrary event. And* A *and* B *are defined by*

$$A = 2a - b, \quad 3B = b, \quad 4\varpi = A^2 + 27B^2.$$

In particular, when $k = 1$, the number of primes $l^3 + m^3 + 1$ is given asymptotically by

$$P(n) \sim \frac{\left(\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\log n} \prod_{\varpi} \left(1 - \frac{A-2}{\varpi(\varpi-1)}\right),$$

primes susceptible of multiple representation being counted multiply.

Conjecture N. *There are infinitely many primes of the form $k^3 + l^3 + m^3$, where k, l, m are all positive. The number $P(n)$ of such primes less than n, primes susceptible of multiple representation being counted multiply, is given asymptotically by*

$$P(n) \sim \left(\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right)^3 \frac{n}{\log n} \prod_{\varpi} \left(1 - \frac{A}{\varpi^2}\right),$$

where ϖ is a prime of the form $3m+1$, and A has the meaning explained under M.

Triplets and other sequences of primes.

5. 61. It is plain that the numbers $\varpi, \varpi + 2, \varpi + 4$ cannot all be prime, for at least one of the three is divisible by 3. But it is possible that $\varpi, \varpi + 2, \varpi + 6$ or $\varpi, \varpi + 4, \varpi + 6$ should all be prime. It is natural to enquire whether our method is applicable in principle to the investigation of the distribution of triplets and longer sequences.

The general case raises very interesting questions as to the density of the distribution of primes, and it will be convenient to begin by discussing them.

We write

$$\varrho(x) = \overline{\lim_{n \to \infty}} (\pi(n + x) - \pi(n)), \tag{5. 611}$$

so that $\varrho(x) = \varrho([x])$ is the greatest number of primes that occurs indefinitely often in a sequence $n+1, n+2, \ldots, n+[x]$ of $[x]$ consecutive integers. The existence of an infinity of primes shows that $\varrho(x) \geqq 1$ for $x \geqq 1$, and nothing more than this is known; but of course Conjecture B involves $\varrho(x) \geqq 2$ for $x \geqq 3$. It is plain that the determination of a lower bound for $\varrho(x)$ is a problem of exceptional depth.

The problem of an upper bound has greater possibilities. We proceed to prove, by a simple extension of an argument due to Legendre[1],

[1] See Landau, p. 67.

Theorem G. *If* $\varepsilon > 0$ *then*

$$\varrho(x) < (1+\varepsilon)\, e^{-C} \frac{x}{\log\log x} \quad (x > x_0 = x_0(\varepsilon)),$$

where C is Euler's constant. More generally, if $N(x, n)$ is the number of the integers $n+1, n+2, \ldots, n+[x]$ that are not divisible by any prime less than or equal to $\log x$, then

$$\sigma(x) = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, N(x, n) < (1+\varepsilon)\, e^{-C} \frac{x}{\log\log x} \quad (x > x_0(\varepsilon)).$$

It is well-known that the number of the integers $1, 2, \ldots, [y]$, not divisible by any one of the primes $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, is

$$[y] - \sum \left[\frac{y}{p_r}\right] + \sum \left[\frac{y}{p_r\, p_s}\right] - \cdots$$

where the i-th summation is taken over all combinations of the ν primes i at a time. Since the number of terms in the total summation is 2^ν, this is

$$y - \sum \frac{y}{p_r} + \sum \frac{y}{p_r\, p_s} - \cdots + O(2^\nu) = y\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_\nu}\right) + O(2^\nu).$$

We now take $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ to be the first ν primes, write $n+x$ and n successively for y, subtract, and take the upper limit of the difference as $n \to \infty$. We obtain

$$\sigma(x) \leqq x \prod_{r=1}^{\nu} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) + O(2^\nu).$$

But

$$\prod_{p \leqq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\log y}$$

as $y \to \infty$.[1] If we take $y = \log x$, and p_ν to be the greatest prime not less than y, we have

$$\nu < p_\nu \leqq \log x, \quad 2^\nu = o\left(\frac{x}{\log\log x}\right),$$

$$\sigma(x) < (1+\varepsilon)\, e^{-C} \frac{x}{\log\log x} \quad (x > x_0(\varepsilon)),$$

the desired result.

---

[1] Landau, p. 140.

An examination of the primes less than 200 suggests forcibly that

$$\varrho(x) \leqq \pi(x) \qquad (x \geqq 2).$$

But although the methods we are about to explain lead to striking conjectural lower bounds, they throw no light on the problem of an upper bound. We have not succeeded in proving, even with our additional hypothesis, more than the »elementary» Theorem G. We pass on therefore to our main topic.

5. 62. We consider now the problem of the occurrence of groups of primes of the form

$$n,\ n+a_1,\ n+a_2,\ \ldots,\ n+a_m,$$

where $a_1, a_2, \ldots, a_m$ are distinct positive integers. We write for brevity

$$f_m(x) = \sum_{\varpi=2}^{\infty} \Lambda(\varpi)\, \Lambda(\varpi+a_1) \ldots \Lambda(\varpi+a_m)\, x^{\varpi}.$$

Then, if $(h, k) = 1$, we have

$$(5.\ 621) \qquad r^{a_m} f_m(r^2 e_k(h)) = \sum \Lambda(\varpi)\, \Lambda(\varpi+a_1) \ldots \Lambda(\varpi+a_m) r^{2\varpi+a_m} e_k(\varpi h)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum \Lambda(\varpi) \ldots \Lambda(\varpi+a_{m-1})\, r^{\varpi} e^{\varpi i\varphi} e_k(\varpi h) \,.\, \sum \Lambda(\varpi)\, r^{\varpi} e^{-\varpi i \varphi} \,.\, e^{a_m i\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{m-1}\left(r\, e^{i\left(\varphi+\frac{2h\pi}{k}\right)}\right) f(re^{-i\varphi})\, e^{a_m i\varphi}\, d\varphi.$$

If $\varphi = \dfrac{2p\pi}{q} + \theta$, $r \to 1$, $\theta \to 0$, and θ is sufficiently small in comparison with $1-r$, then

$$f(re^{-i\varphi}) \sim \frac{\chi(q)}{1-re^{-i\theta}},$$

where

$$\chi(q) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}.$$

Let us assume for the moment that

$$f_{m-1}(re^{i\psi}) \sim g_{m-1}\left(\frac{p'}{q'}\right) \frac{1}{1-re^{i\theta}}$$

if $\psi = \dfrac{p'}{q'} + \theta$, $r \to 1$, and θ is sufficiently small. Then our method leads us to write

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{m-1}\left(r e^{i\left(\varphi+\frac{2h\pi}{k}\right)}\right) f(re^{-i\varphi})\, e^{a_m i\varphi}\, d\varphi$$

$$\infty \sum_{p\, q} \chi(q)\, g_{m-1}\left(\frac{p}{q}+\frac{h}{k}\right) e\left(\frac{a_m p}{q}\right) \frac{1}{2\pi}\int_{\xi_{p,q}} \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}$$

$$\infty \frac{1}{1-r^2}\sum_{p,q} \chi(q)\, g_{m-1}\left(\frac{p}{q}+\frac{h}{k}\right) e\left(\frac{a_m p}{q}\right),$$

on replacing the integral by one extended from $-\pi$ to π. Thus (5. 621) suggests that

(5. 622) $$f_m(r) \infty \frac{g_m(0)}{1-r},$$

where g_m is determined by the recurrence formula

(5. 623) $$g_m\left(\frac{h}{k}\right) = \sum_{p,q} \chi(q)\, g_{m-1}\left(\frac{p}{q}+\frac{h}{k}\right) e\left(\frac{a_m p}{q}\right)$$

and

(5. 624) $$g_0\left(\frac{h}{k}\right) = \chi(k).$$

From this recurrence formula we obtain without difficulty

(5. 625) $$g_m(0) = S_m = \sum_{p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m} \prod_{r=1}^{m} \chi(q_r)\, \chi(Q)\, e\left(\sum_{r=1}^{m} \frac{a_r p_r}{q_r}\right),$$

where q_r runs through all positive integral values, p_r through all positive values less than and prime to q_r, and Q is the number such that

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \cdots + \frac{p_m}{q_m}, \qquad (P, Q) = 1.$$

If we sum with respect to the p's, we obtain a result which we shall write in the form

(5. 6251) $$S_m = \sum_{q_1, q_2, \ldots, q_m} A(q_1, q_2, \ldots, q_m).$$

We shall see presently that the multiple series (5. 6251) is absolutely convergent.

For greater precision of statement we now introduce a definite hypothesis.

Hypothesis X. *If* $m \geqq 0$, *and* $r \to 1$, *then*

$$f_m(r) \sim \frac{S_m}{1-r}, \tag{5. 626}$$

where S_m *is given by* (5. 625) *and* (5. 6251).

Our deductions from this hypothesis will be made rigorously, and we shall describe the results as Theorems X 1, X 2, ...

5. 63. From (5. 626) it follows, by the argument of 4. 2, that

$$P(x; 0, a_1, a_2, \ldots, a_m) \sim S_m \frac{x}{(\log x)^m}, \tag{5. 631}$$

as $x \to \infty$, *where the left-hand side denotes the number of groups of* $m+1$ *primes* $n, n+a_1, \ldots, n+a_m$ *of which all the members are less than* x.

We proceed to evaluate S_m. In the first place we observe that $A(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ is zero if any q has a square factor. Next we have

$$A(q_1 q'_1, q_2 q'_2, \ldots, q_m q'_m) = A(q_1, q_2, \ldots q_m)\, A(q'_1, q'_2, \ldots, q'_m), \tag{5. 632}$$

provided $(q_r, q'_s) = 1$ for all values of r and s. For, if we write

$$\frac{p_r}{q_r} + \frac{p'_r}{q'_r} = \frac{p_r q'_r + p'_r q_r}{q_r q'_r} = \frac{\mathfrak{p}_r}{\mathfrak{q}_r},$$

so that $\mathfrak{q}_r = q_r q'_r$, and suppose that p_r and p'_r run through complete sets of residues prime to q_r (or q'_r) and incongruent to modulus q_r (or q'_r), then $\mathfrak{p}_r$ runs through a similar set of residues for modulus $\mathfrak{q}_r$. Also $(Q, Q') = 1$ and so $(PQ' + P'Q, QQ') = 1$. Hence, since

$$\sum \frac{\mathfrak{p}_r}{\mathfrak{q}_r} = \frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'} = \frac{PQ' + P'Q}{QQ'},$$

the Q associated with $\sum \frac{\mathfrak{p}_r}{\mathfrak{q}_r}$ is QQ'. Since $\chi(qq') = \chi(q)\chi(q')$ if $(q, q') = 1$, (5. 632) follows at once.

Assuming then the absolute convergence, more conveniently established later, of the series and the product, we have

$$S_m = \sum A(q_1, q_2, \ldots, q_m) = \Pi X(\varpi) = \Pi X_m(\varpi) = \Pi X_m(\varpi; a_1, \ldots, a_m); \tag{5. 633}$$

where

$$(5.634)\qquad X(\varpi) = 1 + \sum\nolimits_1 A(\varpi, 1, 1, \ldots, 1) + \sum\nolimits_2 A(\varpi, \varpi, 1, \ldots, 1) + \cdots$$
$$+ \sum\nolimits_r A(\varpi, \varpi, \varpi, \ldots 1) + \cdots + A(\varpi, \varpi, \varpi, \ldots, \varpi),$$

and where $\sum_r$ is extended over all A's in which r of the m places are filled by ϖ's and the remaining $m-r$ by 1's.

Our next step is to evaluate the A's corresponding to a prime ϖ. Writing $x = \chi(\varpi) = -\frac{1}{\varpi - 1}$, we have first, when only one place, say the first, is filled by a ϖ,

$$q_1 = \varpi,\ q_r = 1\,(r > 1),\ p_r = 0\,(r > 1),\ Q = \varpi,$$

and so

$$(5.635)\qquad A(\varpi, 1, 1, \ldots, 1) = (\chi(\varpi))^2 \sum_{(p,\varpi)=1} e_\varpi(a_1 p) = x^2 c_\varpi(a_1).$$

When $r > 1$ places, say the first r, are filled by ϖ's, we have similarly

$$A(\varpi, \varpi, \varpi, \ldots, 1) = x^r \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_r} e_\varpi(a_1 p_1 + \cdots + a_r p_r)\, \chi(Q),$$

where the p's run through the numbers $1, 2, \ldots, \varpi - 1$, and Q is determined by

$$(P, Q) = 1, \quad \frac{P}{Q} = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_r}{\varpi}.$$

Clearly

$$Q = 1 \left(\sum p \equiv 0 \pmod{\varpi}\right),\ Q = \varpi \left(\sum p \not\equiv 0 \pmod{\varpi}\right).$$

Hence

$$(5.636)\qquad A(\varpi, \varpi, \varpi, \ldots, 1) = x^{r+1}\Bigg[\sum_{p_1, \ldots, p_r} e_\varpi\left(\sum_{s=1}^{r} a_s p_s\right) +$$
$$+ \frac{\chi(1) - \chi(\varpi)}{\chi(\varpi)} \sum_{p_1 + p_2 + \cdots \equiv 0} e_\varpi\left(\sum_{s=1}^{r} a_s p_s\right)\Bigg]$$

$$= x^{r+1}\left[\prod_{s=1}^{r} c_\varpi(a_s) - \varpi \sum_{p_1 + p_2 + \cdots \equiv 0} e_\varpi\left(\sum a_s p_s\right)\right].$$

Now

$$B = \sum_{p_1+p_2+\cdots=0} e_\varpi\left(\sum a_s p_s\right)$$

is evidently a function of $\varpi, a_1, \ldots, a_r$ which is unaltered by a permutation of $a_1, \ldots, a_r$. We denote it (dropping the reference to ϖ) by $B_m(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, the suffix m being used to recall that $a_1, a_2, \ldots, a_r$, or rather the a's that replace them in the general case, are selected from $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Then

$$(5.637)\quad B_m(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \left(\sum_{p_2, p_3, \ldots, p_r} - \sum_{p_2+p_3+\cdots=0}\right) e_\varpi(a_2p_2+\cdots+a_rp_r-a_1(p_2+\cdots+p_r))$$

$$= \sum_{p_2, \ldots, p_r} e_\varpi((a_2-a_1)p_2+\cdots+(a_r-a_1)p_r) - \sum_{p_3, \ldots, p_r} e_\varpi((a_3-a_2)p_3+\cdots+(a_r-a_2)p_r)+\cdots$$

$$= \prod_{s=2}^{r} c_\varpi(a_s-a_1) - \prod_{s=3}^{r} c_\varpi(a_s-a_2)+\cdots$$

Here we are supposing $r \geqq 2$. We shall adopt the convention $B_m(a_s) = 0$.

5.64. We now digress for a moment to establish the absolute convergence of our product and multiple series. We have

$$(5.641)\qquad c_\varpi(k) = \varpi - 1 \quad (\varpi \mid k),\quad c_\varpi(k) = -1 \quad (\varpi \nmid k).$$

Hence, when ϖ is large, every c_ϖ occurring in (5.635), (5.636), or (5.637) is equal to -1.[1] It follows that

$$|A(\varpi, \varpi, \varpi, \ldots, 1)| < Kx^2 < \frac{K}{\varpi^2} \quad (r \geqq 1);$$

and so, since $A(q_1, q_2, \ldots)$ is the product of A's each involving only a single prime ϖ, that the multiple series and the product in (5.633) are absolutely convergent.

5.65. Returning now to $X(\varpi)$, we have, for $r \geqq 1$,

$$A(\varpi, \varpi, \varpi, \ldots 1) = x^{r+1}\left(\prod_{s=1}^{r} c_\varpi(a_s) - \varpi B_m(a_1, a_2, \ldots, a_r)\right),$$

the result being true for $r = 1$ in virtue of (5.635) and our convention as to $B_m(a_s)$. Hence

[1] It is here that we use the condition $a_r \neq a_s$.

$$(5.651)\quad X_m(\varpi) = 1 + \sum_{r=1}^{m} x^{r+1} \prod_{s=1}^{r} c_\varpi(a_s) - \varpi \sum_{r=2}^{m} x^{r+1} \sum\nolimits_r B_m(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

$$= 1 + x\left(\prod_{r=1}^{m}(1 + x c_\varpi(a_r)) - 1\right) - \varpi x \sum_{r=2}^{m} x^r C_{m,r}$$

$$= Y_m - \varpi x Z_m,$$

say, where

$$(5.652)\qquad C_{m,r} = \sum\nolimits_r B_m(a_1, a_2, \ldots, a_r),$$

the summation being taken over all combinations (without reference to order) of $a_1, \ldots, a_m$ taken r at a time.

Now

$$(5.653)\quad Y_{m+1} - (1-x) Y_m = 1 - x - (1-x)^2 + x\prod_{r=1}^{m}(1 + x c_\varpi(a_r))(1 + x c_\varpi(a_{m+1}) - 1 + x)$$

$$= x(1-x) + x^2(1 + c_\varpi(a_{m+1})) \prod_{r=1}^{m}(1 + x c_\varpi(a_r)).$$

Also

$$C_{m+1,r} = C_{m,r} + \sum\nolimits' B(a_{m+1}, a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}) \quad (r \geqq 2).$$

Here $\sum'$ denotes a sum taken over the combinations of $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $r-1$ at a time; and the equation holds even for $r = m+1$ if we interpret $C_{m,m+1}$ as zero. Hence, by (5.637),

$$C_{m+1,r} = C_{m,r} + \sum\nolimits'\left(\prod_{s=1}^{r} c_\varpi(a_s - a_{m+1}) - B_m(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1})\right)$$

$$= C_{m,r} + \sum\nolimits' \prod_{s=1}^{r} c_\varpi(a_s - a_{m+1}) - C_{m,r-1};$$

and therefore

$$(5.654)\quad Z_{m+1} = \sum_{r=2}^{m+1} x^r C_{m+1,r} = Z_m + \sum_{r=2}^{m+1} x^r \sum\nolimits' \prod_{s=1}^{r-1} c_\varpi(a_s - a_{m+1}) - \sum_{r=2}^{m+1} x^r C_{m,r-1}$$

$$= (1-x) Z_m + x\left(\prod_{r=1}^{m}(1 + x c_\varpi(a_r - a_{m+1})) - 1\right).$$

Using (5. 651), (5. 653), and (6. 654), and observing that $x(1-x) = -\varpi x^2$, we obtain

$$(5.\ 655)\quad X_{m+1}(\varpi) - (1-x)\,X_m(\varpi) = x^2(1 + c_\varpi(a_{m+1}))\prod_{r=1}^{m}(1 + x c_\varpi(a_r)) - $$
$$- \varpi x^2 \prod_{r=1}^{m}(1 + x c_\varpi(a_r - a_{m+1})).$$

To this recurrence formula we add the value of $X_m(\varpi)$ for $m = 1$, viz.

$$(5.\ 656)\qquad X_1(\varpi) = 1 + A(\varpi) = 1 + x^2 c_\varpi(a_1).$$

5. 66. We can now deduce an exceedingly simple formula for $X_m(\varpi)$, viz.

$$(5.\ 661)\qquad X_m(\varpi) = \left(\frac{\varpi}{\varpi - 1}\right)^m \frac{\varpi - \nu}{\varpi - 1},$$

where

$$(5.\ 662)\qquad \nu = \nu_m = \nu(\varpi;\ 0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

is the number of distinct residues of $0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ (mod. ϖ).

This is readily proved by induction. Let us denote the right hand side of (5. 661) by X'_m; and let us consider first the case $m = 1$.

If $a_1 \equiv 0$ (mod. ϖ) we have $\nu = 1$, $c_\varpi(a_1) = \varpi - 1$; if $a_1 \not\equiv 0$ we have $\nu = 2$, $c_\varpi(a_1) = -1$. In either case $X_1 = X'_1$.

Now suppose the result true for m, and consider X_{m+1}. There are three cases:

(i) $a_{m+1} \equiv 0$ (mod. ϖ). Here

$$\nu_{m+1} = \nu_m,\ X'_{m+1} = \frac{\varpi}{\varpi - 1} X'_m = (1-x)\,X'_m.$$

On the other hand $1 + c_\varpi(a_{m+1}) = \varpi$, $c_\varpi(a_r - a_{m+1}) = c_\varpi(a_r)$; the right hand side of (5. 655) vanishes; and so

$$X_{m+1} = (1-x)\,X_m = (1-x)\,X'_m = X'_{m+1}.$$

(ii) $a_{m+1} \equiv a_{r_1} \not\equiv 0$ for some $r_1 \leq m$. Here again $\nu_{m+1} = \nu_m$. On the one hand we have, as before, $X'_{m+1} = (1-x)X'_m$. On the other

$$1 + c_\varpi(a_{m+1}) = 0,\ 1 + x c_\varpi(a_{r_1} - a_{m+1}) = 1 - \frac{1}{\varpi - 1} c_\varpi(0) = 0;$$

the right hand side of (5. 665) vanishes, and $X_{m+1} = X'_{m+1}$ as before.

(iii) $a_{m+1} \neq 0$, $a_{m+1} \neq a_r (r \leq m)$. Here $\nu_{m+1} = \nu_m + 1 = \nu + 1$. Also all the c's concerned are equal to -1. Hence

$$X_{m+1} - (1-x) X_m = -\varpi x^2 (1-x)^m = x(1-x)^{m+1},$$

or, since $X_m = X'_m$,

$$\begin{aligned} X_{m+1} &= (1-x) \,.\, (1-x)^m (1 + (\nu - 1)x) + x(1-x)^{m+1} \\ &= (1-x)^{m+1} (1 + \nu x) = X'_{m+1}. \end{aligned}$$

This completes the proof.

We now restate our conclusions in a more symmetrical form.

Theorem X 1.[1] *Let $b_1, b_2, \ldots, b_m$ be m distinct integers, and $P(x; b_1, b_2, \ldots, b_m)$ the number of groups $n + b_1, n + b_2, \ldots\ldots, n + b_m$ between 1 and x and consisting wholly of primes. Then*

(5. 663) $$P(x) \sim G(b_1, b_2, \ldots, b_m)\, Li_m(x)$$

when $x \to \infty$, where

(5. 664) $$G(b_1, b_2, \ldots, b_m) = \prod_{\varpi \geq 2} \left(\left(\frac{\varpi}{\varpi - 1} \right)^{m-1} \frac{\varpi - \nu}{\varpi - 1} \right),$$

$\nu = \nu(\varpi; b_1, b_2, \ldots, b_m)$ is the number of distinct residues of $b_1, b_2, \ldots, b_m$ to modulus ϖ, and

$$Li_m(x) = \int_2^x \frac{du}{(\log u)^m}.$$

Further

(5. 665) $$G(b_1, b_2, \ldots, b_m) = C_m H(b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

where

(5. 666) $$C_m = \prod_{\varpi > m} \left(\left(\frac{\varpi}{\varpi - 1} \right)^{m-1} \frac{\varpi - m}{\varpi - 1} \right),$$

(5. 667) $$H(b_1, b_2, \ldots, b_m) = \prod_{\varpi \leq m} \left(\left(\frac{\varpi}{\varpi - 1} \right)^{m-1} \frac{\varpi - \nu}{\varpi - 1} \right) \prod_{\substack{\varpi \mid \Delta \\ \varpi > m}} \left(\frac{\varpi - \nu}{\varpi - m} \right),$$

and Δ is the product of the differences of the b's.

[1] To avoid any possible misunderstanding, we repeat that these theorems are *consequences of Hypothesis X.*

The change from $0, a_1, \ldots, a_m$ to $b_1, b_2, \ldots, b_m$ is obtained by writing $n - b_1$ for n and m for $m+1$. The expression of G as the product of the constant C_m (depending only on m) and the finite expression H follows immediately from the fact that $\nu = m$ if $\varpi \nmid \Delta$, $\varpi > m$.

5.67. There are plainly many directions in which it would be possible to extend these investigations. We may ask, for example, whether there are indefinitely recurring pairs, triplets, or longer sequences of primes subject to further restrictions, such as that of belonging to specified quadratic forms. We have considered one problem of this character only, which is interesting in that it combines those contemplated in Conjectures B and E. Is there an infinity of pairs of primes of the forms m^2+1, m^2+3? The result suggested is as follows.

Conjecture P. *There are infinitely many prime pairs of the form m^2+1, m^2+3. The number of such pairs less than n is given asymptotically by*

$$Q(n) \sim \frac{3C\sqrt{n}}{(\log n)^2} = \frac{3\sqrt{n}}{(\log n)^2} \prod_{\varpi \geq 5} \frac{\varpi(\varpi-\nu)}{(\varpi-1)^2},$$

where ν is 0, 2, or 4 according as neither, one, or both of -1 and -3 are quadratic residues of ϖ.

Numerical verifications.

5.68. A number of our conjectures have been tested numerically by Mrs. Streatfeild, Dr. A. E. Western, and Mr. O. Western. We state here a few of their results, reserving a fuller discussion of them for publication elsewhere.

The first of these numerical tests apply to conjectures E and P. In applying such tests we work (for reasons similar to those explained in 4.4 and 5.32) not with the actual formulae stated in the enunciations of those conjectures, but with the asymptotically equivalent formulae

$$P(n) \sim \frac{1}{2} C \int^n \frac{dx}{\sqrt{x}\log x} \sim \frac{1}{2} C \, Li\sqrt{n} \tag{5.681}$$

and

$$Q(n) \sim \frac{3}{2} C \int^n \frac{dx}{\sqrt{x}(\log x)^2} \sim \frac{3}{4} C \, Li_2 \sqrt{n}. \tag{5.682}$$

The number of primes less than 9000000 and of the prime form m^2+1 is 301. The number given by (5.681) is 302.6. The ratio is 1.005, and the agreement is all that could be desired.

The number of prime-pairs m^2+1 and m^2+3, both of whose members are less than 9000000, is 57. The value given by (5.682) is 48.9. The ratio is

.858. The numbers concerned are naturally rather small, but the result is perhaps a little disappointing.

A more systematic test has been applied to the formulae for triplets and quadruplets of primes, the particular groups considered being

$$\varpi,\ \varpi+2,\ \varpi+6;\ \varpi,\ \varpi+4,\ \varpi+6;$$
$$\varpi,\ \varpi+2,\ \varpi+6,\ \varpi+8;\ \varpi,\ \varpi+4,\ \varpi+6,\ \varpi+10.$$

The two kinds of triplets should occur with the same frequency. On the other hand there should be twice as many quadruplets of the second type as of the first. For 0, 2, 6, 8 have 4 distinct residues to modulus 5 and 0, 4, 6, 10 but 3, while for all other moduli the number of residues is the same; and the ratio 5—3: 5—4 is 2. The actual results are shown in the following table.

Triplets.

x	$P_3(x; 0, 2, 6)$	$\frac{9}{2} C_3 Li_3(x)$	Ratio	$P_3(x; 0, 4, 6)$	Ratio
10^5	260	270.78	1.041	249	1.087
2.10^5	417	440.71	1.057	425	1.037
3.10^5	566	589.89	1.042	588	1.003
4.10^5	718	727.43	1.013	748	0.972
5.10^5	833	857.10	1.029	881	0.973
6.10^5	950	980.92	1.033	1008	0.973
7.10^5	1073	1100.16	1.025	1133	0.971
8.10^5	1195	1215.64	1.017	1231	0.988
9.10^5	1295	1327.97	1.025	1331	0.998
10^6	1398	1437.59	1.028	1443	0.996

Quadruplets.

x	$P_4(x; 0, 2, 6, 8)$	$\frac{27}{2} C_4 Li_4(x)$	Ratio	$P_4(x; 0, 4, 6, 10)$	$27\, C_4 Li_4(x)$	Ratio
10^5	38	40.41	1.063	80	80.82	1.010
2.10^5	52	61.18	1.177	124	122.35	0.987
3.10^5	70	78.62	1.123	160	157.24	0.983
4.10^5	87	94.28	1.084	194	188.55	0.972
5.10^5	103	108.75	1.056	219	217.50	0.993
6.10^5	117	122.36	1.045	239	244.71	1.024
7.10^5	133	135.29	1.017	263	270.59	1.029
8.10^5	141	147.69	1.047	285	295.39	1.036
9.10^5	156	159.64	1.023	299	319.29	1.068
10^6	166	171.21	1.031	316	342.42	1.084

Here C_2 and C_4 are the constants of Theorem X 1. The results are on the whole very satisfactory, though there is a curious deficiency of quadruplets of the second type between 800000 and 1000000.

5. 691. We return to the problems connected with the function $\varrho(x) = \overline{\lim_{n \to \infty}} (\pi(n+x) - \pi(n))$. We shall adhere to the notation of Theorem X 1, and shall suppose in addition that x is integral and that $0 \leqq b_1 < b_2 < \cdots < b^m$. It follows from Theorem X 1 that, if $H(b_1, b_2, \ldots, b_m) \neq 0$, groups $n+b_1, n+b_2, \ldots, n+b_m$ consisting wholly of primes continually recur, and we shall say, when this happens, that $b_1, b_2, \ldots, b_m$ is a *possible* m-group of b's. We say also that the $n+b_1, \ldots, n+b_m$ is an m-group of primes. If, in a possible group, $m = \varrho(x)$, where $x = b_m - b_1 + 1$, we shall call the group, either of primes or of b's, a *maximum* group. A set of x consecutive positive integers we call an x-sequence; and we say that the group $n+b_1, \ldots, n+b_m$ is *contained in* the $(b_m - b_1 + 1)$-sequence $b_1 \leqq c \leqq b_m$, and that its *length* is $b_m - b_1 + 1$.

Theorem X 2. *If $b_1, b_2, \ldots, b_m$ have a missing residue* (mod. ϖ) *for each $\varpi \leqq m$, then these b's form a possible group.*

This is an immediate consequence of Theorem X 1, since $\nu \leqq \varpi - 1$ for $\varpi > m$.

Theorem X 3. *Let $M(x, n)$ be the number of distinct integers $c_1, c_2, \ldots, c_M$, in the interval $n < c \leqq n + x$, which are not divisible by any prime less than or equal to*

$$\bar{\varrho}(x) = \varrho(x) + \left[\frac{x}{\varrho(x)}\right] + 1,$$

and let

$$\varrho_1(x) = \operatorname*{Max}_{(n)} M(x, n).$$

Then

$$\varrho_1(x) = \varrho(x).$$

Let $\varrho(x, \mu)$ be the number obtained in place of $\varrho_1(x)$ when the $\bar{\varrho}(x)$ that occurs in the definition of $\varrho_1(x)$ is replaced by μ. Clearly we have

$$\varrho(x, \mu - 1) \geqq \varrho(x, \mu) \geqq \varrho(x) \tag{5. 6911}$$

and

$$\varrho(x, \mu) \geqq \varrho(x, \mu - 1) - \left[\frac{x}{\mu}\right] - 1. \tag{5. 6912}$$

Further,

(5. 6913)
$$\tau=\varrho(x,\mu)\leqq\mu$$

implies

$$\varrho(x,\mu)=\varrho(x).$$

For let $d_1, d_2, \ldots, d_\tau$ be an increasing set of positive integers with the properties (characteristic of a set of $\tau=\varrho(x,\mu)$ such integers) that (*a*) there is an n such that $n+d_1, \ldots, n+d_\tau$ are not divisible by any prime less than or equal to μ, and (*b*) $d_\tau-d_1+1\leqq x$. Then $n+d_1, \ldots, n+d_\tau$ form a 'possible' group of b's, since they lack the residue 0 for every prime less than or equal to τ. Hence $\varrho(x)\geqq\tau=\varrho(x,\mu)$, and so, by (5. 6911), $\varrho(x)=\varrho(x,\mu)$.

Next we observe that $\varrho(x,\mu)=\varrho(x)$ for $\mu=x$, since the inequality $\tau\leqq\mu$ is clearly satisfied in this case. Let now μ_0 be the least μ, greater than or equal to $\varrho(x)$, for which $\varrho(x,\mu_0)=\varrho(x)$. Then $\varrho(x)\leqq\mu_0\leqq x$. We have then

(5. 6914)
$$\varrho(x,\mu_0)=\varrho(x),\quad \varrho(x,\mu_0-1)>\varrho(x),$$

and so

$$\varrho(x,\mu_0-1)>\mu_0-1,$$

by (5. 6913). Thus

$$\mu_0\leqq\varrho(x,\mu_0-1)\leqq\varrho(x,\mu_0)+\left[\frac{x}{\mu_0}\right]+1=\varrho(x)+\left[\frac{x}{\mu_0}\right]+1$$
$$\leqq\varrho(x)+\left[\frac{x}{\varrho(x)}\right]+1=\bar{\varrho}(x).$$

Hence

$$\varrho(x)=\varrho(x,\mu_0)\geqq\varrho(x,\bar{\varrho}(x))=\varrho_1(x).$$

But it is evident that $\varrho_1(x)\geqq\varrho(x)$, and therefore $\varrho_1(x)=\varrho(x)$.

It follows from the theorem that, *in a maximum group of primes of length x, the remaining numbers of the x-sequence are all divisible by primes less than or equal to $\bar{\varrho}(x)$.* We shall see presently that (on hypothesis X) $\bar{\varrho}(x)\leqq\varrho(x)+\log x$ for large values of x.

5. 692. We consider now the problem of a lower bound for $\varrho(x)$. Let p_s denote the s-th prime.

Theorem X 4. *Let $r=r(n)$ be defined, for every value of n, by*

$$p_r\leqq n<p_{r+1}.$$

Then $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_{r+n}$ is a possible n-group of b's.

For the primes less than or equal to n are $p_1, p_2, \ldots, p_r$ and the b's lack the residue 0 for each of them.

From Theorem X 4 we deduce at once

Theorem X 5. *If* $x = p_{r+n} - p_{r+1} + 1$, $p_r \leqq n < p_{r+1}$, *then*

$$\varrho(x) \geqq n.$$

As a numerical example, let $n = 76501$. We have $p_{7525} = 76493$, $p_{7526} = 76507$. Hence

$$r = 7525, \; n + r = 84026, \; p_{n+r} = 1076503$$

$$x = 1076503 - 76507 + 1 = 999997.$$

Thus

$$\varrho(1000000) \geqq 76501.$$

We may compare this with the numbers of primes in the first, second, and third millions, viz.

$$78498, \; 70433, \; 67885.$$

Theorem X 5 provides a lower limit for $\varrho(x)$ when x has a certain form: we proceed to consider the case when x is unrestricted.

Theorem X 6. *We have*

$$\varrho(x) > \frac{x}{\log x}$$

for sufficiently large values of x.

When m is large

$$p_m = m(\log m + \log\log m) - m + O\left(\frac{m \log\log m}{\log m}\right).$$

Let

$$r = \left[\frac{y}{(\log y)^2}\left(1 + \frac{\log\log y}{\log y}\right)\right].$$

Then we have, by straightforward calculations,

$$p_r = \frac{y}{\log y}\left(1 - \frac{1}{\log y} + O\left(\frac{\log\log y}{\log y}\right)^2\right).$$

Take $n = p_r$. Then

$$n + r = \frac{y}{\log y}\left(1 + O\left(\frac{\log\log y}{\log y}\right)^2\right),$$

$$p_{n+r} = y\left(1 - \frac{1}{\log y} + O\left(\frac{\log\log y}{\log y}\right)^2\right)$$

$$x = p_{n+r} - p_{r+1} + 1 < p_{n+r} - p_r$$

$$= y\left(1 - \frac{2}{\log y} + O\left(\frac{\log\log y}{\log y}\right)^2\right) < y - \frac{3}{2}\frac{y}{\log y} = z,$$

when y is large. Thus

$$\varrho(z) \geq \varrho(x) \geq n = p_r = \frac{y}{\log y} - \frac{y}{(\log y)^2} + O\left(\frac{y(\log\log y)^2}{(\log y)^3}\right)$$

$$> \frac{z}{\log z}.$$

Since y is arbitrary, so is z, and the theorem is proved.

5. 693. We conclude our discussion of $\varrho(x)$ with an account of one or two particular cases. For a given x it is, of course, theoretically possible to determine the maximum number of integers in an x-sequence that are not divisible by any prime less than x. On hypothesis X, this number is $\varrho(x)$. Thus L. AUBRY[1] has shown that 30 consecutive *odd* integers cannot contain more than 15 primes (or more than 15 numbers not divisible by 2, 3, 5, or 7). Thus $\varrho(59) \leq 15$. On the other hand if we take, in Theorem X 5, $n = 15$, $r = 6$, we see that the 15 primes from 17 to 73 give a possible group of b's. Hence, on hypothesis X,

$$\varrho(59) \geq \varrho(57) = \varrho(73 - 17 + 1) \geq 15;$$

and so $\varrho(59) = 15$. The value of $\pi(59)$ is 17.

Similarly a 35-sequence cannot contain more than 10 numbers not divisible by 2, 3, or 5, but the 10 primes from 13 to 47, and therefore the numbers 0, 4, 6, 10, 16, 18, 24, 28, 30, 34, form a possible 10-group of b's, so that $\varrho(35) = 10 = \pi(35) - 1$. A striking example of a maximum prime group $n + b_1, \ldots, n + b_{10}$, corresponding to this group of b's, is provided by $n = 113143$.

The best example of a close approach by $\varrho(x)$ to $\pi(x)$ occurs when $x = 97$. Consider the 24 primes from 17 to 113. They are a possible group of b's if they have a missing residue for each prime less than 24. We have only to test 17, 19, 23, and we find that 17 lacks the residue 8, 19 lacks 1 and 11, and 23 lacks 3, 12, 16, and 22. Hence on hypothesis X, $\varrho(97) \geq 24$. On the other hand it

[1] L. E. DICKSON, *l. c.*, vol. 1, p. 355.

may be shown that a 97-sequence cannot contain 25 numbers not divisible by 2, 3, 5, 7, 11, or 13. Let us denote the range $n \leq x \leq n+96$ by R_n. There is one and only one value of n, not greater than $2.3.5.7 = 210$, for which R_n contains 25 numbers not divisible by 2, 3, 5, or 7, viz. $n = 101$. If then $n \leq 2.3.5.7.11$, and R_n contains 25 numbers not divisible by 2, 3, 5, 7, or 11, n must be one of the numbers $101 + 210\,m$ ($m = 0, 1, \ldots, 10$); and on examination it proves that we may exclude all cases but $m = 10$. Repeating the argument we see that, if $n \leq 2.3.5.7.11.13$, and R_n contains 25 numbers not divisible by 2, 3, 5, 7, 11, or 13, then n must be one of the numbers $n = 2201 + 2310\,m$ ($m = 0, 1, \ldots, 12$). All these turn out to be impossible and, since any R_n may be reduced (mod. $2.3 \ldots 13$), it follows that no R_n can contain more than 24 numbers not divisible by a prime less than or equal to 13. *A fortiori* it follows that $\varrho(97) \leq 24$, and so (on hypothesis X) $\varrho(97) = 24$. Since $\pi(97) = 25$, the difference $\varrho - \pi$ is here unity. Beyond $x = 97$ it would seem that $\varrho(x)$ falls further below $\pi(x)$, at least within any range in which calculation is practicable.

Conclusion.

5. 7. We trust that it will not be supposed that we attach any exaggerated importance to the speculations which we have set out in this last section. We have not forgotten that in pure mathematics, and in the Theory of Numbers in particular, 'it is only proof that counts'. It is quite possible, in the light of the history of the subject, that the whole of our speculations may be ill-founded. Such evidence as there is points, for what it is worth, in the opposite direction. In any case it may be useful that, finding ourselves in possession of an apparently fruitful method, we should develop some of its consequences to the full, even where accurate investigation is beyond our powers.

Postscript.

(1). Prof. Landau has called our attention to the following passage in the *Habilitationsschrift* of Piltz ('Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze', Jena, 1884), pp. 46-47: —

'Ferner wiederholen sich gewisse Gruppierungen der Primzahlen mit gewisser Regelmässigkeit, so ist z. B. die durchschnittliche Häufigkeit der Gruppen von

je 2 Primzahlen, die in gegebenem Abstand aufeinanderfolgen, für die ungefähre Grösse x der Primzahlen, proportional $\frac{1}{(l x)^2}$, wobei allerdings dieser Ausdruck je nach dem gegebenen Abstand mit verschiedenen constanten Faktoren behaftet ist, die Häufigkeit einer Gruppe von 3 Primzahlen proportional $\frac{1}{(l x)^3}$ und so fort..... Die nähere Ausführung dieser und andrer Gesetze ... werde ich ein andres Mal folgen lassen.'

All of this is of course in perfect agreement with the results suggested in our concluding section.

(2). We must add a few words concerning the memoirs of Stäckel referred to on p. 34. These have only become accessible to us during the printing of the present memoir, and it is not possible for us even now to give any satisfactory summary of their contents; but Stäckel considers the problem of 'prime-groups' in much detail, and it is clear that he has anticipated some at any rate of the speculations of 5.6. The method of Stäckel, like that of Brun, rests on the use of the sieve of Eratosthenes, followed by a heuristic passage to the limit; but Stäckel's problem is much more general, and he has gone much further than Brun in the determination of the constants in the asymptotic formulae. It seems to be the principal advantage of our transcendental method, considered merely as a machine for the production of heuristic formulae, that these constants are determined naturally in the course of the analysis.

(3). We should also refer to a later memoir of Brun ('Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach', *Videnskapsselskapets Skrifter, Mat.-naturv. Klasse*, Kristiania, 1920, No. 3). Brun proves, by elementary methods, (1) that every large even number is the sum of two numbers, each composed of at most 9 prime factors, (2) that the number of prime-pairs ϖ, $\varpi + 2$, less than x, cannot exceed a constant multiple of $x(\log x)^{-2}$.

Brun's work enables us to make a substantial improvement in the elementary theorem G. Using the inequalities proved on pp. 32—34 of his memoir, we can show that

$$\varrho(x) < \frac{A x}{\log x}.$$

(4). Prof. Landau has pointed out to us an error on p. 9. It is not necessarily true that $C_k = 0$ when χ_k is imprimitive: our argument is only valid when Q is divisible by every prime factor of q.

The inequality (2. 16) is however correct. Suppose first that $q = \varpi^\lambda$ $(\lambda > 0)$. Our argument then holds unless $Q = 1$; in this case χ_k is the principal character and

$$\left|\sum_{m=1}^{q} e_q(m)\, \bar{\chi}_k(m)\right| = 1 \leqq \sqrt{q}.$$

This inequality is then easly generalised to all values of q. If $q = q_1 q_2$, where $(q_1, q_2) = 1$, then every χ (mod. q) is the product of a χ_1 (mod. q_1) and a χ_2 (mod. q_2) and it is easily proved that

$$\left|\sum_{m} e_q(m)\, \chi(m)\right| = \left|\chi_1(q_2)\, \chi_2(q_1) \sum_{m_1} e_{q_1}(m_1)\, \chi_1(m_1) \sum_{m_2} e_{q_2}(m_2)\, \chi_2(m_2)\right|$$

$$\leqq \sqrt{q_1}\sqrt{q_2} = \sqrt{q}.$$

The conclusion now follows by induction.

MÉMOIRE SUR LE CALCUL AUX DIFFÉRENCES FINIES.

PAR

N. E. NÖRLUND

à LUND.

Introduction.

1. Posons pour abréger

$$\mathop{\triangle}_{\omega} F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega},$$

$$\mathop{\nabla}_{\omega} F(x) = \frac{F(x+\omega) + F(x)}{2}.$$

Je me propose d'étudier les solutions des deux équations suivantes

$$\mathop{\triangle}_{\omega} F(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

$$\mathop{\nabla}_{\omega} G(x) = \varphi(x), \tag{2}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée. Au sujet de ces solutions il y a une observation curieuse à faire. Les développements en séries qui se présentent tout d'abord à l'esprit divergeront en général. On peut, il est vrai, en former d'autres qui convergent, mais néanmoins ce sont les développements divergents qui sont les mieux faits pour mettre en évidence les propriétés des solutions. Je veux dire qu'on peut rattacher à ces séries certaines expressions limites dont on peut avec avantage se servir. Sur ce point je me suis inspiré des belles recherches de M. MITTAG-LEFFLER sur le prolongement analytique d'une fonction donnée par sa série de Taylor.

Dans ces dernières années on a publié de nombreux travaux sur les séries divergentes parmi lesquels nous citerons ceux de MM. BOREL, HARDY, M. RIESZ et H. BOHR. Le calcul aux différences finies vient ajouter un nouveau chapitre à la théorie de ces séries. Dans ce premier Mémoire je n'ai nullement tiré tout

le parti possible des séries divergentes dont je m'occupe, mais les communications ultérieures que je vais donner sur le même sujet montreront que l'accomplissement de la théorie des équations aux différences finies dépend essentiellement des extensions qu'on peut donner aux recherches susdites. Ces extensions reposent sur les recherches de M. VOLTERRA sur les fonctions permutables mais elles demandent des explications assez longues. Pour cette raison je les réserve pour un autre mémoire.

Les équations (1) et (2) admettent une infinité de solutions. Soient $\Pi(x)$ et $p(x)$ deux fonctions périodiques qui satisfont aux équations suivantes

$$\Pi(x+\omega) = \Pi(x),$$
$$p(x+\omega) = -p(x)$$

mais qui sont d'ailleurs arbitraires. On obtient la solution la plus générale de l'équation (1), respectivement de l'équation (2), en ajoutant à une solution particulière la fonction $\Pi(x)$, respectivement la fonction $p(x)$. Parmi les solutions en nombre infini j'en distingue une que j'appelle la solution principale et qui est celle qui présente un réel intérêt. Je ferai successivement diverses hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$. Supposons d'abord ω positif et x réel, et soit $\varphi(x)$ une fonction qui admet, pour $x \geq b$, une dérivée continue d'un certain ordre, soit d'ordre m, telle que

$$\lim_{x\to\infty} x^{1+\varepsilon}\varphi^{(m)}(x) = 0$$

pour toute valeur positive de ε. Considérons la série

$$2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega). \tag{3}$$

Cette série satisfait formellement à l'équation (2) mais elle diverge en général D'autre part, la série

$$G_\eta(x\,|\,\omega) = 2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta(x+s\omega)^r} \tag{4}$$

converge pour toute valeur positive de η. Je démontre dans le paragraphe 5 que $G_\eta(x\,|\,\omega)$ tend uniformément vers une limite quand η tend vers zéro. Cette limite sera, par définition, *la solution principale de l'équation* (2). Je la désigne par $G(x\,|\,\omega)$. Cette solution est égale à la somme de la série (3) dans le cas particulier où cette série converge.

De même, la série

$$-\omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega) \tag{5}$$

satisfait formellement à l'équation (1). Malheureusement cette série diverge en général, mais considérons l'expression suivante

$$F_\eta(x\,|\,\omega)=\int_a^{\infty}\varphi(x)\,e^{-\eta x}dx-\omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta(x+s\omega)}. \tag{6}$$

L'intégrale et la série convergent pour toute valeur positive de η. Je démontre dans le paragraphe 9 que $F_\eta(x\,|\,\omega)$ tend uniformément vers une limite quand η tend vers zéro. Cette limite sera, par définition, *la solution principale de l'équation* (1). Je la désigne par $F(x\,|\,\omega)$. Dans le cas particulier où la série (5) converge notre solution ne diffère de la somme de cette série que par une constante. La solution principale de l'équation (2) est ainsi uniquement déterminée et la solution principale de l'équation (1) est déterminée à une constante additive près car elle dépend de la constante arbitraire a. Je désigne quelquefois ces deux solutions par les symboles suivants

$$G(x\,|\,\omega)=\mathop{S}\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega}x,$$

$$F(x\,|\,\omega)=\mathop{S}_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\triangle}_{\omega}z.$$

On a donc dans le cas actuel

$$\mathop{S}\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega}x=\lim_{\eta\to 0}2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta(x+s\omega)}, \tag{7}$$

$$\mathop{S}_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\triangle}_{\omega}z=\lim_{\eta\to 0}\left[\int_a^{\infty}\varphi(z)\,e^{-\eta z}dz-\omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta(x+s\omega)}\right]. \tag{8}$$

Les opérations que définissent ces deux limites sont inverses aux opérations $\mathop{\nabla}_{\omega}$ et $\mathop{\triangle}_{\omega}$ car on a

$$\mathop{\nabla}_{\omega} \mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega} x = \varphi(x),$$

$$\mathop{\triangle}_{\omega} \mathop{\mathsf{S}}_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\triangle}_{\omega} z = \varphi(x).$$

Le but de ce Mémoire est d'étudier les propriétés des deux solutions principales et de faire voir comment elles s'expriment explicitement à l'aide de la fonction $\varphi(x)$. Les fonctions $F(x \mid \omega)$ et $G(x \mid \omega)$ sont continues pour toute valeur positive de ω et pour toute valeur de x qui est plus grande que b. Dans le paragraphe 13 je démontre qu'elles admettent des dérivées continues d'ordre m par rapport à x et que ces dérivées tendent vers des limites finies quand x augmente indéfiniment. *Cette propriété est caractéristique pour les solutions principales.* Il n'y a aucune autre solution qui possède la même propriété.

Comment se comportent nos fonctions pour les valeurs positives et très grandes de x ? Soit r le plus petit entier tel que

$$\lim_{x \to \infty} \varphi^{(r)}(x) = 0.$$

Posons

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\nu} \frac{C_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x),$$

$$Q(x) = \int_a^x \varphi(z)\, dz + \sum_{\nu=1}^{r} \omega^{\nu} \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x),$$

les B_ν étant les nombres de Bernoulli, les C_ν étant certains entiers qui s'y rattachent.[1] Dans le paragraphe 11 on démontre que

$$\lim_{x \to \infty} [G(x \mid \omega) - P(x)] = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{x \to \infty} [F(x \mid \omega) - Q(x)] = 0. \tag{9'}$$

Il en résulte que les deux solutions se représentent par les séries suivantes

---

[1] Dans ce qui suit nous parlerons souvent de ces nombres et des polynomes de Bernoulli et d'Euler. Nous supposerons connues les propriétés essentielles de ces polynomes. Pour ce qui concerne ce sujet je prie le lecteur de vouloir bien se reporter à mon Mémoire sur les polynomes de Bernoulli, Acta math. 43 (1920), p. 121—196.

$$G(x\,|\,\omega) = P(x) + 2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\,[\varphi\,(x+s\omega) - \mathop{\nabla}_{\omega} P\,(x+s\omega)], \tag{10}$$

$$F(x\,|\,\omega) = Q(x) - \omega\sum_{s=0}^{\infty}[\varphi\,(x+s\omega) - \mathop{\triangle}_{\omega} Q\,(x+s\omega)], \tag{10'}$$

qui convergent uniformément dans l'intervalle $x \geq b$.

Quand le nombre positif ω tend vers zéro les solutions principales tendent vers des limites finies. On a en effet

$$\lim_{\omega\to 0} \mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega} x = \varphi(x),$$

$$\lim_{\omega\to 0} \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi(x)\mathop{\triangle}_{\omega} x = \int_{a}^{x}\varphi(x)\,dx.$$

On peut aller plus loin et développer les deux solutions suivant les puissances entières et positives de ω de la manière suivante

$$G(x\,|\,\omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{\nu}\frac{C_\nu}{\nu\,!}\,\varphi^{(\nu)}(x), \tag{11}$$

$$F(x\,|\,\omega) = \int_{a}^{x}\varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{\infty}\omega^{\nu}\,\frac{B_\nu}{\nu\,!}\,\varphi^{(\nu-1)}(x). \tag{11'}$$

Nous ferons l'étude approfondie de ces deux séries qui, dans la plupart des cas, divergent. Nous démontrerons en particulier qu'elles représentent les fonctions au premier membre asymptotiquement pour les valeurs positives et très petites de ω.

Dans le paragraphe 26 nous supposerons que $\varphi(x)$ est une fonction analytique, holomorphe dans un petit angle ϑ entourant l'axe des nombres positifs, et que l'égalité

$$\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x)\,e^{-\varepsilon|x|} = 0$$

ait lieu uniformément dans l'angle ϑ pour toute valeur positive de ε. Nous démontrerons que les limites (7) et (8) existent et que $G(x\,|\,\omega)$ et $F(x\,|\,\omega)$ sont des fonctions analytiques de x et de ω holomorphes pour toute valeur de ces variables qui est à l'intérieur de l'angle ϑ.

Il y a intérêt à réaliser le prolongement analytique de ces fonctions. Parmi les cas que nous étudierons le plus simple est le suivant. Soit $\varphi(x)$ une fonction analytique et uniforme admettant à distance finie n points singuliers $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$. Supposons qu'il existe un nombre non négatif k tel que l'inégalité

$$|\varphi(x)| < e^{(k+\varepsilon)|x|}$$

ait lieu pour toute valeur positive de ε, si $|x|$ est suffisamment grand. Dans les paragraphes 33—36 nous démontrerons que les deux solutions principales sont des fonctions analytiques des deux variables x et ω qui sont uniformes dans le plan des x et qui y admettent les points singuliers $x = \beta_\nu, \beta_\nu - \omega, \beta_\nu - 2\omega, \ldots.$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$. Donnons à x une valeur différente des β_ν. Comme fonction de ω $G(x|\omega)$ est encore *uniforme* à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{\pi}{k}$ et elle y admet une infinité de points singuliers, tous situés sur n rayons vecteurs et admettant le point $\omega = 0$ comme point limite.

La fonction $F(x|\omega)$ existe à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{2\pi}{k}$ mais elle est *non uniforme* au voisinage du point $\omega = 0$. Soit B le résidu de $\varphi(x)$ dans le point $x = \infty$, la fonction F est de la forme

$$F(x|\omega) = -B \log \omega + \text{fonc. uniforme de } \omega.$$

$F(x|\omega)$ admet, à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{2\pi}{k}$, une infinité de points singuliers tous situés sur n rayons vecteurs que j'appelle *les vecteurs singuliers*. Quand x décrit un petit cercle autour d'un des points β_ν un des vecteurs singuliers fait une rotation complète dans le plan des ω.

Nos deux solutions satisfont aux relations remarquables suivantes

$$G(x|\omega) - G(x-\omega|-\omega) = p(x),$$
$$F(x|\omega) - F(x-\omega|-\omega) = \Pi(x),$$

p et Π étant des fonctions périodiques telles que

$$p(x+\omega) = -p(x),$$
$$\Pi(x+\omega) = \Pi(x).$$

A la fonction $\varphi(x)$ il appartient ainsi deux fonctions périodiques. Nous indiquerons plusieurs expressions fort remarquables de ces fonctions. Elles s'expriment explicitement à l'aide de la fonction $\varphi(x)$ par exemple de la manière suivante

$$p(x) = 2 \lim_{\eta \to 0} \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \varphi(x+s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)^2},$$

$$\Pi(x) = \lim_{\eta \to 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-\eta x^2} dx - \omega \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \varphi(x+s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)^2} \right].$$

Nous étudierons comment se comportent les fonctions G et F au voisinage du point singulier essentiel $\omega = 0$. Si la partie réelle de x est plus grande que les parties réelles des nombres β_ν nous démontrerons que la série au second membre de l'équation (11') représente asymptotiquement la fonction $F(x|\omega)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$ et la fonction $F(x|\omega) - \Pi(x) + 2\pi i B$ dans l'angle $\frac{3\pi}{2} > \arg \omega > \frac{\pi}{2}$. De même la série au second membre de l'équation (11) représente asymptotiquement la fonction $G(x|\omega)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$ et la fonction $G(x|\omega) - p(x)$ dans l'angle $\frac{3\pi}{2} > \arg \omega > \frac{\pi}{2}$. Au contraire si la partie réelle de x est plus petite que les parties réelles des nombres β_ν la dernière série représente asymptotiquement la fonction $G(x|\omega)$ dans l'angle $\frac{3\pi}{2} > \arg \omega > \frac{\pi}{2}$ et la fonction $G(x|\omega) - p(x)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$. En particulier on a

$$\lim_{\omega \to 0} G(x|\omega) = \varphi(x),$$

ω tendant vers zéro le long d'un rayon vecteur quelconque différent des vecteurs singuliers. De même

$$\lim_{\omega \to 0} F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z)\, dz.$$

Cette égalité asymptotique a lieu à l'intérieur d'un certain angle. Mais quand ω franchit un des vecteurs singuliers la valeur asymptotique de $F(x|\omega)$ fait un saut brusque. Ce saut est égal à une des périodes de l'intégrale

$$f(x) = \int_a^x \varphi(z)\, dz.$$

Nous étudierons dans le cours de ce Mémoire les diverses expressions analytiques qui sont les plus propres à représenter nos fonctions. Parmi les développements en séries je signale particulièrement les deux suivants

$$G(x\,|\,\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \underset{\omega}{\triangle}^s \varphi(x),$$

$$F(x\,|\,\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+1} \omega^s \underset{\omega}{\triangle}^s f(x),$$

La première de ces séries converge pour toute valeur de x qui n'est pas un point singulier de $G(x\,|\,\omega)$; la seconde série converge pourvu que la partie réelle de x soit plus grande que les parties réelles des nombres β_ν, ω étant supposé positif et plus petit qu'un certain nombre.

Le problème qui nous occupe dans ce mémoire a été effleuré par Euler et Abel. L'établissement de la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin fut un premier pas vers le but. La remarquable série divergente qu'avait indiquée Euler a été transformée en une intégrale définie par Plana [1] et Abel [2]. Le résultat de ces auteurs fut rigoureusement établi pour la première fois par Cauchy [3]. En faisant certaines hypothèses relativement à la fonction $f(t)$, Cauchy démontre qu'on a

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\omega+it) - f(\omega-it) - f(it) + f(-it)}{i\left(e^{\frac{2\pi}{\omega}t} - 1\right)} dt = \frac{\omega}{2}[f(\omega) + f(0)] - \int_0^{\omega} f(t)\,dt,$$

ce qui est sensiblement le même résultat qu'avaient trouvé Plana et Abel. Parmi les travaux récents sur la formule sommatoire d'Euler je dois surtout citer un ouvrage important dû à M. Lindelöf [4].

M. Guichard [5] a consacré un beau mémoire à l'étude des solutions de l'équation

---

[1] Note sur une nouvelle expression analytique des nombres bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites, Mém. Acad. Turin 25 (1820), p. 403—18.

[2] Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, Magazin for Naturvidenskaberne I,2 (1823); Œuvres complètes 1 (2e édition), Christiania 1881, p. 21—7.

[3] Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques, Mém. Acad. sc. Paris 6 (1827), p. 603—12 [1826]; Œuvres (1) 2, Paris 1908, p. 12—9.

[4] Quelques applications d'une formule sommatoire générale, Acta Soc. scient. Fennicae 31 (1902); Sur une formule sommatoire générale, Acta math. 27 (1903), p. 305—11. Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Paris 1905. Dans le dernier ouvrage on trouve aussi des renseignements bibliographiques détaillés.

[5] Sur la résolution de l'équation aux différences finies $G(x+1) - G(x) = H(x)$, Ann. Éc. Norm. (3) 4 (1887), p. 361—80.

$$F(x+1) - F(x) = \varphi(x). \tag{12}$$

M. GUICHARD envisage une intégrale de la forme

$$F(x) = \int_A^B \frac{\varphi(z)\, e^{2\pi i z}}{e^{2\pi i z} - e^{2\pi i x}}\, dz \tag{13}$$

prise le long d'un segment de l'axe imaginaire. Cette intégrale a des lignes de discontinuité ou coupures du genre de celles qui ont été considérées pour la première fois par HERMITE. L'intégrale représente, dans un certain rectangle, une solution analytique de l'équation (12). Mais, même si $\varphi(x)$ est une fonction entière, cette solution est non uniforme et admet une infinité de points critiques logarithmiques. Pour remédier à cet inconvénient M. GUICHARD fait tendre A et B vers l'infini. Il démontre ainsi que l'équation (12) admet toujours une solution entière, si $\varphi(x)$ est une fonction entière. Cette solution se représente dans la bande $0 < \Re(x) < 1$ par l'intégrale

$$F(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\varphi(z)\, E(x)\, dz}{E(z)\,(1 - e^{2\pi i (x-z)})},$$

$E(x)$ étant une fonction entière convenablement choisie. Si $E(x) = 1$ cette intégrale ne diffère pas au fond de celle qu'avait considérée Cauchy et Abel.

M. APPELL[1] a abordé l'équation (12) d'une autre manière. Si $\varphi(x)$ est un polynome

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

on sait trouver un polynome qui satisfait à l'équation (12). On a en effet

$$F(x) = \frac{a_0}{1} B_1(x) + \frac{a_1}{2} B_2(x) + \cdots + \frac{a_n}{n+1} B_{n+1}(x),$$

les $B_i(x)$ étant les polynomes de Bernoulli. Mais si $\varphi(x)$ est une fonction entière

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} B_n(x)$$

[1] Sur les fonctions périodiques de deux variables, J. math. pures appl. (4) 7 (1891), p. 157—76.

n'est pas toujours convergente. M. APPELL retranche du polynome $B_n(x)$ les n premiers termes de son développement en série trigonométrique. En désignant par $\Psi_n(x)$ la fonction entière ainsi obtenue il démontre que la série

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \Psi_n(x)$$

converge uniformément et représente une fonction entière qui satisfait à l'équation (12).

Cette démonstration a été retrouvée par HURWITZ[1]. Ce géomètre fait en outre remarquer qu'il y a toujours une solution méromorphe quand $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe.

M. APPELL a encore considéré des fonctions de deux variables et démontré ce qui suit: Étant données deux fonctions entières $\varphi_1(x, y)$ et $\varphi_2(x,y)$ de deux variables indépendantes, vérifiant l'identité

$$\varphi_1(x, y+1) - \varphi_1(x, y) = \varphi_2(x+1, y) - \varphi_2(x, y),$$

il existe une troisième fonction entière $F(x, y)$ vérifiant les deux équations

$$F(x+1, y) - F(x, y) = \varphi_1(x, y),$$
$$F(x, y+1) - F(x, y) = \varphi_2(x, y).$$

Un autre cas remarquable a été envisagé par M. E. PICARD[2]. Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction uniforme dans tout le plan, admettant la période $2\pi i$ et étant holomorphe dans une bande de largeur très petite comprenant l'axe imaginaire. Soit ω un nombre positif. M. PICARD démontre l'existence d'une solution uniforme de l'équation

$$F(x+\omega) - \mu F(x) = \varphi(x)$$

ayant la période $2\pi i$ et étant holomorphe dans la bande

$$0 \leq \Re(x) \leq \omega.$$

En général il n'y a qu'une seule solution $F(x)$ qui satisfait à ces conditions. Mais si μ est égal à $e^{\nu\omega}$, ν étant un entier positif, nul ou négatif, il y a une infinité de solutions qui sont de la forme

---

[1] Sur l'intégrale finie d'une fonction entière, Acta math. 20 (1897), p. 285—312.
[2] Sur une classe de transcendantes nouvelles, Acta math. 18 (1894), p. 135—6.

$$F(x) + c e^{\nu x},$$

c étant une constante.

M. Carmichael[1] a indiqué une nouvelle démonstration du théorème de M. Guichard. Cette démonstration repose sur la résolution d'un système doublement infini d'équations linéaires.

L'intégrale (13) a aussi été étudiée par H. Weber[2] qui a retrouvé une partie des résultats de M. Guichard. Parmi les travaux se rapportant à notre sujet nous citerons encore deux mémoires de MM. Brodén[3] et Barnes[4].

Un extrait de ce Mémoire a été publié dans le Bulletin des Sciences mathématiques (août et septembre 1920). On y trouve aussi quelques indications sur les applications qu'on peut faire des résultats susdits à la théorie générale des équations aux différences finies.

Variables réelles.

Propriétés générales des solutions principales.

2. Soit ω un nombre positif et x une variable réelle. Soit $\varphi(x)$ une fonction[5] réelle ou complexe qui est continue pour toute valeur de $x \geq b$ et supposons que l'égalité

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) e^{-\eta x} = 0$$

ait lieu pour toute valeur positive de η. Nous commencerons par déduire quelques propriétés des fonctions F et G qui découlent presque immédiatement de la définition. Considérons les fonctions F_η et G_η définies par les expressions (6) et (4). L'intégrale et les séries qui entrent dans ces expressions convergent pour toute valeur positive de η et les séries convergent uniformément par rapport à x. Elles représentent donc des fonctions continues de x, si $x \geq b$. Soit B un nombre positif quelconque qui est plus grand que b. Nous supposerons que les fonctions $F_\eta(x \mid \omega)$ et $G_\eta(x \mid \omega)$ tendent vers les limites $F(x \mid \omega)$ et $G(x \mid \omega)$ quand η tend vers

[1] On the theory of linear difference equations, Amer. J. math. 35 (1913), p. 163—71.

[2] Über Abel's Summation endlicher Differenzenreihen, Acta math. 27 (1903), p. 225—33.

[3] Bemerkungen über sogenannte finite Integration, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 7 (1911), n° 6. Einige Anwendungen diskontinuierlicher Integrale auf Fragen der Differenzenrechnung, Acta Universitatis Lundensis, nova series t. 8 (1912) n° 7.

[4] The linear difference equation of the first order, Proc. London math. Soc. (2) 2 (1904), p. 438—69.

[5] On suppose que la fonction $\varphi(x)$ ne dépend pas du paramètre ω.

zéro et cela uniformément dans l'intervalle[1] $b \leq x \leq B$. Il en résulte que $F(x\,|\,\omega)$ et $G(x\,|\,\omega)$ sont des fonctions continues de x pour toute valeur de $x \geq b$. On voit immédiatement que ces fonctions satisfont aux équations (1) et (2). On a en effet

$$F_\eta(x+\omega\,|\,\omega) - F_\eta(x\,|\,\omega) = \omega\,\varphi(x)\,e^{-\eta x},$$

$$G_\eta(x+\omega\,|\,\omega) + G_\eta(x\,|\,\omega) = 2\,\varphi(x)\,e^{-\eta x}.$$

En faisant tendre η vers zéro il vient

$$\mathop{\triangle}_{\omega} F(x\,|\,\omega) = \varphi(x), \tag{1}$$

$$\mathop{\nabla}_{\omega} G(x\,|\,\omega) = \varphi(x). \tag{2}$$

Soit n un entier positif quelconque. Remplaçons dans l'équation (6) x successivement par $x + \frac{\omega}{n}$, $x + \frac{2\omega}{n}$, $\ldots x + \frac{n-1}{n}\omega$; en ajoutant ensemble les n équations ainsi obtenues on trouve

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_\eta\left(x + \frac{s\,\omega}{n}\,\middle|\,\omega\right) = n\,F_\eta\left(x\,\middle|\,\frac{\omega}{n}\right).$$

Si l'on fait tendre η vers zéro on voit que la fonction $F(x\,|\,\omega)$ satisfait à la relation

$$\sum_{s=0}^{n-1} F\left(x + \frac{s\,\omega}{n}\,\middle|\,\omega\right) = n\,F\left(x\,\middle|\,\frac{\omega}{n}\right). \tag{14}$$

On démontre de la même manière que

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s F\left(x + \frac{s\,\omega}{n}\,\middle|\,\omega\right) = -\frac{\omega}{2}\,G\left(x\,\middle|\,\frac{\omega}{n}\right), \tag{15}$$

n étant un entier positif pair, et que

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s G\left(x + \frac{s\,\omega}{n}\,\middle|\,\omega\right) = G\left(x\,\middle|\,\frac{\omega}{n}\right), \tag{16}$$

n étant un entier positif impair. En posant $n = 2$ dans les équations (14) et (15) on trouve en particulier

[1] Nous démontrerons plus loin que cette hypothèse est satisfaite dans tous les cas que nous considérons dans ce mémoire. Seulement dans le paragraphe 29 nous avons modifié un peu la définition des fonctions F_η et G_η.

$$F(x\,|\,\omega) = \underset{\omega}{\nabla} F(x\,|\,2\,\omega), \tag{17}$$

$$G(x\,|\,\omega) = \underset{\omega}{\triangle} F(x\,|\,2\,\omega). \tag{18}$$

En soustrayant membre à membre ces deux équations on trouve

$$G(x\,|\,\omega) = \frac{2}{\omega}\,[F(x\,|\,\omega) - F(x\,|\,2\,\omega)]. \tag{19}$$

La fonction G s'exprime donc par la fonction F. J'aurais par conséquent pu me borner à considérer l'équation (1). Mais puisque l'équation (2) est plus simple que l'équation (1) il m'a paru intéressant de traiter séparément les deux cas.[1]

Cherchons maintenant d'évaluer l'intégrale suivante

$$\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F(x\,|\,\omega)\,dx. \tag{20}$$

Soit ε un nombre positif. On sait trouver un nombre η_0 tel que

$$|F_\eta(x\,|\,\omega) - F(x\,|\,\omega)| < \varepsilon, \qquad \text{si } 0 < \eta < \eta_0,$$

quel que soit x dans l'intervalle $B \geq x \geq b$. Par conséquent

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F_\eta(z\,|\,\omega)\,dz - \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F(z\,|\,\omega)\,dz\right| < \varepsilon.$$

En faisant tendre η vers zéro on trouve

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F_\eta(z\,|\,\omega)\,dz = \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F(z\,|\,\omega)\,dz.$$

D'autre part, puisque la série qui entre dans l'expression F_η converge uniformément par rapport à x, on peut intégrer terme par terme et l'on trouve

$$\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F_\eta(z\,|\,\omega)\,dz = \int_a^{\infty} \varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz - \int_x^{x+\omega} \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(z+s\omega)\,e^{-\eta(z+s\omega)}\,dz$$

[1] On peut aussi remarquer qu'il paraît peu satisfaisant de déduire les propriétés de la fonction uniforme G de celles d'une fonction non uniforme F.

$$= \int_a^\infty \varphi(z)\, e^{-\eta z}\, dz - \int_x^\infty \varphi(z)\, e^{-\eta z}\, dz = \int_a^x \varphi(z)\, e^{-\eta z}\, dz.$$

En faisant tendre le nombre positif η vers zéro dans cette égalité il vient

$$\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F(z\,|\,\omega)\, dz = \int_a^x \varphi(z)\, dz. \tag{21}$$

Cette intégrale s'annule donc en particulier si $x = a$.

En intégrant par rapport à x dans les deux membres de l'équation (19) on trouve

$$\frac{1}{2}\int_x^{x+\omega} G(z\,|\,\omega)\, dz = \int_a^x \varphi(z)\, dz - \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F(z\,|\,2\omega)\, dz \tag{22}$$

et l'on démontre aisément que la dernière intégrale est égale à

$$\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F(z\,|\,2\omega)\, dz = \mathop{\mathbf{S}}\left(\int_a^x \varphi(x)\, dx\right) \mathop{\nabla}_{\omega} x.$$

Cette égalité est vraie pourvu que l'expression au second membre tende uniformément vers une limite. On peut encore d'une autre manière évaluer l'intégrale (20). Divisons les deux membres de l'équation (14) par n et faisons tendre n vers l'infini. Le premier membre tend vers l'intégrale (20). Le second membre tend donc aussi vers une limite et l'on trouve

$$\lim_{n\to\infty} F\left(x\,\middle|\,\frac{\omega}{n}\right) = \int_a^x \varphi(z)\, dz.$$

De l'équation (16) on déduit de même en faisant tendre l'entier n vers l'infini

$$G(x\,|\,\omega) + \frac{1}{2}\int_x^{x+\omega} \frac{dG(z\,|\,\omega)}{dz}\, dz = \lim_{n\to\infty} G\left(x\,\middle|\,\frac{\omega}{n}\right).$$

Mais le premier membre est égal à $\varphi(x)$ en vertu de l'équation (2). On a donc

$$\lim_{n\to\infty} G\left(x\,\middle|\,\frac{\omega}{n}\right) = \varphi(x).$$

Je dis que les opérations définies par les limites (7) et (8) sont les inverses aux opérations $\underset{\omega}{\bigtriangledown}$ et $\underset{\omega}{\bigtriangleup}$. En effet, on a d'une part

$$\underset{\omega}{\bigtriangleup}\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}\varphi(x)\underset{\omega}{\bigtriangleup}x=\varphi(x),$$

$$\underset{\omega}{\bigtriangledown}\mathbf{S}\varphi(x)\underset{\omega}{\bigtriangledown}x=\varphi(x),$$

comme nous venons de le démontrer. Quelle est maintenant la valeur de la somme $\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}(\underset{\omega}{\bigtriangleup}\varphi(x))\underset{\omega}{\bigtriangleup}x$? On a évidemment

$$\begin{aligned}\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}(\underset{\omega}{\bigtriangleup}\varphi(x))\underset{\omega}{\bigtriangleup}x&=\frac{1}{\omega}\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}\varphi(x+\omega)\underset{\omega}{\bigtriangleup}x-\frac{1}{\omega}\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}\varphi(x)\underset{\omega}{\bigtriangleup}x\\&=\frac{1}{\omega}\underset{a+\omega}{\overset{x+\omega}{\mathbf{S}}}\varphi(x)\underset{\omega}{\bigtriangleup}x-\frac{1}{\omega}\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}\varphi(x)\underset{\omega}{\bigtriangleup}x\\&=\underset{\omega}{\bigtriangleup}\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}\varphi(x)\underset{\omega}{\bigtriangleup}x-\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}(\underset{\omega}{\bigtriangleup}\varphi(x))\underset{\omega}{\bigtriangleup}x=\varphi(x)-\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}\varphi(x)\,dx. \tag{23}$$

On voit de même que

$$\mathbf{S}(\underset{\omega}{\bigtriangledown}\varphi(x))\underset{\omega}{\bigtriangledown}x=\varphi(x). \tag{24}$$

Les équations (17) et (18) peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}\varphi(z)\underset{\omega}{\bigtriangleup}z=\underset{\omega}{\bigtriangledown}\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}\varphi(z)\underset{2\omega}{\bigtriangleup}z, \tag{25}$$

$$\mathop{\mathbf{S}}\varphi(x)\mathop{\nabla}\limits_{\omega} x = \mathop{\Delta}\limits_{\omega}\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z. \tag{26}$$

On peut en tirer deux autres relations remarquables. On a en effet

$$\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}(\mathop{\nabla}\limits_{\omega}\varphi(z))\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z = \frac{1}{2}\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(z+\omega)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z + \frac{1}{2}\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z$$

$$= \frac{1}{2}\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a+\omega}^{x+\omega}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z + \frac{1}{2}\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z$$

$$= \mathop{\nabla}\limits_{\omega}\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z - \frac{1}{2}\int_{a}^{a+\omega}\varphi(z)\,dz.$$

Par conséquent

$$\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}\mathop{\nabla}\limits_{\omega}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{\omega} z - \frac{1}{2}\int_{a}^{a+\omega}\varphi(z)\,dz.$$

En remplaçant $\varphi(x)$ par $G(x\,|\,\omega)$ dans cette équation, on trouve, en tenant compte de l'équation (22)

$$\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}G(z\,|\,\omega)\mathop{\Delta}\limits_{\omega} z = F(x\,|\,2\omega) - \frac{1}{\omega}\int_{a}^{a+\omega}F(z\,|\,2\omega)\,dz,$$

ou encore

$$\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}\Big(\mathop{\mathbf{S}}\varphi(z)\mathop{\nabla}\limits_{\omega} z\Big)\mathop{\Delta}\limits_{\omega} z = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z - \frac{1}{\omega}\int_{a}^{a+\omega}F(z\,|\,2\omega)\,dz.$$

Considérons enfin la somme $\mathop{\mathbf{S}}\mathop{\Delta}\limits_{\omega}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z$. On a évidemment

$$\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}(\mathop{\Delta}\limits_{\omega}\varphi(z))\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z = \frac{1}{\omega}\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a+\omega}^{x+\omega}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z - \frac{1}{\omega}\mathop{\mathbf{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\Delta}\limits_{2\omega} z$$

$$= \mathop{\triangle}_{\omega} \mathop{S}_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\triangle}_{2\omega} z - \frac{1}{\omega}\int_{a}^{a+\omega} \varphi(z)\, dz.$$

Pas conséquent, en vertu de l'équation (26)

$$\mathop{S}_{a}^{x} \mathop{\triangle}_{\omega} \varphi(z) \mathop{\triangle}_{2\omega} z = \mathop{S} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega} x - \frac{1}{\omega}\int_{a}^{a+\omega} \varphi(z)\, dz.$$

Si l'on remplace $\varphi(x)$ par la fonction $F(x \mid \omega)$, cette équation prend la forme suivante

$$\mathop{S} F(x \mid \omega) \mathop{\nabla}_{\omega} x = F(x \mid 2\omega),$$

ou encore

$$\mathop{S} \left(\mathop{S}_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\triangle}_{\omega} z \right) \mathop{\nabla}_{\omega} x = \mathop{S}_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\triangle}_{2\omega} z.$$

Toutes ces propriétés des solutions principales se déduisent presque sans aucun calcul et ce n'est pas là un des moindres avantages de la définition que nous avons adoptée pour ces fonctions. Mais il y a d'autres propriétés qui sont plus cachées. Pour les découvrir nous allons nous servir de certaines formules sommatoires.

La formule sommatoire de Boole.

3. Soit $\dot{E}_\nu(x)$ le polynome d'Euler, c'est à dire le polynome qui satisfait à l'équation

$$E_\nu(x+1) + E_\nu(x) = 2x^\nu. \tag{1}$$

Soit $\dot{E}_\nu(x)$ une fonction périodique qui satisfait à l'équation

$$\dot{E}_\nu(x+1) = -\dot{E}_\nu(x)$$

et qui est égale au polynome d'Euler $E_\nu(x)$ dans l'intervalle $0 \leq x < 1$. La fonction $\dot{E}_\nu(x)$ est uniquement déterminée par ces deux conditions. Des propriétés des polynomes d'Euler il résulte que

$$\frac{d\,\dot{E}_\nu(x)}{dx} = \nu\, \dot{E}_{\nu-1}(x).$$

En posant $x=0$ dans l'équation (1) on obtiendra

$$E_\nu(1) = -E_\nu(0), \qquad si\ \nu > 0.$$

$\dot{E}_\nu(x)$ est donc une fonction continue de x qui admet des dérivées continues des ordres $1, 2, \ldots, \nu-1$. Mais la dérivée d'ordre ν est discontinue dans les points $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, car $\dot{E}_0(x)$ est égale à $+1$ dans les intervalles $2n < x < 2n+1$ et égale à -1 dans les intervalles $2n-1 < x < 2n$, n étant un entier.

Soit h un nombre quelconque dans l'intervalle $0 \leq h \leq 1$. Soit $\varphi(z)$ une fonction qui admet une dérivée continue d'ordre m dans l'intervalle $x \leq z \leq x+\omega$. Considérons l'intégrale suivante

$$R_m = \omega^m \int_0^1 \frac{\dot{E}_{m-1}(h-z)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+\omega z)\, dz. \tag{2}$$

En intégrant par partie on trouve, si $m > 1$,

$$R_m = -\frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} E_{m-1}(h) [\varphi^{(m-1)}(x+\omega) + \varphi^{(m-1)}(x)] + R_{m-1}.$$

On a donc

$$R_m = -\sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) [\varphi^{(\nu)}(x+\omega) + \varphi^{(\nu)}(x)] + R_1.$$

Il est facile d'évaluer l'intégrale R_1. On a en effet

$$R_1 = \omega \int_0^1 \dot{E}_0(h-z) \varphi'(x+\omega z)\, dz = \omega \int_0^h \varphi'(x+\omega z)\, dz - \omega \int_h^1 \varphi'(x+\omega z)\, dz$$
$$= 2\varphi(x+h\omega) - \varphi(x) - \varphi(x+\omega).$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente on trouve

$$2\varphi(x+h\omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) [\varphi^{(\nu)}(x+\omega) + \varphi^{(\nu)}(x)] + R_m. \tag{3}$$

Cette formule a été indiquée, sans terme reste, par Boole[1] dans le cas particulier $h=0$. Quand m augmente indéfiniment la série convergera seulement dans des cas très particuliers. Le terme reste de la formule de Boole a été trouvé par

[1] A Treatise on Differential Equations (2e éd.). London 1865, p. 107–9.

DARBOUX[1], SCHENDEL[2], HERMITE[3] et STIELTJES[4]. On peut remarquer que si l'on remplace h par $\frac{h}{\omega}$ et fait ensuite tendre ω vers zéro, l'équation (3) se réduit à la formule de Taylor avec son terme complémentaire.

Indiquons rapidement quelques applications simples de cette formule. Soit $\varphi(x) = E_{m+n}(x)$ et posons $\omega = 1$, $h = 0$ dans l'équation (3); il vient

$$E_{m+n}(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{m+n}{\nu} \frac{C_\nu}{2^\nu} x^{m+n-\nu} + (-1)^m \frac{1}{2} \frac{(m+n)!}{(m-1)!\,n!} \int_0^1 E_{m-1}(z)\, E_n(x+z)\, dz.$$

Mais en posant $h = \frac{1}{2}$ on trouve

$$E_{m+n}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{m+n}{\nu} \frac{E_\nu}{2^\nu} x^{m+n-\nu} + (-1)^m \frac{1}{2} \frac{(m+n)!}{(m-1)!\,n!} \int_0^1 E_{m-1}\left(z - \frac{1}{2}\right) E_n(x+z)\, dz.$$

En faisant tendre x vers zéro dans ces deux équations on trouve en particulier

$$\int_0^1 E_m(z)\, E_n(z)\, dz = (-1)^{m+1} \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \frac{C_{m+n+1}}{2^{m+n}},$$

m et n étant des entiers non négatifs quelconques, et

$$\int_0^{\frac{1}{2}} E_m\left(z + \frac{1}{2}\right) E_n(z)\, dz = (-1)^m \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \frac{E_{m+n+1}}{2^{m+n+1}}.$$

Dans la dernière équation on suppose que $m+n$ est impair.

Supposons en second lieu que $\varphi(x) = e^x$. Nous aurons

$$\frac{2e^{h\omega}}{e^\omega + 1} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) + \frac{\omega^{m+1}}{e^\omega + 1} \int_0^1 \frac{E_m(h-z)}{m!} e^{\omega z}\, dz. \tag{4}$$

---

[1] Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable, J. math. pures appl. (3) 2 (1876), p. 291—312.

[2] Die Bernoulli'schen Functionen und das Taylor'sche Theorem. Jena 1876.

[3] J. reine angew. Math. 116 (1896), p. 144—5; Œuvres 4, Paris 1917, p. 443—4.

[4] Correspondance d'Hermite et de Stieltjes 2, Paris 1905, p. 311—2.

Cette série a servi à Hermite[1] comme définition des polynomes $E_\nu(h)$. Si nous prenons $\varphi(x) = \sin x$ nous aurons, en posant $x = -\frac{\omega}{2}$,

$$\frac{\sin\left(h - \frac{1}{2}\right)\omega}{\cos\frac{\omega}{2}} = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} E_{2\nu+1}(h) + R_m, \tag{5}$$

où

$$R_m = \frac{(-1)^m \omega^{2m+1}}{2\cos\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{\dot{E}_{2m}(h-z)}{(2m)!} \cos\left(z - \frac{1}{2}\right)\omega\, dz$$

$$= \frac{(-1)^m \omega^{2m}}{2\cos\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{\dot{E}_{2m-1}(h-z)}{(2m-1)!} \sin\left(z - \frac{1}{2}\right)\omega\, dz.$$

En prenant $\varphi(x) = \cos x$ nous trouverons de même

$$\frac{\cos\left(h - \frac{1}{2}\right)\omega}{\cos\frac{\omega}{2}} = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu}(h) + R_m, \tag{6}$$

où

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1} \omega^{2m+1}}{2\cos\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{\dot{E}_{2m}(h-z)}{(2m)!} \sin\left(z - \frac{1}{2}\right)\omega\, dz$$

$$= \frac{(-1)^{m+1} \omega^{2m+2}}{2\cos\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{\dot{E}_{2m+1}(h-z)}{(2m+1)!} \cos\left(z - \frac{1}{2}\right)\omega\, dz.$$

Si l'on fait tendre m vers l'infini les trois dernières séries convergeront pourvu que $|\omega| < \pi$. En posant en particulier $h = 1$ dans l'équation (5) et en remplaçant ω par 2ω, on trouvera

$$tg\,\omega = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{\nu+1} \frac{\omega^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} C_{2\nu+1} + R_m, \tag{7}$$

[1] l. c. p. 144.

où

$$R_m = \frac{(-4)^m \omega^{2m+1}}{\cos\omega} \int_0^1 \frac{E_{2m}(z)}{(2m)!} \cos(2z-1)\omega\, dz$$

$$= \frac{(-4)^{m-1}\, 2\, \omega^{2m}}{\cos\omega} \int_0^1 \frac{E_{2m-1}(z)}{(2m-1)!} \sin(2z-1)\omega\, dz.$$

En posant $h = \frac{1}{2}$ dans l'équation (6), on trouvera de même

$$\text{séc}\, \omega = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu} + R_m,$$

où

$$R_m = \frac{(-4)^m\, 2\, \omega^{2m+1}}{\cos\omega} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{E_{2m}(z)}{(2m)!} \sin 2\omega z dz = \frac{(-4)^{m+1} \omega^{2m+2}}{\cos\omega} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{E_{2m+1}(z)}{(2m+1)!} \cos 2\omega z dz.$$

De ces expressions du terme reste on déduit aisément les séries trigonométriques qui représentent les polynomes $E_m(x)$ dans l'intervalle $0 < x < 1$. Pour trouver les coefficients de ces séries il suffit de multiplier les deux membres de l'équation (7) par $\cos\omega$ et de poser $\omega = \pi s + \frac{\pi}{2}$, s étant un entier positif.

4. On sait que Leibniz a démontré que la série alternée

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(s)$$

est convergente, si $\varphi(x)$ est une fonction non croissant avec x, ayant pour x infini, la limite zéro. A l'aide de la formule de Boole on peut décider de la convergence de cette série en des cas plus généraux. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ tende vers zéro, quand x augmente indéfiniment, et qu'elle admette, pour $x \geq b$, une dérivée continue d'ordre m telle que l'intégrale

$$\int_b^\infty |\varphi^{(m)}(x)|\, dx$$

converge. *Dans ces conditions la série*

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x+s) \tag{8}$$

sera uniformément convergente dans l'intervalle $x \geq b$.

En effet posons $h = 0$ et $\omega = 1$ dans l'équation (3) et remplaçons x successivement par $x+1, x+2, \ldots x+n-1$. En combinant les n équations ainsi obtenues on obtiendra, pour $x \geq b$,

$$2 \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \varphi(x+s)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu}{2^\nu \nu!} [\varphi^{(\nu)}(x) - (-1)^n \varphi^{(\nu)}(x+n)] + (-1)^m \int_0^n \frac{\dot{E}_{m-1}(z)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+z)\, dz. \tag{9}$$

Rappelons le théorème suivant dû à MM. Hardy et Littlewood [1]: Si une fonction tend vers une limite, quand x augmente indéfiniment, et admet une dérivée d'un certain ordre qui est continue et bornée, alors les dérivées d'ordres inférieurs tendent nécessairement vers zéro quand x tend vers l'infini. De nos hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$ il résulte donc que

$$\lim_{x \to \infty} \varphi^{(\nu)}(x) = 0, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots m-1.$$

Cela posé, faisons tendre n vers l'infini dans l'équation (9). Le premier terme au second membre tend uniformément vers une limite et l'intégrale

$$\int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(z)\, \varphi^{(m)}(x+z)\, dz$$

est absolument convergente parce que la fonction $\dot{E}_{m-1}(z)$ est bornée. La série (8) est donc uniformément convergente et sa somme est égale à l'expression suivante

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x+s) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu}{2^{\nu+1} \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \frac{(-1)^m}{2} \int_0^\infty \frac{\dot{E}_{m-1}(z)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+z)\, dz.$$

Si $m = 1$ le théorème ne diffère guère du théorème de Leibniz. Mais en choisissant m convenablement on peut décider de la convergence de plusieurs séries intéressantes qui ne rentrent pas dans le cas de Leibniz. On voit par exemple que la série

$$\sum (-1)^s \frac{\sin(s^\alpha)}{\log_p s}$$

[1] Proc. London math. Soc. (2) 9 (1911), p. 437—8; (2) 11 (1913), p. 422—3.

sera convergente, si $0 < \alpha < 1$. Il en est de même de la série

$$\sum (-1)^s \frac{\sin(\log_r s)}{\log_p s},$$

r et p étant des entiers positifs quelconques. Ici on a posé pour abréger

$$\log_p s = \log(\log_{p-1} s).$$

Démonstration de l'existence de la fonction $G(x \mid \omega)$.

5. On peut aussi, à l'aide de la transformation de Boole, en des cas assez étendus, décider de la sommabilité d'une série divergente. Soit $\varphi(x)$ une fonction qui admet, pour $x \geq b$, une dérivée continue d'ordre m telle que la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(m)}(x + s\omega) \tag{10}$$

converge uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq b + \omega$. Soit B un nombre positif quelconque qui est plus grand que b. *Je veux démontrer que l'expression*

$$G(x \mid \omega) = 2 \lim_{\eta \to 0} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} \tag{11}$$

tend uniformément vers une limite, x variant dans un intervalle fini quelconque $b \leq x \leq B$. Cette limite est donc la solution principale de l'équation

$$\mathop{\nabla}_{\omega} G(x) = \varphi(x).$$

Notre hypothèse relativement à la série (10) entraîne que

$$\lim_{x \to \infty} \varphi^{(m)}(x) = 0.$$

On en conclut aisément que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi^{(m-\nu)}(x)}{x^\nu} = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots m. \tag{12}$$

En particulier on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x^m} = 0.$$

La série au second membre de l'équation (11) convergera donc pour toute valeur positive de η et pour toute valeur de $x \geq b$. Cela posé, reprenons l'équation (3) et remplaçons x successivement par $x+\omega, x+2\omega, \ldots x+(n-1)\omega$. En combinant les n équations ainsi obtenues on trouve

$$2\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\varphi(x+h\omega+s\omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\omega^\nu}{\nu!}E_\nu(h)\left[\varphi^{(\nu)}(x)-(-1)^n\varphi^{(\nu)}(x+n\omega)\right]$$
$$+\,\omega^m\int_0^n\frac{\bar{E}_{m-1}(h-z)}{(m-1)!}\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz.$$

Dans cette relation substituons $\varphi(x)\,e^{-\eta x}$ au lieu de $\varphi(x)$, nous aurons

$$2\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\varphi(x+h\omega+s\omega)\,e^{-\eta(x+h\omega+s\omega)}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\omega^\nu}{\nu!}E_\nu(h)\,D_x^\nu[\varphi(x)\,e^{-\eta x}]-(-1)^n\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\omega^\nu}{\nu!}E_\nu(h)\,D_x^\nu[\varphi(x+n\omega)\,e^{-\eta(x+n\omega)}]$$
$$+\frac{\omega^m}{(m-1)!}\int_0^n\bar{E}_{m-1}(h-z)\,D_x^m[\varphi(x+\omega z)\,e^{-\eta(x+\omega z)}]\,dz.$$

Laissons η fixe et positif et faisons tendre n vers l'infini. Le second terme au second membre tendra vers zéro en vertu de l'équation (12). On a par conséquent

$$2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+h\omega+s\omega)\,e^{-\eta(x+h\omega+s\omega)}=\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\omega^\nu}{\nu!}E_\nu(h)\,D_x^\nu[\varphi(x)\,e^{-\eta x}]$$
$$+\frac{\omega^m}{(m-1)!}\int_0^\infty\bar{E}_{m-1}(h-z)\,D_x^m[\varphi(x+\omega z)\,e^{-\eta(x+\omega z)}]\,dz. \qquad (13)$$

Faisons maintenant tendre η vers zéro. Le premier terme au second membre convergera uniformément vers une limite. Le second terme s'exprime par un nombre fini d'intégrales de la forme

$$P_\nu=\eta^\nu\int_0^\infty\bar{E}_{m-1}(h-z)\,\varphi^{(m-\nu)}(x+\omega z)\,e^{-\eta(x+\omega z)}\,dz, \qquad \nu=0,1,2,\ldots m.$$

Je dis que P_ν tend vers zéro avec η, si $\nu>0$. Pour le voir considérons l'intégrale

$$\psi(z) = \int\limits_z^\infty \dot{E}_{m-1}(h-z)\, e^{-\eta\omega z}\, dz.$$

Cette intégrale divergera si $\eta = 0$. Mais elle converge pour toute valeur positive de η et elle tend vers une limite finie quand n tend vers zéro. En effet, on a, si $\eta > 0$,

$$\psi(z) = e^{-\eta\omega z} \sum_{s=0}^{\infty} \int\limits_s^{s+1} \dot{E}_{m-1}(h-z-t)\, e^{-\eta\omega t}\, dt$$

$$= e^{-\eta\omega z} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s e^{-\eta\omega s} \int\limits_0^1 \dot{E}_{m-1}(h-z-t)\, e^{-\eta\omega t}\, dt$$

$$= \frac{e^{-\eta\omega z}}{1+e^{-\eta\omega}} \int\limits_0^1 \dot{E}_{m-1}(h-z-t)\, e^{-\eta\omega t}\, dt.$$

Quel que soit η la dernière intégrale est une fonction périodique de z avec la période 2. Quand η tend vers zéro elle tend vers une limite finie

$$\lim_{\eta \to 0} \psi(z) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \dot{E}_{m-1}(h-z-t)\, dt = \frac{\dot{E}_m(h-z)}{m}.$$

On sait donc trouver un nombre positif C tel que pour toute valeur positive de η

$$|\psi(z)| < C\, e^{-\eta\omega z}$$

et cela quel que soit z. En particulier, quand z augmente indéfiniment pendant que η reste positif et fixe, la fonction $z^p \psi(z)$ tend vers zéro quel que soit p. Cela posé, soit ν un des nombres $1, 2, \ldots m$ et considérons P_ν. En intégrant par partie on trouve

$$P_\nu = \eta^\nu e^{-\eta x} \psi(0)\, \varphi^{(m-\nu)}(x) + \omega \eta^\nu e^{-\eta x} \int\limits_0^\infty \varphi^{(m-\nu+1)}(x+\omega z)\, \psi(z)\, dz.$$

Le premier terme au second membre tend vers zéro avec η parce que $\psi(0)$ tend vers une limite finie. La valeur absolue du second terme est plus petite que

$$\eta^\nu C \int\limits_x^\infty |\varphi^{(m-\nu+1)}(z)|\, e^{-\eta z}\, dz. \tag{14}$$

Mais de l'égalité (12) il résulte qu'on sait trouver un nombre positif N tel que

$$|\varphi^{(m-\nu+1)}(z)| < \varepsilon z^{\nu-1}, \qquad \text{si } z > N$$

quel que soit le nombre positif ε. En désignant l'intégrale (14) par P_ν^1 on a donc

$$P_\nu^1 < \eta^\nu C \int_x^N |\varphi^{(m-\nu+1)}(x)|\, dz + \eta^\nu C \varepsilon \int_N^\infty z^{\nu-1} e^{-\eta z}\, dz$$

et par conséquent

$$P_\nu^1 < \eta^\nu C \int_x^N |\varphi^{(m-\nu+1)}(x)|\, dz + \varepsilon C \int_0^\infty z^{\nu-1} e^{-z}\, dz.$$

Le premier terme au second membre de cette inégalité tend vers zéro avec η. Comme ε est aussi petit que l'on veut, nous avons donc démontré que P_ν tend uniformément vers zéro, si $\nu > 0$, quel que soit x dans l'intervalle $b \leq x \leq B$.

Il nous reste d'envisager le cas $\nu = 0$. Posons

$$f(z) = \int_z^\infty \dot{E}_{m-1}(h-z)\, \varphi^{(m)}(x+\omega z)\, dz. \tag{15}$$

Je dis que cette intégrale converge uniformément. En effet on a

$$\begin{aligned}\int_n^{n+p+1} \dot{E}_{m-1}(h-z)\, \varphi^{(m)}(x+\omega z)\, dz &= \sum_{s=n}^{n+p} \int_s^{s+1} \dot{E}_{m-1}(h-z)\, \varphi^{(m)}(x+\omega z)\, dz \\ &= \sum_{s=n}^{n+p} (-1)^s \int_0^1 \dot{E}_{m-1}(h-z)\, \varphi^{(m)}(x+\omega z+s\omega)\, dz \\ &= \int_0^1 \dot{E}_{m-1}(h-z) \sum_{s=n}^{n+p} (-1)^s \varphi^{(m)}(x+\omega z+s\omega)\, dz.\end{aligned}$$

Mais puisque la série (10) converge uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq B$ on conclut aisément qu'il en est de même de l'intégrale (15). Cela posé, considérons P_0 et intégrons par partie; on trouve

$$P_0 = e^{-\eta x} f(0) - \eta\, \omega \int_0^\infty f(z)\, e^{-\eta(x+\omega z)}\, dz.$$

Soit ε un nombre positif. On sait trouver un nombre N, qui ne dépend pas de x, tel que

$$|f(z)| < \varepsilon, \qquad \text{si } z \geq N.$$

On a donc

$$\left|\eta\omega\int_0^\infty f(z)\, e^{-\eta(x+\omega z)}\, dz\right| < \eta\omega\, e^{-\eta x}\int_0^N |f(z)|\, dz + \varepsilon\eta\omega\int_N^\infty e^{-\eta(x+\omega z)}\, dz$$

$$= \eta\omega\, e^{-\eta x}\int_0^N |f(z)|\, dz + \varepsilon\, e^{-\eta(x+\omega N)}.$$

Quand η tend vers zéro le dernier membre tend vers ε. Comme ε est aussi petit que l'on veut on en conclut que P_0 tend uniformément vers $f(0)$ quand η tend vers zéro. Nous avons ainsi démontré que le second membre de l'équation (11) tend uniformément vers une limite et qu'on a

$$G(x+h\omega\,|\,\omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\omega^\nu}{\nu!}E_\nu(h)\,\varphi^{(\nu)}(x) + \frac{\omega^m}{(m-1)!}\int_0^\infty \bar{E}_{m-1}(h-z)\,\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz \tag{16}$$

pourvu que $0 \leq h \leq 1$. *On en conclut en particulier que $G(x\,|\,\omega)$ est une fonction continue de x pour toute valeur de $x > b$.*

Soit par exemple $\varphi(x) = \log x$. On trouve[1] en prenant $m = 1$ et $h = 0$

$$\mathop{\mathrm{S}}\log x \,\nabla\, x = \log x - \sum_{s=0}^\infty (-1)^s \log\left(1 + \frac{1}{x+s}\right).$$

Il résulte du théorème du paragraphe 4 que la série au second membre converge pour toute valeur de x qui n'est pas un entier négatif ou nul.

Soit en second lieu $\varphi(x) = x^\nu$, ν étant un entier non négatif. En prenant $m = \nu + 1$ l'équation (16) se réduit à la relation suivante

$$\mathop{\mathrm{S}} x^\nu \,\nabla\, x = E_\nu(x).$$

Le polynome d'Euler $E_\nu(x)$ est donc la somme de la série divergente

$$2\sum_{s=0}^\infty (-1)^s (x+s)^\nu.$$

[1] Quand $\omega = 1$ j'écris ∇ et $\triangle$ au lieu de $\underset{\omega}{\nabla}$ et $\underset{\omega}{\triangle}$.

On peut vérifier ce fait un peu plus directement de la manière suivante. Si $\eta > 0$ on a

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s e^{-\eta(x+s)} = \frac{e^{-\eta x}}{1+e^{-\eta}}.$$

En dérivant ν fois par rapport à η on trouve

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (x+s)^\nu e^{-\eta(x+s)} = (-1)^\nu D_\eta^\nu \frac{e^{-\eta x}}{1+e^{-\eta}}. \tag{17}$$

D'autre part en développant suivant les puissances de η on aura

$$\frac{2e^{-\eta x}}{1+e^{-\eta}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^\nu}{\nu!} E_\nu(x).$$

En faisant tendre η vers zéro dans l'équation (17) on trouve donc

$$\lim_{\eta \to 0} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (x+s)^\nu e^{-\eta(x+s)} = E_\nu(x).$$ [1]

En posant en particulier $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ on voit que les entiers C_ν et E_ν se représentent par les limites suivantes

$$C_\nu = \lim_{\eta \to 0} 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s (2s)^\nu e^{-\eta s}.$$

$$E_\nu = \lim_{\eta \to 0} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1)^\nu e^{-\eta s}.$$

La formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin.

6. La formule de Boole est voisine d'une autre formule sommatoire que nous allons maintenant étudier. Soit $B_\nu(x)$ le polynome de Bernoulli, c'est à dire le polynome qui satisfait à l'équation

$$B_\nu(x+1) - B_\nu(x) = \nu x^{\nu-1},$$

[1] Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme suivante

$$E_\nu(x) = \lim_{\rho \to 1} 2(\rho D_\rho)^\nu \frac{\rho^x}{\rho+1}.$$

et qui est égal au nombre de Bernoulli B_ν dans le point $x=0$. Soit $\dot{B}_\nu(x)$ une fonction périodique avec la période 1 qui est déterminée par la condition suivante:

$$\dot{B}_\nu(x) = B_\nu(x), \qquad \text{si } 0 \leq x < 1.$$

On a évidemment

$$B_\nu(1) = B_\nu(0), \qquad \text{si } \nu \gtreqless 1.$$

La fonction $\dot{B}_\nu(x)$ est donc continue dans le point $x=1$ et par conséquent pour toutes les valeurs de x, si $\nu \gtreqless 1$. Des propriétés des polynomes de Bernoulli il résulte que

$$\frac{d\dot{B}_\nu(x)}{dx} = \nu \dot{B}_{\nu-1}(x), \qquad \nu > 1.$$

$\dot{B}_\nu(x)$ admet par conséquent des dérivées continues des ordres $1, 2, \ldots \nu-2$. Mais la dérivée d'ordre $\nu-1$ est discontinue dans les points $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ car $\dot{B}_1(x)$ est égal à $x - \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $0 \leq x < 1$. Cette fonction périodique fait donc un saut brusque égal à 1 quand x passe par un entier.

Soit comme plus haut $0 \leq h \leq 1$, et supposons que la fonction $\varphi(z)$ admette une dérivée continue d'ordre m dans l'intervalle $x \leq z \leq x+\omega$. Envisageons l'intégrale suivante

$$R_m = -\omega^m \int_0^1 \frac{\dot{B}_m(h-z)}{m!} \varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz. \tag{1}$$

En intégrant par partie on trouve, si $m > 1$,

$$R_m = -\omega^{m-1} \frac{B_m(h)}{m!} [\varphi^{(m-1)}(x+\omega) - \varphi^{(m-1)}(x)] + R_{m-1}.$$

En répétant cette opération $m-2$ fois on obtient

$$R_m = -\sum_{\nu=2}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \mathop{\triangle}_{\omega} \varphi^{(\nu-1)}(x) + R_1. \tag{2}$$

Intégrons encore une fois par partie, nous aurons, en tenant compte de ce que $\dot{B}_1(h-z)$ est discontinue dans le point $z=h$,

$$R_1 = \varphi(x+h\omega) - \omega B_1(h) \mathop{\triangle}_{\omega} \varphi(x) - \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} \varphi(z)\,dz.$$

En substituant cette expression dans l'équation (2) on obtient

$$\varphi(x+h\omega)=\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega}\varphi(z)\,dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu}{\nu!}B_\nu(h)\mathop{\triangle}_{\omega}\varphi^{(\nu-1)}(x)+R_m. \tag{3}$$

C'est la célèbre formule sommatoire d'Euler. Le terme complémentaire a été étudié par un grand nombre d'auteurs et notamment par Poisson[1], Jacobi[2], Malmstén[3], Darboux[5], Schendel[5], Sonin[4] et Lindelöf[5].

Nous allons nous servir de cette formule pour démontrer l'existence de la limite

$$\mathop{\mathsf{S}}\varphi(x)\mathop{\triangle}_{\omega}x.$$

Mais indiquons d'abord quelques applications élémentaires de la formule d'Euler. Prenons $\varphi(x)=B_{m+n}(x)$, et posons $\omega=1$, $h=0$ dans l'équation (3), nous aurons

$$B_{m+n}(x)=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m+n}{\nu}B_\nu x^{m+n-\nu}-(-1)^m\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\int_0^1 B_m(z)\,B_n(x+z)\,dz.$$

Mais en posant $h=\frac{1}{2}$, on obtient

$$B_{m+n}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m+n}{\nu}\frac{D_\nu}{2^\nu}x^{m+n-\nu}-(-1)^m\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\int_0^1 B_m\left(z-\frac{1}{2}\right)B_n(x+z)\,dz.$$

Faisons tendre x vers zéro. La première équation se réduit à

$$\int_0^1 B_m(z)\,B_n(z)\,dz=(-1)^{m+1}\frac{m!\,n!}{(m+n)!}B_{m+n},$$

m et n étant des entiers positifs quelconques. De la seconde équation on déduit de même que:

[1] Mém. Acad. Sc. Paris 6 (1823), p. 571.
[2] J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 263—72; Werke 6, Berlin 1891, p. 64—75.
[3] J. reine angew. Math. 35 (1847), p. 55—82; réimprimé Acta math. 5 (1884), p. 1—46.
[4] Ann. Éc. Norm. (3) 6 (1889), p. 257—62; C. R. Acad. Sc. Paris 108 (1889), p. 725—7.
[5] l. c.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_m\left(z+\frac{1}{2}\right) B_n(z)\,dz = (-1)^{m+1}\frac{m!\,n!}{(m+n)!}\frac{D_{m+n}}{2^{m+n+1}},$$

pourvu que $m+n$ soit pair.

Posons en second lieu $\varphi(x) = e^x$, nous aurons

$$\frac{\omega e^{h\omega}}{e^\omega - 1} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) - \frac{\omega^{m+1}}{e^\omega - 1}\int_0^1 \frac{\dot{B}_m(h-z)}{m!} e^{\omega z}\,dz. \tag{4}$$

La fonction au premier membre est donc la fonction génératrice des polynomes de Bernoulli. Cette fonction génératrice a servi de base à plusieurs auteurs dans l'étude des polynomes de Bernoulli. L'expression du terme complémentaire de la série n'a pas, je crois, été donnée auparavant.

Si nous prenons $\varphi(x) = \sin x$ nous aurons, en posant $x = -\frac{\omega}{2}$,

$$\frac{\omega \sin\left(h-\frac{1}{2}\right)\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}} = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} B_{2\nu+1}(h) + R_m,$$

où

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}\omega^{2m+1}}{2\sin\frac{\omega}{2}}\int_0^1 \frac{\dot{B}_{2m}(h-z)}{(2m)!}\sin\left(z-\frac{1}{2}\right)\omega\,dz$$

$$= \frac{(-1)^m\omega^{2m}}{2\sin\frac{\omega}{2}}\int_0^1 \frac{\dot{B}_{2m-1}(h-z)}{(2m-1)!}\cos\left(z-\frac{1}{2}\right)\omega\,dz.$$

En posant $\varphi(x) = \cos x$ on obtient de même

$$\frac{\omega \cos\left(h-\frac{1}{2}\right)\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}} = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu}(h) + R_m, \tag{5}$$

où

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}\,\omega^{2m+1}}{2\sin\frac{\omega}{2}}\int_0^1 \frac{\dot{B}_{2m}(h-z)}{(2m)!}\cos\left(z-\frac{1}{2}\right)\omega\,dz$$

$$= \frac{(-1)^m\,\omega^{2m+2}}{2\sin\frac{\omega}{2}}\int_0^1 \frac{\dot{B}_{2m+1}(h-z)}{(2m+1)!}\sin\left(z-\frac{1}{2}\right)\omega\,dz.$$

Quand m augmente indéfiniment ces trois séries convergeront pourvu que $|\omega| < 2\pi$. Posons en particulier $h = 1$ dans la dernière série, nous aurons le développement bien connu

$$\frac{\omega}{2}\cot\frac{\omega}{2} = \sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!}B_{2\nu} + R_m, \tag{6}$$

où

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}\,\omega^{2m+1}}{2\sin\frac{\omega}{2}}\int_0^1 \frac{B_{2m}(z)}{(2m)!}\cos\left(z-\frac{1}{2}\right)\omega\,dz$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}\,\omega^{2m+2}}{2\sin\frac{\omega}{2}}\int_0^1 \frac{B_{2m+1}(z)}{(2m+1)!}\sin\left(z-\frac{1}{2}\right)\omega\,dz.$$

Mais en prenant $h = \frac{1}{2}$ dans l'équation (5) on obtient

$$\omega\ \text{cosé}c\ \omega = \sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!}D_{2\nu} + R_m,$$

où

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}(2\omega)^{2m+1}}{\sin\omega}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2m}(z)}{(2m)!}\cos 2z\omega\,dz$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}(2\omega)^{2m+2}}{\sin\omega}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2m+1}(z)}{(2m+1)!}\sin 2z\omega\,dz.$$

7. A l'aide de la formule d'Euler on peut décider de la convergence de certaines séries qu'il paraît difficile d'aborder par d'autres voies. On connaît le

théorème suivant, dû à MACLAURIN[1] et à CAUCHY[2]: Soit $\varphi(x)$ une fonction, positive à partir d'une certaine valeur de x, continuellement décroissante et tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment. Alors la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s) \tag{7}$$

sera convergente ou divergente suivant que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \varphi(x)\, dx \tag{8}$$

aura ou non un sens. MM. BROMWICH[3] et HARDY[4] ont démontré que ce théorème reste vrai dans certains cas où la fonction n'est pas décroissante. Soit $\varphi(x)$ une fonction tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment et admettant, pour $x \geq 1$, une dérivée continue d'ordre m telle que l'intégrale[5]

$$\int_1^{\infty} B_m(-x)\, \varphi^{(m)}(x)\, dx$$

sera convergente. Supposons en outre que

$$\lim_{x \to \infty} \varphi^{(m-1)}(x) = 0.$$

Dans ces conditions la série (7) *sera convergente ou divergente suivant que l'intégrale* (8) *aura ou non un sens.*[6]

En effet posons $\omega = 1$ et $h = 0$ dans l'équation (3) et remplaçons x successivement par $1, 2, \ldots n-1$. En ajoutant ensemble les équations ainsi obtenues on trouve

---

[1] A treatise of fluxions I, Edinburgh 1742, p. 289—90.

[2] Sur la convergence des séries, Œuvres (2) 7, Paris 1889, p. 267—79.

[3] Proc. London math. Soc. (2) 6 (1908), p. 327—38.

[4] id. (2) 9 (1911), p. 126—44.

[5] Cette intégrale sera convergente par exemple si $\varphi^{(m)}(x)$ tend vers zéro en variant toujours dans le même sens quand x augmente indéfiniment, ou encore si l'intégrale

$$\int_1^{\infty} |\varphi^{(m)}(x)|\, dx$$

a un sens.

[6] Ce théorème est essentiellement le même que celui de M. Hardy (l. c.). Je l'ai énoncé sous une forme un peu plus générale mais la différence des deux énoncés n'a guère d'importance.

$$\int_1^n \varphi(x)\,dx - \sum_{s=1}^{n-1} \varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{B_\nu}{\nu!}\left(\varphi^{(\nu-1)}(1) - \varphi^{(\nu-1)}(n)\right) + \int_1^n \frac{\bar{B}_m(-x)}{m!}\varphi^{(m)}(x)\,dx, \tag{9}$$

n étant un entier positif quelconque. Faisons tendre n vers l'infini. Nos hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$ entraînent que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(\nu)}(x) = 0, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots m-1;$$

c'est ce qu'on voit en tenant compte du théorème de MM. Littlewood et Hardy mentionné dans le paragraphe 4. Le second membre de l'équation (9) tend par conséquent vers une limite quand n augmente indéfiniment. Il en est donc de même du premier membre et l'on aura

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_1^n \varphi(x)\,dx - \sum_{s=1}^{n-1}\varphi(s)\right] = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{B_\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(1) + \int_1^\infty \frac{\bar{B}_m(-x)}{m!}\varphi^{(m)}(x)\,dx.$$

Soit par exemple

$$\varphi(x) = \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Cette fonction satisfait aux conditions du théorème, si $\beta > 0$. Considérons l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x^\alpha)\,dx}{x^\beta}; \tag{10}$$

changeons la variable et posons $x^\alpha = z$, nous aurons

$$\int_1^n \frac{\sin(x^\alpha)\,dx}{x^\beta} = \frac{1}{\alpha}\int_1^{n^\alpha} \frac{\sin z\,dz}{z^{\alpha+\beta-1}}.$$

L'intégrale (10) sera donc convergente, si $\beta > 1-\alpha$, et divergente, si $\beta \leq 1-\alpha$. Il en est par conséquent de même de la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin(s^\alpha)}{s^\beta}.$$

8. Remarquons en passant que le lemme précédent permet d'étendre un autre théorème de CAUCHY[1] que M. BOREL[2] a étendu un peu en lui donnant la forme suivante: Les séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s), \quad \sum_{s=1}^{\infty} a^s \varphi(a^s) \qquad (a > 1)$$

sont en même temps convergentes ou divergentes si $\varphi(x)$ est une fonction positive, continuellement décroissante et tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment.

Soit $\psi(x)$ une fonction qui tend vers l'infini avec x et qui, pour $x \geq p$, admet une dérivée continue et positive qui satisfait à l'inégalité

$$\psi'(x+\theta) \leq K\psi'(x),$$

K étant une constante et $0 \leq \theta \leq 1$.

Je dis que les séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s), \quad \sum_{s=1}^{\infty} \varphi(\psi(s))\, \psi'(s)$$

sont en même temps convergentes, si $\varphi(x)$ est une fonction positive non croissant avec x.

En effet la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(x)$$

et l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \varphi(x)\, dx$$

sont en même temps convergentes ou divergentes. D'autre part on a

$$\int_p^{p+1} \varphi(\psi(x))\, \psi'(x)\, dx \leq \varphi(\psi(p))\, \psi'(p+\theta) < K\varphi(\psi(p))\, \psi'(p),$$

$$\int_p^{p+1} \varphi(\psi(x))\, \psi'(x)\, dx \geq \varphi(\psi(p+1))\, \psi'(p+\theta) > \frac{1}{K}\varphi(\psi(p+1))\, \psi'(p+1)$$

par conséquent

[1] Cours d'Analyse, Paris 1821; Œuvres (2) 3, Paris 1897, p. 123—5.
[2] Leçons sur les séries à termes positifs, Paris 1902, p. 2—3.

$$K\sum_{s=p}^{m-1}\varphi(\psi(s))\,\psi'(s) > \int_p^m \varphi(\psi(x)\,\psi'(x)\,dx > \frac{1}{K}\sum_{s=p+1}^{m}\varphi(\psi(s))\,\psi'(s).$$

De ces inégalités il résulte que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varphi(\psi(s))\,\psi'(s)$$

et l'intégrale

$$\int_1^{\infty}\varphi(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx$$

convergent ou divergent toutes les deux. C. q. f. d.

On voit ainsi par exemple que les séries suivantes

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varphi(e^s)e^s, \quad \sum_{s=1}^{\infty}\varphi(s^\alpha)\,s^{\alpha-1}, \qquad \alpha > 0$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varphi(s), \quad \sum\frac{\varphi(\log s)}{s}, \quad \sum\frac{\varphi(\log_2 s)}{s\log s},$$

$$\sum\frac{\varphi(\log_r s)}{s\log s\log_2 s\ldots\log_{r-1} s}$$

sont en même temps convergentes ou divergentes si $\varphi(x)$ est une fonction positive non croissant avec x.

Voici un autre théorème qui est d'une plus grande portée. *Les séries*

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varphi(x), \quad \sum_{s=1}^{\infty}\varphi(\psi(s))\,\psi'(s)$$

sont en même temps convergentes ou divergentes dans les conditions suivantes: La fonction $\varphi(x)$ tend vers zéro quand x augmente indéfiniment et elle admet, pour $x \geq 1$, une dérivée continue d'ordre m telle que l'intégrale

$$\int_1^{\infty}|\varphi^{(m)}(x)|\,dx$$

a un sens. La fonction $\psi(x)$ tend vers l'infini avec x et elle admet, pour $x \geq 1$, une dérivée continue d'ordre $m+1$ qui, à partir d'une certaine valeur de x, ne

change pas de signe quand x augmente. On suppose en outre que la dérivée $\psi'(x)$ tende vers une limite quand x augmente indéfiniment.

En effet la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s)$$

sera convergente ou divergente suivant que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \varphi(x)\, dx$$

aura ou non un sens. Posons

$$f(x) = \varphi(\psi(x))\, \psi'(x).$$

On a

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Si l'intégrale

$$\int_1^{\infty} |f^{(m)}(x)|\, dx$$

a un sens le théorème résulte du lemme du paragraphe précédent. Mais on s'assure aisément qu'il en est ainsi car des hypothèses que nous venons de faire il résulte que, quand x augmente indéfiniment, les dérivées

$$\psi^{(\nu)}(x) \qquad \nu = 2, 3, \ldots m$$

tendent vers zéro en variant toujours dans le même sens à partir d'une certaine valeur de x. La dérivée $f^{(m)}(x)$ est de la forme

$$f^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(\psi(x))\, [\psi'(x)]^{m+1} + \sum c\, \varphi^{(s_0)}(\psi(x))\, [\psi'(x)]^{s_1} \ldots [\psi^{(p+1)}(x)]^{s_{p+1}}.$$

L'intégrale

$$\int^{\infty} |\varphi^{(m)}(\psi(x))\, \psi'(x)|\, dx$$

est par hypothèse convergente; il en est donc de même de l'intégrale

$$\int^{\infty} |\varphi^{(m)}(\psi(x))\, [\psi'(x)]^{m+1}|\, dx.$$

D'autre part on sait trouver une constante C telle que

$$\int^{\infty} |\varphi^{(s_0)}(\psi(x))[\psi'(x)]^{s_1}[\psi''(x)]^{s_2}\ldots[\psi^{(p+1)}(x)]^{s_{p+1}}|\,dx < C\int^{\infty}|\psi^{(\nu)}(x)|\,dx, \qquad \nu > 1.$$

Mais l'intégrale au second membre converge parce que $\psi^{(\nu)}(x)$ ne change pas de signe à partir d'une certaine valeur de x et $\psi^{(\nu-1)}(x)$ tend vers une limite quand x augmente indéfiniment. Le théorème est ainsi démontré.

Nous venons de voir que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin(s^\alpha)}{s^\beta}, \qquad 0<\alpha<1$$

converge ou diverge suivant que $\alpha+\beta-1$ sera positif ou non. En posant $\psi(x)=\log x$ ou $\psi(x)=\log_r x$ on en conclut que les deux séries suivantes

$$\sum\frac{\sin((\log s)^\alpha)}{s(\log s)^\beta},$$

$$\sum\frac{\sin((\log_r s)^\alpha)}{s\log s\log_2 s\ldots\log_{r-1}s\,(\log_r s)^\beta}$$

convergent, si $\beta>1-\alpha$, et divergent, si $\beta\leq 1-\alpha$. Mais ceci est une parenthèse que je me hâte de fermer pour revenir au problème qui forme l'objet principal de ce Mémoire.

Démonstration de l'existence de la fonction $F(x\,|\,\omega)$.

9. Considérons la solution principale de l'équation

$$\underset{\omega}{\triangle} F(x)=\varphi(x),$$

définie par la limite

$$F(x\,|\,\omega)=\lim_{\eta\to 0}\left[\int_a^x\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz-\omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta(x+s\omega)}\right]. \qquad (11)$$

Soit ω un nombre positif. Supposons que

1° la fonction $\varphi(x)$ admette, pour $x\geq b$, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers zéro, quand x augmente indéfiniment,

2° l'intégrale

$$\int_0^\infty B_m(-z)\,\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz \tag{12}$$

converge[1] et cela uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq b+\omega$.

Soit B un nombre positif quelconque plus grand que b. *Je veux démontrer que l'expression* (11) *tend uniformément vers une limite dans l'intervalle* $b \leq x \leq B$. Nous avons supposé que

$$\lim_{x \to \infty} \varphi^{(m)}(x) = 0.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi^{(m-1)}(x)}{x} = 0,$$

et en général

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi^{(m-\nu)}(x)}{x^\nu} = 0, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots m. \tag{13}$$

En particulier on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x^m} = 0.$$

La série et l'intégrale[2] qui entrent dans l'expression (11) convergeront donc pour toute valeur positive de η, et pour toute valeur de $x > b$. Cela posé, remplaçons la fonction $\varphi(x)$ par $\varphi(x)\,e^{-\eta x}$ dans la formule d'Euler (3) et puis remplaçons x successivement par $x+\omega, x+2\omega, \ldots x+(n-1)\omega$. En ajoutant ensemble les n équations ainsi obtenues on trouve l'identité suivante

[1] La condition 2° est en particulier satisfaite si la série $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x+s\omega)$ converge uniformément dans l'intervalle $b < x < b+\omega$. Elle est satisfaite encore si l'intégrale

$$\int_b^\infty |\varphi^{(m)}(x)|\,dx$$

a un sens. Enfin la condition 2° est remplie si la fonction $\varphi^{(m)}(x)$ est monotone à partir d'une certaine valeur de x; c'est ce qui résulte d'un théorème classique de Dirichlet parce que l'intégrale

$$\int_p^{p+1} B_m(-z)\,dz$$

est nulle quel que soit p.

[2] On suppose, pour fixer les idées, que $a \geq b$.

$$\int_a^{x+n\omega}\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz-\omega\sum_{s=0}^{n-1}\varphi(x+h\omega+s\omega)\,e^{-\eta(x+h\omega+s\omega)}$$

$$=\int_a^{x}\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu}{\nu\,!}B_\nu(h)\,D_x^{\nu-1}[\varphi(x)\,e^{-\eta x}]$$

$$-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu}{\nu\,!}B_\nu(h)\,D_x^{\nu-1}[\varphi(x+n\omega)\,e^{-\eta(x+n\omega)}]$$

$$+\frac{\omega^{m+1}}{m\,!}\int_0^{n}\bar{B}_m(h-z)\,D_x^m[\varphi(x+\omega z)e^{-\eta(x+\omega z)}]\,dz,$$

qui est valable quel que soit $x\geq b$. Faisons tendre n vers l'infini, pendant que η reste positif et fixe. De l'égalité (13) il résulte que le troisième terme au second membre tend vers zéro. On aura donc

$$\int_a^{\infty}\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz-\omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+h\omega+s\omega)\,e^{-\eta(x+h\omega+s\omega)}$$

$$=\int_a^{x}\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu}{\nu\,!}B_\nu(h)\,D_x^{\nu-1}[\varphi(x)\,e^{-\eta x}]$$

$$+\frac{\omega^{m+1}}{m\,!}\int_0^{\infty}\bar{B}_m(h-z)\,D_x^m[\varphi(x+\omega z)\,e^{-\eta(x+\omega z)}]\,dz \tag{14}$$

Je fais maintenant tendre η vers zéro. Le premier et le second terme au second membre tendent uniformément vers des limites finies. Le dernier terme au second membre s'exprime par $m+1$ intégrales de la forme

$$P_\nu=\eta^\nu\int_0^{\infty}\bar{B}_m(h-z)\,\varphi^{(m-\nu)}(x+\omega z)\,e^{-\eta(x+\omega z)}\,dz,\qquad \nu=0,1,2,\ldots m.$$

Soit d'abord $\nu=0$. En intégrant par partie on trouve

$$P_0=f(0)\,e^{-\eta x}-\eta\omega\int_0^{\infty}f(z)\,e^{-\eta(x+\omega z)}\,dz,$$

où l'on a posé pour abréger

$$f(z) = \int_z^\infty \dot{B}_m(h-z)\,\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz.$$

Soit ε un nombre positif. De l'hypothèse 2° il résulte qu'on sait trouver un nombre N, indépendant de x, tel que

$$|f(z)| < \varepsilon, \qquad \text{si } z \geq N,$$

quel que soit x dans l'intervalle $b \leq x \leq B$. On aura donc

$$\left|\eta\omega \int_0^\infty f(z)\,e^{-\eta(x+\omega z)}\,dz\right| < \left|\eta\omega \int_0^N f(z)\,e^{-\eta(x+\omega z)}\,dz\right| + \varepsilon\eta\omega \int_N^\infty e^{-\eta(x+\omega z)}\,dz$$

$$< \eta\omega \int_0^N |f(z)|\,dz + \varepsilon e^{-\eta(x+\omega N)}.$$

Quand η tend vers zéro le dernier membre de cette inégalité tend vers ε. Comme ε est aussi petit que l'on veut, on a donc uniformément

$$\lim_{\eta \to 0} P_0 = f(0).$$

Soit maintenant $\nu > 0$. Je veux démontrer que P_ν tend vers zéro avec η. Dans ce but considérons l'intégrale

$$\psi(z) = -\int_z^\infty \dot{B}_m(h-z)\,e^{-\eta\omega z}\,dz.$$

Quand η tend vers zéro cette intégrale tend vers une limite. En effet, on a évidemment

$$\psi(z) = -\frac{e^{-\eta\omega z}}{1-e^{-\eta\omega}} \int_0^1 \dot{B}_m(h-z-t)\,e^{-\eta\omega t}\,dt.$$

Mais puisque

$$\int_x^{x+1} \dot{B}_m(t)\,dt = 0$$

on peut écrire cette expression comme il suit

$$\psi(z) = e^{-\eta\omega z} \int_0^1 \dot{B}_m(h - z - t) \frac{1 - e^{-\eta\omega t}}{1 - e^{-\eta\omega}} \, dt.$$

La dernière intégrale est une fonction périodique de z avec la période 1. Quand η tend vers zéro on voit aisément que cette intégrale tend vers une limite finie qui est d'ailleurs égale à

$$\int_0^1 \dot{B}_m(h - z - t) \, t \, dt = \frac{\dot{B}_{m+1}(h - z)}{m + 1}.$$

On sait donc trouver une constante C telle que, pour toute valeur positive de η

$$|\psi(z)| < C \, e^{-\eta\omega z}$$

et cela quel que soit z. En particulier, quand z augmente indéfiniment pendant que η reste positif et fixe, la fonction $z^p \psi(z)$ tend vers zéro quel que soit p. Cela posé, considérons P_ν, où l'on suppose que $1 \leq \nu \leq m$. En intégrant par partie on trouve

$$P_\nu = -\eta^\nu \psi(0) \varphi^{(m-\nu)}(x) \, e^{-\eta x} - \eta^\nu \omega e^{-\eta x} \int_0^\infty \varphi^{(m-\nu+1)}(x + \omega z) \, \psi(z) \, dz.$$

Le premier terme au second membre tend vers zéro avec η. La valeur absolue du second terme est plus petite que

$$\eta^\nu C \int_x^\infty |\varphi^{(m-\nu+1)}(z)| \, e^{-\eta z} \, dz. \tag{15}$$

Mais de l'égalité (13) il résulte qu'on sait trouver un nombre positif N tel que

$$|\varphi^{(m-\nu+1)}(z)| < \varepsilon z^{\nu-1}, \qquad \text{si } z > N,$$

quel que soit le nombre positif ε. L'expression (15) est donc plus petite que

$$\eta^\nu C \int_x^N |\varphi^{(m-\nu+1)}(z)| \, e^{-\eta z} \, dz + C \varepsilon \eta^\nu \int_N^\infty z^{\nu-1} e^{-\eta z} \, dz.$$

Le premier terme tend vers zéro avec η. Le second terme est égal à

$$\varepsilon C \int_{\eta N}^{\infty} z^{\nu-1} e^{-z}\, dz,$$

et cette intégrale tend vers $\varepsilon C(\nu-1)!$ quand η tend vers zéro. Comme ε est aussi petit que l'on veut on en conclut qu'on a uniformément

$$\lim_{\eta \to 0} P_\nu = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots m.$$

Par conséquent, le second membre de l'équation (14) tend uniformément vers une limite quand η tend vers zéro, et nous aurons

$$F(x+h\omega\,|\,\omega) = \int_a^x \varphi(z)\, dz + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(x) + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \dot{B}_m(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz \quad (16)$$

quel que soit le nombre h dans l'intervalle $0 \leq h \leq 1$. *Il en résulte en particulier que $F(x\,|\,\omega)$ est une fonction continue de x dans l'intervalle $x \geq b$.*

10. Le théorème que nous venons de démontrer est vrai encore si l'on suppose que la dérivée $\varphi^{(m)}(x)$ soit continue, pour $x \geq b$, et que l'intégrale

$$\int_b^\infty |\varphi^{(m)}(x)|\, dx$$

ait un sens. Pourtant notre démonstration doit être modifiée un petit peu parce que dans le cas actuel il peut arriver que

$$\overline{\lim_{x \to \infty}}\ \varphi^{(m)}(x) = \infty.$$

Mais la dérivée d'ordre $m-1$ tend nécessairement vers une limite finie c quand x augmente indéfiniment. En considérant P_1 on n'a pas besoin d'intégrer par partie, mais on peut écrire cette intégrale comme il suit

$$P_1 = \eta c \int_0^\infty \dot{B}_m(h-z)\, e^{-\eta(x+\omega z)}\, dz + \int_0^\infty \eta\, \dot{B}_m(h-z)\, (\varphi^{(m-1)}(x+\omega z) - c)\, e^{-\eta(x+\omega z)}\, dz.$$

La première intégrale tend vers une limite finie, comme nous l'avons vu, et l'on démontre comme plus haut que la seconde intégrale tend vers zéro avec η. On a donc

$$\lim_{\eta \to 0} P_1 = 0.$$

La démonstration précédente s'applique d'ailleurs sans modifications. On peut faire la même remarque relativement à la démonstration de l'existence de la limite

$$G(x \mid \omega) = \mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x$$

que nous avons donnée dans le paragraphe 5.

En faisant varier ω sur un segment quelconque de l'axe des nombres *positifs* on voit en outre que les limites

$$\mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x, \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(x) \underset{\omega}{\Delta} x$$

convergent uniformément par rapport à ω. *Les deux solutions principales $G(x \mid \omega)$ et $F(x \mid \omega)$ sont donc, pour $\omega > 0$, des fonctions continues de ω.*

Considérons un cas particulier. Posons $\varphi(x) = \nu x^{\nu-1}$, ν étant un entier positif. Cette fonction satisfait à nos conditions. En prenant $h = 0$ et $m = \nu$, l'équation (16) se réduit à la relation suivante

$$\nu \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{x} x^{\nu-1} \Delta x = B_\nu(x).$$

C'est à dire que les polynomes de Bernoulli se représentent par la limite:

$$B_\nu(x) = \nu \lim_{\eta \to 0} \left[\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\eta x} dx - \sum_{s=0}^{\infty} (x+s)^{\nu-1} e^{-\eta(x+s)} \right]. \tag{17}$$

On peut vérifier cette égalité de la manière suivante. Si η est positif on a

$$\sum_{s=0}^{\infty} e^{-\eta(x+s)} = \frac{e^{-\eta x}}{1 - e^{-\eta}},$$

$$\int_0^\infty e^{-\eta x} dx = \frac{1}{\eta}.$$

En dérivant $\nu - 1$ fois par rapport à η, on trouvera

$$\sum_{s=0}^{\infty}(x+s)^{\nu-1}e^{-\eta(x+s)}=(-1)^{\nu-1}D_\eta^{\nu-1}\frac{e^{-\eta x}}{1-e^{-\eta}},$$

$$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-\eta x}dx=\frac{(\nu-1)!}{\eta^\nu}.$$

Quand η tend vers zéro la série et l'intégrale tendent vers l'infini. Mais soustrayons membre à membre les deux dernières équations et rappelons qu'on a, au voisinage du point $\eta=0$ (cf. (4) paragraphe 6.)[1]

$$\frac{e^{-\eta x}}{1-e^{-\eta}}=\frac{1}{\eta}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-\eta)^{s-1}}{s!}B_s(x). \tag{18}$$

Substituons ce développement, nous aurons

$$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-\eta x}dx-\sum_{s=0}^{\infty}(x+s)^{\nu-1}e^{-\eta(x+s)}=\sum_{s=\nu}^{\infty}\frac{(-\eta)^{s-\nu}}{(s-\nu)!}\frac{B_s(x)}{s}.$$

En faisant tendre η vers zéro on retrouve l'équation (17).

Valeurs asymptotiques des solutions principales.

11. En démontrant l'existence des fonctions $G(x\,|\,\omega)$ et $F(x\,|\,\omega)$ nous avons obtenu en même temps les deux développements suivants

$$G(x+h\omega\,|\,\omega)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\omega^\nu}{\nu!}E_\nu(h)\varphi^{(\nu)}(x)+\frac{\omega^m}{(m-1)!}\int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(h-z)\varphi^{(m)}(x+\omega z)dz, \tag{19}$$

$$F(x+h\omega\,|\,\omega)=\int_a^x\varphi(z)dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu}{\nu!}B_\nu(h)\varphi^{(\nu-1)}(x)+\frac{\omega^{m+1}}{m!}\int_0^\infty \dot{B}_m(h-z)\varphi^{(m)}(x+\omega z)dz. \tag{20}$$

---

[1] Des équations (18) et (17) on peut tirer ces deux autres relations

$$B_\nu(x)=\lim_{\rho\to 1}(\rho D_\rho)^\nu\frac{\rho^x\log\rho}{\rho-1},$$

et

$$B_\nu(x)=\nu\lim_{\rho\to 1}(\rho D_\rho)^{\nu-1}\left[\frac{\rho^x}{\rho-1}-\frac{1}{\log\rho}\right].$$

Quand m augmente indéfiniment nos développements seront rarement convergents, comme nous le verrons dans la suite. Néanmoins ces deux séries jouent un rôle capital dans l'étude des propriétés des solutions principales; on peut opérer en toute sûreté avec elles en tenant compte du reste. D'abord elles mettent immédiatement en évidence comment se comportent nos solutions pour les valeurs positives et très grandes de x. En effet, soit $h=0$ et posons pour abréger

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\omega^\nu C_\nu}{\nu\,!\,2^\nu}\varphi^{(\nu)}(x),$$

$$Q(x)=\int_a^x \varphi(z)\,dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu B_\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x).$$

On aura

$$G(x\,|\,\omega)=P(x)+\frac{\omega^m}{(m-1)!}\int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(-z)\,\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz, \tag{21}$$

$$F(x\,|\,\omega)=Q(x)+\frac{\omega^{m+1}}{m!}\int_0^\infty \dot{B}_m(-z)\,\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz. \tag{22}$$

Par hypothèse les intégrales aux seconds membres convergent uniformément par rapport à x. Ces deux intégrales tendent donc vers zéro quand x augmente indéfiniment. On a par conséquent

$$\lim_{x\to\infty}\,[G(x\,|\,\omega)-P(x)]=0, \tag{23}$$

$$\lim_{x\to\infty}\,[F(x\,|\,\omega)-Q(x)]=0. \tag{24}$$

Les deux limites que nous avons prises comme définition des solutions principales ont l'avantage de pouvoir servir dans ces cas assez étendus. Mais, dans le cas actuel, on peut en trouver d'autres qui sont quelquefois d'une application plus facile. En effet, des équations aux différences finies

$$\mathop{\nabla}_{\omega} G(x)=\varphi(x),$$

$$\mathop{\Delta}_{\omega} F(x)=\varphi(x)$$

il résulte qu'on a, pour toute valeur entière et positive de n,

$$G(x\,|\,\omega)=2\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\varphi(x+s\omega)+(-1)^n G(x+n\omega\,|\,\omega), \tag{25}$$

$$F(x\,|\,\omega)=-\omega\sum_{s=0}^{n-1}\varphi(x+s\omega)+F(x+n\omega\,|\,\omega).$$

On peut écrire la dernière équation comme il suit

$$F(x\,|\,\omega)=Q(x+n\omega)-\omega\sum_{s=0}^{n-1}\varphi(x+s\omega)+[F(x+n\omega\,|\,\omega)-Q(x+n\omega)].$$

Faisons tendre l'entier n vers l'infini. Le dernier terme au second membre tendra vers zéro, en vertu de l'équation (24), et l'on aura

$$F(x\,|\,\omega)=\lim_{n\to\infty}[Q(x+n\omega)-\omega\sum_{s=0}^{n-1}\varphi(x+s\omega)]. \tag{26}$$

De l'équation (25) on déduit de même

$$G(x\,|\,\omega)=2\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\varphi(x+s\omega)+(-1)^n P(x+n\omega)+(-1)^n[G(x+n\omega\,|\,\omega)-P(x+n\omega)].$$

En faisant tendre n vers l'infini on trouvera

$$G(x\,|\,\omega)=\lim_{n\to\infty}[2\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\varphi(x+s\omega)+(-1)^n P(x+n\omega)]. \tag{27}$$

Ces deux égalités ont lieu uniformément dans l'intervalle $x\geq b$. Si nous posons par exemple $\varphi(x)=x^2$, nous obtenons

$$E_2(x)=\lim_{n\to\infty}[2\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s(x+s)^2+(-1)^n(x+n)(x+n-1)],$$

$$B_3(x)=\lim_{n\to\infty}\left[-3\sum_{s=0}^{n-1}(x+s)^2+(x+n)(x+n-1)\left(x+n-\frac{1}{2}\right)\right].$$

On peut aisément transformer les expressions (26) et (27) de manière à en former des séries convergentes. On a en effet

$$Q(x+n\omega)-\omega\sum_{s=0}^{n-1}\varphi(x+s\omega)=Q(x)-\omega\sum_{s=0}^{n-1}[\varphi(x+s\omega)-\mathop{\triangle}_{\omega} Q(x+s\omega)],$$

$$2\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\varphi(x+s\omega)+(-1)^n P(x+n\omega)=P(x)+2\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s[\varphi(x+s\omega)-\mathop{\nabla}_{\omega} P(x+s\omega)].$$

Quand n augmente indéfiniment les premiers membres tendent uniformément vers les fonctions F et G, on a par conséquent

$$F(x \mid \omega) = Q(x) - \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi(x+s\omega) - \underset{\omega}{\triangle} Q(x+s\omega)], \tag{28}$$

$$G(x \mid \omega) = P(x) + 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\varphi(x+s\omega) - \underset{\omega}{\nabla} P(x+s\omega)]. \tag{29}$$

Ces deux séries convergent donc uniformément dans l'intervalle $x \geq b$. En faisant $h = \frac{1}{2}$ dans les équations (19) et (20), et en posant pour abréger

$$P_1(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu E_\nu}{\nu!\, 2^\nu} \varphi^{(\nu)}\left(x - \frac{\omega}{2}\right),$$

$$Q_1(x) = \int_a^{x-\frac{\omega}{2}} \varphi(z)dz + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu D_\nu}{\nu!\, 2^\nu} \varphi^{(\nu-1)}\left(x - \frac{\omega}{2}\right),$$

on trouve de même

$$F(x \mid \omega) = Q_1(x) - \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi(x+s\omega) - \underset{\omega}{\triangle} Q_1(x+s\omega)], \tag{30}$$

$$G(x \mid \omega) = P_1(x) + 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\varphi(x+s\omega) - \underset{\omega}{\nabla} P_1(x+s\omega)], \tag{31}$$

où l'on suppose que $x \geq b + \frac{\omega}{2}$. Mais ces séries ne diffèrent pas essentiellement des séries (28) et (29).

Dans toutes ces formules on peut évidemment choisir m comme le plus petit entier tel que

$$\lim_{x \to \infty} \varphi^{(m)}(x) = 0.$$

En déterminant m ainsi on donne aux séries la forme la plus simple. Mais il convient de remarquer que rien ne permet d'affirmer la convergence absolue des séries dont nous venons de démontrer la convergence uniforme. En augmentant la valeur de m on augmente souvent la rapidité de la convergence et il arrive que les séries convergent absolument pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre. Il est d'ailleurs facile d'en préciser les conditions mais je ne m'y arrête pas.

Soit par exemple $\varphi(x)=\sqrt{x}$. En prenant $m=1$, on trouvera $P(x)=\sqrt{x}$ et par conséquent

$$\mathop{\mathsf{S}}\sqrt{x}\,\nabla x=\sqrt{x}+\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s[\sqrt{x+s}-\sqrt{x+s+1}].$$

Il résulte de notre analyse que cette série converge uniformément dans tout domaine fini. Mais la convergence n'est absolue pour aucune valeur de x. D'autre part, en prenant $m=2$, on trouvera

$$P(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{4\sqrt{x}},$$

et la série correspondante convergera absolument pour toute valeur positive de x.

12. Resserrons un peu les hypothèses et supposons que $\varphi(x)$ satisfasse aux conditions du paragraphe 10. Nous avons vu que $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ sont, pour $\omega>0$, des fonctions continues de ω. Qu'est-ce qui se passe quand ω tend vers zéro, pendant que x reste fixe? Pour le voir reprenons l'équation (20) qui est valable pour toute valeur positive de ω. Posons pour abréger

$$R_{m+1}=\frac{\omega^{m+1}}{m!}\int_0^{\infty}\dot{B}_m(h-z)\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz.$$

On sait trouver une constante C telle que

$$|R_{m+1}|<C\omega^{m+1}\int_0^{\infty}|\varphi^{(m)}(x+\omega z)|\,dz=C\omega^m\int_x^{\infty}|\varphi^{(m)}(z)|\,dz<C\omega^m\int_b^{\infty}|\varphi^{(m)}(z)|\,dz.$$

La fonction $|\omega^{-m}R_{m+1}|$ reste donc plus petite qu'une constante, quand ω tend vers zéro. Mais comme on a

$$R_m=\frac{\omega^m}{m!}B_m(h)\,\varphi^{(m-1)}(x)+R_{m+1},$$

on en conclut que

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{R_m}{\omega^{m-1}}=0.$$

De même, en considérant la série (19) et en posant

$$R'_m = \frac{\omega^m}{(m-1)!}\int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(h-z)\,\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz$$

on démontre que la fonction

$$\left|\frac{R'_m}{\omega^{m-1}}\right|$$

reste au-dessous d'une limite finie quand ω tend vers zéro. *On a donc en particulier*

$$\lim_{\omega \to 0} G(x\,|\,\omega) = \varphi(x),$$

$$\lim_{\omega \to 0} F(x\,|\,\omega) = \int_a^x \varphi(x)\,dx,$$

ω tendant vers zéro par des valeurs positives. Ces deux égalités s'accordent avec un résultat que nous avons obtenu dans le paragraphe 2. Mais on peut affirmer quelque chose de plus. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit indéfiniment dérivable, pour $x \geq b$, et que l'intégrale

$$\int_b^\infty |\varphi^{(\nu)}(x)|\,dx$$

converge si $\nu \geq m$. *Dans ces conditions il résulte de ce que nous venons de dire que les séries de puissances*

$$G(x+h\omega\,|\,\omega) \backsim \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\omega^\nu}{\nu\,!} E_\nu(h)\,\varphi^{(\nu)}(x),$$

$$F(x+h\omega\,|\,\omega) \backsim \int_a^x \varphi(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\,\varphi^{(\nu-1)}(x)$$

représentent les fonctions aux premiers membres asymptotiquement pour les valeurs positives et très petites de ω. Ces égalités asymptotiques sont surtout remarquables dans le cas $h = 0$.

Les dérivées des solutions principales.

13. Des deux dernières séries on peut encore tirer un autre résultat important. Supposons que la dérivée $\varphi^{(m)}(x)$ soit continue, pour $x \geq b$, et que la série

$$\sum_{s=0}^\infty \varphi^{(m)}(x+s\omega)$$

converge uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq b + \omega$. On aura

$$F(x + h\omega \mid \omega) = \int_a^x \varphi(x)\,dz + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\,\varphi^{(\nu-1)}(x)$$

$$+ \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^1 \dot{B}_m(h-z) \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + \omega z + \omega s)\,dz. \qquad (32)$$

Soit $m > 1$. En dérivant par rapport à h on trouvera

$$\frac{dF(x+h\omega)}{dx} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\,\varphi^{(\nu)}(x) + \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^1 \dot{B}_{m-1}(h-z) \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + \omega z + \omega s)\,dz.$$

En faisant $h = 0$ cette équation peut s'écrire comme il suit

$$\frac{d}{dx} \mathop{\Large S}_a^x \varphi(x) \mathop{\triangle}_{\omega} x = \mathop{\Large S}_a^x \varphi'(x) \mathop{\triangle}_{\omega} x + \varphi(a). \qquad (33)$$

Dérivons $m - 1$ fois par rapport à h, nous trouverons

$$\frac{d^{m-1} F(x+h\omega)}{dx^{m-1}} = \varphi^{(m-2)}(x) + \omega B_1(h)\,\varphi^{(m-1)}(x) + \omega^2 \int_0^1 \dot{B}_1(h-z) \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + \omega z + \omega s)\,dz.$$

Dans la dernière intégrale la fonction sous le signe est discontinue dans le point $z = h$. Décomposons l'intégrale en deux

$$\int_0^1 = \int_0^h + \int_h^1$$

et dérivons encore une fois par rapport à h, nous obtiendrons

$$\frac{d^m F(x+h\omega)}{dx^m} = \varphi^{(m-1)}(x) + \omega \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + \omega z + \omega s)\,dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + h\omega + s\omega)$$

$$= \varphi^{(m-1)}(x) + \int_x^{\infty} \varphi^{(m)}(z)\,dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + h\omega + s\omega).$$

En faisant $h = 0$, on aura

$$\frac{d^m F(x \mid \omega)}{d x^m} = \lim_{x \to \infty} \varphi^{(m-1)}(x) - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + s\omega) \tag{34}$$

De notre hypothèse relativement à $\varphi(x)$ résulte qu'on peut rendre la valeur de la dernière série aussi petite que l'on veut en choisissant x suffisamment grand et que $\varphi^{(m-1)}(x)$ tend vers une limite. *Par conséquent, la fonction $F(x \mid \omega)$ admet, pour $x \geq b$, une dérivée continue d'ordre m par rapport à x, qui tend vers une limite finie, quand x augmente indéfiniment. Cette propriété est caractéristique pour la solution principale.* Car toute autre solution est égale à la solution principale augmentée d'une fonction périodique de x. Et une fonction périodique qui possède la propriété que nous venons d'énoncer est égale à une constante. La solution principale de l'équation

$$\underset{\omega}{\triangle} F(x) = \varphi(x)$$

est donc la solution ayant une dérivée continue d'un certain ordre (≥ 0) qui tend vers une limite quand x augmente indéfiniment.

14. De même considérons l'équation

$$\underset{\omega}{\nabla} G(x) = \varphi(x),$$

et supposons $\varphi^{(m)}(x)$ continue, pour $x \geq b$, et la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(m)}(x + s\omega)$$

uniformément convergente dans l'intervalle $b \leq x \leq b + \omega$. On aura

$$G(x + h\omega \mid \omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) \varphi^{(\nu)}(x)$$

$$+ \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^1 E_{m-1}(h - z) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(m)}(x + \omega z + \omega s)\, dz. \tag{35}$$

En dérivant par rapport à h on trouve

$$\frac{dG(x+h\omega)}{dx}=\sum_{\nu=0}^{m-2}\frac{\omega^\nu}{\nu!}E_\nu(h)\varphi^{(\nu+1)}(x)$$

$$+\frac{\omega^{m-1}}{(m-2)!}\int_0^1 \dot{E}_{m-2}(h-z)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi^{(m)}(x+\omega z+\omega s)\,dz.$$

En faisant $h=0$ cette équation s'écrit

$$\frac{d}{dx}\mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega}x=\mathop{\mathrm{S}}\varphi'(x)\mathop{\nabla}_{\omega}x. \tag{36}$$

En dérivant $m-1$ fois par rapport à h et en posant ensuite $h=0$ on trouvera

$$\frac{d^{m-1}G(x|\omega)}{dx^{m-1}}=\varphi^{(m-1)}(x)+\omega\int_0^1 \dot{E}_0(-z)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi^{(m)}(x+\omega z+\omega s)\,dz$$

$$=\varphi^{(m-1)}(x)-\int_x^{x+\omega}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi^{(m)}(z+s\omega)\,dz.$$

Dérivons de nouveau relativement à x, nous trouverons

$$\frac{d^mG(x|\omega)}{dx^m}=2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi^{(m)}(x+s\omega). \tag{37}$$

Par conséquent, la fonction $G(x|\omega)$ admet, pour $x>b$, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. On peut ici faire la même remarque que dans le cas précédent. *Cette propriété distingue la solution principale de toute autre solution.*

Si l'on suppose qu'on ait

$$\lim_{x\to\infty} x^p\varphi^{(m)}(x)=0,$$

où $p>1$, il résulte immédiatement des équations (37) et (34) que

$$\lim_{x\to\infty} x^{p-1}G^{(m)}(x|\omega)=0$$

et que

$$\lim_{x\to\infty} x^{p-1}(F^{(m)}(x|\omega)-c)=0,$$

c étant une constante. En particulier, si $\varphi(x)$ est indéfiniment dérivable, et si l'on suppose que, quel que soit p, on sache trouver un entier m tel que

$$\lim_{x \to \infty} x^p \varphi^{(\nu)}(x) = 0,$$

si $\nu \geq m$, il résulte de notre analyse que les fonctions $G(x \mid \omega)$ et $F(x \mid \omega)$ sont indéfiniment dérivables par rapport à x et qu'on a, quel que soit p,

$$\lim_{x \to \infty} x^p G^{(\nu)}(x \mid \omega) = 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} x^p F^{(\nu)}(x \mid \omega) = 0,$$

pourvu que ν ait été choisi suffisamment grand. En appliquant, un nombre quelconque de fois, aux fonctions $G(x \mid \omega)$ et $F(x \mid \omega)$ nos deux opérations de sommation on arrive donc toujours à des expressions convergentes. Ces opérations donnent ainsi naissance à deux suites infinies de transcendantes nouvelles. Je vais consacrer un second mémoire à l'étude de ces sommes itérées. En particulier les limites

$$\mathop{S} G(x \mid \omega) \mathop{\nabla}_{\omega} x,$$

$$\mathop{S}_{a}^{x} F(x \mid \omega) \mathop{\triangle}_{\omega} x$$

existent. Cette propriété caractérise, elle aussi, les solutions principales, car ces deux limites cessent d'exister, si l'on remplace G ou F par une solution différente de la solution principale. En effet, si $p(x+\omega) = -p(x)$, on a

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s p(x+s\omega) e^{-\eta s} = p(x) \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\eta s},$$

et cette expression augmente indéfiniment quand η tend vers zéro. De même, si $\pi(x+\omega) = \pi(x)$, la limite

$$\mathop{S} \pi(x) \mathop{\triangle}_{\omega} x$$

existe seulement dans le cas où $\pi(x)$ est une constante.

La fonction gamma et quelques autres fonctions qui s'y rattachent.

15. Examinons quelques cas particuliers. Soit $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, et posons pour abréger

$$g(x)=\mathop{\mathbf{S}}\frac{\nabla x}{x}, \tag{38}$$

$$\Psi(x)=\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{x}\frac{\triangle x}{x}. \tag{39}$$

Les fonctions $g(x)$ et $\Psi(x)$ sont donc, par définition, les solutions principales des équations suivantes

$$\nabla g(x)=\frac{1}{x},$$

$$\triangle \Psi(x)=\frac{1}{x}.$$

Dans ce qui suit nous considérons souvent, à titre d'exemple, ces deux transcendantes. STIRLING a envisagé pour la première fois, je crois, la fonction $g(x)$, et la fonction $\Psi(x)$ a été étudiée par LEGENDRE, POISSON et GAUSS.[1] De l'équation (18) paragraphe 2 il résulte que les deux fonctions sont liées entre elles par la relation

$$g(2x)=\Psi\left(x+\frac{1}{2}\right)-\Psi(x).$$

De l'équation (38) on conclut immédiatement que

$$g(x)=2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{x+s}, \tag{40}$$

car cette série converge (cf. paragraphe 4.). La convergence est uniforme dans tout domaine fini qui ne renferme aucun des points $x=0,-1,-2,\ldots$, mais la

[1] Au sujet de ces fonctions et de la fonction gamma voir:
N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunction, Leipzig 1906, où l'on trouve une bibliographie détaillée.

série n'est pas absolument convergente. En prenant $m=1$ dans l'équation (29) on aura $P(x)=\frac{1}{x}$. Par conséquent

$$g(x)=\frac{1}{x}+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(x+s)(x+s+1)},$$

et cette série converge absolument pour toute valeur de x qui n'est pas un entier négatif ou nul. En prenant $m=2$, on aura $P(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}$ et par conséquent

$$g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2(x+s)^2(x+s+1)^2}.$$

Cette série est plus rapidement convergente que celle qui précède. En prenant $m=4$ on trouvera la série suivante

$$g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4x^4}+\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{\left(x+s+\frac{1}{2}\right)^2}{(x+s)^4(x+s+1)^4}$$

dont la convergence est plus rapide encore. On peut ainsi à volonté augmenter la rapidité de la convergence, mais en revanche le terme général de la série devient de plus en plus compliqué.

De l'équation (26) on déduit, en posant $m=0$,

$$\Psi(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\log n-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{1}{x+s}\right]. \tag{41}$$

En définissant la constante d'Euler C par la limite

$$C=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right]$$

on trouvera donc en particulier

$$\Psi(1)=-C.$$

En faisant $m=0$, l'équation (28) se réduira à la suivante

$$\Psi(x)=\log x-\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{1}{x+s}-\log\left(1+\frac{1}{x+s}\right)\right].$$

Posons $x = 1$, il vient

$$C = \sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{1}{s} - \log\left(1 + \frac{1}{s}\right)\right].$$

En ajoutant membre à membre les deux dernières équations, on obtient

$$\Psi(x) = -C + \sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right]. \tag{42}$$

Les valeurs asymptotiques des fonctions g et Ψ se déduisent des équations (23) et (24) qui se réduisent aux suivantes

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} [\Psi(x) - \log x] = 0.$$

Mais on peut obtenir une approximation plus grande. En effet les séries (19) et (20) prennent dans le cas actuel la forme suivante

$$g(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^\nu \frac{E_\nu(h)}{x^{\nu+1}} + m\int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(z-h)\frac{dz}{(x+z)^{m+1}}, \tag{43}$$

$$\Psi(x+h) = \log x - \sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\frac{B_\nu(h)}{x^\nu} + \int_0^\infty \dot{B}_m(z-h)\frac{dz}{(x+z)^{m+1}}, \tag{44}$$

où l'on suppose que $x > 0$. Quand m augmente indéfiniment ces deux séries de puissances divergeront mais elles représentent asymptotiquement les fonctions aux premiers membres pour les valeurs positives et très grandes de x.

De l'équation (39) on peut aisément déduire une intégrale définie qui a été trouvée par Gauss.[1] En effet, si $t > 0$, on aura

$$\sum_{s=0}^{\infty} e^{-t(x+s)} = \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}}.$$

En supposant x positif on peut intégrer terme par terme par rapport à t entre η et ∞. On trouvera

[1] Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$, Werke 3, Göttingen 1876, p. 158—9.

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\eta(x+s)}}{x+s} = \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}} dt.$$

On a en outre, si $\eta > 0$,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\eta z}}{z} dz = \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

En substituant ces deux expressions dans l'équation (39) on trouvera

$$\Psi(x) = \lim_{\eta \to 0} \int_{\eta}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}} \right) dt,$$

c'est-à-dire que $\Psi(x)$ se représente, si $x > 0$, par l'intégrale de Gauss:

$$\Psi(x) = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}} \right) dt. \tag{45}$$

En remarquant que

$$\log x = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt, \qquad x > 0$$

on en déduit encore l'intégrale de BINET

$$\Psi(x) = \log x + \int_{0}^{\infty} e^{-xt} \left(\frac{1}{1-e^{t}} + \frac{1}{t} - 1 \right) dt. \tag{46}$$

On démontre de la même manière que

$$g(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{2e^{-tx}}{1+e^{-t}} dt,$$

où l'on suppose encore que x est positif.[1] En dérivant par rapport à x dans l'équation (42), on trouvera

---

[1] Notre démonstration est valable pour les valeurs complexes de x dont la partie réelle est positive.

$$\Psi'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(x+s)^2}.$$

Appliquons à cette fonction la formule (28). En faisant successivement $m = 0, 1$ ou 2 on obtiendra les trois séries convergentes suivantes

$$\Psi'(x) = \frac{1}{x} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(x+s)^2 (x+s+1)}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2(x+s)^2 (x+s+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{6(x+s)^3 (x+s+1)^3},$$

parmi lesquelles la seconde a été trouvée par HERMITE.[1]

Comme vérification des formules générales considérons enfin la fonction gamma. Cette fonction satisfait à l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

Par conséquent

$$\log \Gamma(x+1) - \log \Gamma(x) = \log x.$$

Je définis[2] *la fonction* $\log \Gamma(x)$ *comme la solution principale de cette équation qui s'annule dans le point* $x = 1$. On a donc

$$\log \Gamma(x) = \mathop{\large S}_{0}^{x} \log x \,\triangle x + c,$$

c étant une constante qu'il reste à déterminer. En posant $m = 1$, on trouvera

$$Q(x) = \int_0^x \log x \, dx - \frac{1}{2} \log x = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (26), on obtient

---

[1] Correspondance d'Hermite et de Stieltjes 2, Paris 1905, p. 399.

[2] Cette définition peut aussi s'énoncer comme il suit: $\log \Gamma(x)$ est la solution qui s'annule dans le point $x = 1$, et qui admet, pour $x > 0$, une dérivée continue du second ordre qui tend vers zéro quand x augmente indéfiniment.

$$\log \Gamma(x) = c + \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log n - n - \sum_{s=0}^{n-1}\log(x+s)\right].$$

Faisons $x = 1$ dans cette équation, il vient

$$c = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\sum_{s=1}^{n}\log s - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n\right].$$

Ajoutons membre à membre ces deux relations, nous aurons

$$\log \Gamma(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[x\log n - \log x + \sum_{s=1}^{n-1}(\log s - \log(x+s))\right]. \tag{47}$$

On en tire le produit de Gauss

$$\Gamma(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}.$$

En remplaçant x par $1-x$, on obtiendra

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n!\,n^{x-1}}{x(1+x)\cdots(n-1+x)}\;\frac{n!\,n^{-x}}{(1-x)(2-x)\cdots(n-x)}$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{(n!)^2}{x(1-x^2)(2^2-x^2)\cdots(n^2-x^2)}$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right]^{-1}.$$

Par conséquent, la fonction gamma satisfait à la relation

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

qu'on doit à Euler. Dans le but de déterminer la constante[1] c rappelons que nous avons démontré dans le paragraphe 2 qu'on a

$$\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{x} \triangle\varphi(x)\triangle x = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

---

[1] On peut aussi déterminer cette constante de la manière suivante. Par définition la fonction $\log \Gamma(x)$ s'annule dans le point $x = 1$ on a donc

$$c = -\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{1} \log x \triangle x.$$

En posant $\varphi(x) = \log \Gamma(x)$, on trouvera

$$\log \Gamma(x) = \mathop{\mathrm{S}}_0^x \log x \,\triangle\, x + \int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx.$$

Il est facile d'évaluer la dernière intégrale. On a en effet

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \log (\Gamma(x)\Gamma(1-x))\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{\pi}{\sin \pi x}\, dx.$$

Mais puisque

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin \pi x\, dx = -\frac{1}{2} \log 2$$

on trouve la formule de Raabe

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx = \log \sqrt{2\pi}.$$

En substituant cette valeur dans la formule précédente, on trouvera

$$\log \Gamma(x) = \mathop{\mathrm{S}}_0^x \log x \,\triangle\, x + \log \sqrt{2\pi}. \tag{48}$$

De l'égalité (24) on déduit maintenant la valeur asymptotique suivante de la fonction gamma

$$\lim_{x \to \infty} \left[\log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x + x\right] = \log \sqrt{2\pi}. \tag{49}$$

Par conséquent

$$\log \Gamma(x) = \mathop{\mathrm{S}}_0^x \log x \,\triangle\, x - \mathop{\mathrm{S}}_0^1 \log x \,\triangle\, x,$$

c'est-à-dire que

$$\log \Gamma(x+1) = \lim_{\eta \to 0} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \log \nu e^{-\eta\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \log (x+\nu) e^{-\eta(x+\nu)}\right].$$

Si l'on veut aller plus loin, on peut appliquer la relation (20) qui nous donnera le développement suivant

$$\log \Gamma(x+h) = \log \sqrt{2\pi} + x\log x - x + B_1(h)\log x$$
$$- \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{B_{\nu+1}(h)}{\nu(\nu+1)} \frac{(-1)^\nu}{x^\nu} - \frac{1}{m}\int_0^\infty \bar{B}_m(z-h)\frac{dz}{(x+z)^{m+1}} \tag{50}$$

qui se réduit à la série de Stirling pour $h=0$. Cette équation est donc valable pour toute valeur positive de x.[1]

On peut aussi, si l'on aime mieux, déduire les propriétés de la fonction gamma de celles de la fonction $\Psi(x)$ qui est d'une nature plus simple. En effet, on a par définition

$$\log \Gamma(x) = \mathop{\Large S}_1^x \log x \triangle x + c_1 .$$

En dérivant par rapport à x on trouvera

$$D_x \log \Gamma(x) = \mathop{\Large S}_1^x \frac{\triangle x}{x} = \Psi(x). \tag{51}$$

Intégrons entre 1 et x, nous obtenons

$$\log \Gamma(x) = \int_1^x \Psi(x)\,dx \qquad \text{c. q. f. d.}$$

En intégrant terme par terme dans la série (42) on trouve

$$\log \Gamma(x+1) = -Cx + \sum_{s=1}^\infty \left[\frac{x}{s} - \log\left(1+\frac{x}{s}\right)\right]. \tag{52}$$

On en tire le produit

$$\Gamma(x+1) = e^{-Cx} \prod_{s=1}^\infty \frac{e^{\frac{x}{s}}}{1+\frac{x}{s}}$$

[1] Pour ne pas sortir du cadre que nous nous sommes imposé, nous avons parlé seulement des valeurs réelles de x. Mais cette restriction n'est nullement nécessaire dans le cas actuel. Il résulte de l'analyse de la deuxième section de ce mémoire que l'équation (50) est valable, pourvu que $\pi > \arg x > -\pi$, et que la série divergente, qu'on obtient en faisant $m=\infty$, représente la fonction asymptotiquement dans le même angle.

dû à Schlömilch et dont Weierstrass s'est servi dans son mémoire sur les facultés analytiques. En intégrant sous le signe dans l'intégrale (45) on trouve enfin la formule de Plana

$$\log \Gamma(x+1) = \int_0^\infty \left[x - \frac{1-e^{-tx}}{1-e^{-t}}\right] \frac{e^{-t}}{t} dt, \qquad x > -1.$$

Les termes complémentaires des séries asymptotiques.

16. Dans le paragraphe 6 nous avons mentionné plusieurs travaux importants sur la valeur approchée du reste de la formule sommatoire d'Euler. Quoique nous n'ayons pas de remarques essentiellement nouvelles à présenter sur ce sujet nous allons pourtant indiquer diverses expressions du reste de nos deux séries asymptotiques en y appliquant un raisonnement voisin de celui des auteurs cités. Supposons que la dérivée $\varphi^{(2m)}(x)$ soit continue pour $x \geq b$, et que la série

$$\sum_{s=0}^\infty \varphi^{(2m)}(x+s\omega)$$

converge uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq b+\omega$, et enfin que

$$\lim_{x \to \infty} \varphi^{(2m-1)}(x) = 0.$$

Considérons l'équation (20). Je parlerai seulement du cas où l'on fait $h=0$ ou $h=\frac{1}{2}$. Ces deux cas sont ceux qui sont les plus remarquables et ils nous conduisent aux équations suivantes

$$F(x\,|\,\omega) = \int_a^x \varphi(z)dz - \frac{\omega}{2}\varphi(x) + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} \varphi^{(2\nu-1)}(x) + R_{2m+1}, \tag{53}$$

où

$$R_{2m+1} = \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^\infty \dot{B}_{2m}(z)\, \varphi^{(2m)}(x+\omega z)\, dz, \tag{54}$$

et

$$F\left(x+\frac{\omega}{2}\,|\,\omega\right)=\int_a^x \varphi(z)\,dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^{2\nu}D_{2\nu}}{2^{2\nu}(2\nu)!}\varphi^{(2\nu-1)}(x)+\overline{R}_{2m+1}, \tag{55}$$

où

$$\overline{R}_{2m+1}=\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^\infty \dot{B}_{2m}\left(z+\frac{1}{2}\right)\varphi^{(2m)}(x+\omega z)\,dz. \tag{56}$$

Pour juger de la grandeur du reste on peut avec avantage le rapprocher au dernier terme de la série. On aura

$$R_{2m}=R_{2m+1}+\frac{\omega^{2m}B_{2m}}{(2m)!}\varphi^{(2m-1)}(x), \tag{57}$$

$$\overline{R}_{2m}=\overline{R}_{2m+1}+\frac{\omega^{2m}D_{2m}}{2^{2m}(2m)!}\varphi^{(2m-1)}(x).$$

Par conséquent

$$R_{2m}=\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^\infty (\dot{B}_{2m}(z)-B_{2m})\,\varphi^{(2m)}(x+\omega z)\,dz$$

$$=\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^1 (B_{2m}(z)-B_{2m})\sum_{s=0}^{\infty}\varphi^{(2m)}(x+\omega z+\omega s)\,dz. \tag{58}$$

$$\overline{R}_{2m}=\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^\infty\left(\dot{B}_{2m}\left(z+\frac{1}{2}\right)-B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\varphi^{2m}(x+\omega z)\,dz$$

$$=\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(B_{2m}\left(z+\frac{1}{2}\right)-B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\sum_{s=0}^{\infty}[\varphi^{2m}(x+\omega z+\omega s)+\varphi^{(2m)}(x-\omega z+\omega(s+1))]. \tag{59}$$

Remarquons que la fonction $B_{2m}(z)-B_{2m}$ ne change pas de signe dans l'intervalle $0<z<1$. En appliquant le théorème de la moyenne de DARBOUX[1] à l'expression (58) on trouvera

$$R_{2m}=\lambda\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi^{(2m)}(x+\theta\omega+s\omega)\int_0^1 (B_{2m}(z)-B_{2m})\,dz, \qquad 0<\theta<1,$$

[1] l. c. p. 294—5.

λ étant une quantité imaginaire dont le module est au plus égal à l'unité. Mais on sait que

$$\int_0^1 B_{2m}(z)\,dz = 0.$$

L'expression précédente se réduit donc à la suivante

$$R_{2m} = -\lambda \frac{\omega^{2m+1} B_{2m}}{(2m)!} \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}(x+\theta\omega+s\omega).$$

En tenant compte de la relation (34) on peut encore écrire cette équation comme il suit

$$R_{2m} = \lambda \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} F^{(2m)}(x+\theta\omega|\omega), \qquad 0<\theta<1.$$

Si $\varphi(x)$ est une fonction *réelle* de la variable réelle x on peut ici, et dans ce qui suit, supprimer le facteur λ.

En remarquant que la fonction $B_{2m}\left(z+\frac{1}{2}\right) - B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $0<z<\frac{1}{2}$, on peut encore appliquer le théorème de la moyenne à l'expression (59) et, en tenant compte de l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2m}\left(z+\frac{1}{2}\right) dz = 0,$$

on trouvera

$$\overline{R}_{2m} = \lambda \frac{\omega^{2m} D_{2m}}{2^{2m}(2m)!} F^{(2m)}(x+\theta\omega|\omega), \qquad 0<\theta<1.$$

17. Passons à la fonction G et supposons la dérivée $\varphi^{(n)}(x)$ continue pour $x \geqq b$, et la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(n)}(x+s\omega)$$

uniformément convergente dans l'intervalle $b \leqq x \leqq b+\omega$. Faisons $h=0$ dans l'équation (19), on aura, pour $x \geqq b$, si n est de la forme $n=2m+1$,

$$G(x|\omega) = \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^{2\nu-1} C_{2\nu-1}}{2^{2\nu-1}(2\nu-1)!} \varphi^{(2\nu-1)}(x) + \Re_{2m+1}, \tag{60}$$

où

$$\mathfrak{R}_{2m+1} = -\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^\infty \dot{E}_{2m}(z)\,\varphi^{(2m+1)}(x+\omega z)\,dz$$

$$= -\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^1 E_{2m}(z)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi^{(2m+1)}(x+\omega z+\omega s)dz. \tag{61}$$

Mais en faisant $h = \frac{1}{2}$ on aura, si n est de la forme $n = 2m$,

$$G\left(x+\frac{\omega}{2}\,\middle|\,\omega\right) = \sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\omega^{2\nu}E_{2\nu}}{2^{2\nu}(2\nu)!}\varphi^{(2\nu)}(x) + \overline{\mathfrak{R}}_{2m}, \tag{62}$$

où

$$\overline{\mathfrak{R}}_{2m} = \frac{\omega^{2m}}{(2m-1)!}\int_0^\infty \dot{E}_{2m-1}\left(z-\frac{1}{2}\right)\varphi^{(2m)}(x+\omega z)\,dz$$

$$= \frac{\omega^{2m}}{(2m-1)!}\int_0^1 \dot{E}_{2m-1}\left(z-\frac{1}{2}\right)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi^{(2m)}(x+\omega z+\omega s)dz. \tag{63}$$

Le polynome $E_{2m}(z)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $0 < z < 1$. En appliquant le théorème de la moyenne à l'expression (61) on trouvera donc

$$\mathfrak{R}_{2m+1} = -\lambda\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi^{(2m+1)}(x+\theta\omega+s\omega)\int_0^1 E_{2m}(z)\,dz.$$

Mais on a

$$\int_0^1 E_{2m}(z)\,dz = -\frac{C_{2m+1}}{2^{2m}(2m+1)}.$$

Par conséquent

$$\mathfrak{R}_{2m+1} = \lambda\frac{\omega^{2m+1}C_{2m+1}}{2^{2m}(2m+1)!}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi^{(2m+1)}(x+\theta\omega+s\omega).$$

Cette expression du reste peut encore s'écrire comme il suit

$$\mathfrak{R}_{2m+1} = \lambda\frac{\omega^{2m+1}C_{2m+1}}{2^{2m+1}(2m+1)!}G^{(2m+1)}(x+\theta\omega\,|\,\omega), \qquad 0<\theta<1.$$

De même, puisque la fonction $\dot{E}_{2m-1}\left(z-\frac{1}{2}\right)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $0<z<1$, on peut appliquer le théorème de la moyenne à l'expression (63). En tenant compte de l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}} E_{2m-1}(z)\,dz = \frac{E_{2m}}{2^{2m}(2m)},$$

on trouvera

$$\overline{\Re}_{2m} = \lambda \frac{\omega^{2m}\,E_{2m}}{2^{2m}\,(2m)!}\,G^{2m}(x+\theta\omega\,|\,\omega), \qquad 0<\theta<1.$$

18. En resserrant les hypothèses relativement à $\varphi(x)$ on peut trouver d'autres expressions du terme complémentaire qui sont plus commodes pour les applications. Supposons que la dérivée $\varphi^{(n)}(x)$ soit continue et positive, si $x>b$, et que $\varphi^{(n-1)}(x)$ tende vers zéro quand x augmente indéfiniment. Soit d'abord $n=2m$. En appliquant le théorème de la moyenne à l'expression (54), on trouvera

$$R_{2m+1} = \frac{\omega^{2m}\,B_{2m}(\theta)}{(2m)!}\int_0^{\infty}\varphi^{(2m)}(x+z)\,dz, \qquad 0<\theta<1.$$

Mais on a

$$|B_{2m}(z)| < |B_{2m}|, \qquad \text{si } 0<z<1.$$

Par conséquent, en désignant par θ un nombre compris entre -1 et $+1$ on aura

$$R_{2m+1} = \theta\frac{\omega^{2m}\,B_{2m}}{(2m)!}\,\varphi^{(2m-1)}(x). \tag{64}$$

Le reste de la série (60) peut s'écrire sous la forme

$$\Re_{2m+1} = \frac{\omega^{2m}}{(2m-1)!}\int_0^{\infty}\dot{E}_{2m-1}(z)\,\varphi^{(2m)}(x+\omega z)\,dz.$$

En y appliquant le théorème de la moyenne et en remarquant que

$$|E_{2m-1}(z)| < |E_{2m-1}(0)|, \qquad \text{si } 0<z<1,$$

on trouvera

$$\Re_{2m+1} = \theta\frac{\omega^{2m-1}\,C_{2m-1}}{2^{2m-1}\,(2m-1)!}\,\varphi^{(2m-1)}(x), \qquad -1<\theta<1. \tag{65}$$

De même, si n est de la forme $2m+1$, on a

$$\overline{\mathfrak{R}}_{2m+1} = \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^\infty \bar{E}_{2m}\left(z+\frac{1}{2}\right) \varphi^{(2m+1)}(x+\omega z)\, dz$$

mais puisque

$$|E_{2m}(z)| \leq \left| E_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)\right|, \qquad \text{si } 0 \leq z \leq 1$$

on en conclut que

$$\overline{\mathfrak{R}}_{2m+1} = \theta \frac{\omega^{2m} E_{2m}}{2^{2m}(2m)!} \varphi^{(2m)}(x), \qquad -1 < \theta < 1. \tag{66}$$

Par conséquent, *le reste est en valeur absolue plus petit que le dernier terme de la série.* En substituant l'expression (64) dans l'équation (57) on trouvera

$$R_{2m} = \theta \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x), \qquad 0 < \theta < 2. \tag{67}$$

Des équations (65) et (66) on déduira de la même manière

$$\mathfrak{R}_{2m-1} = \theta \frac{\omega^{2m-1} C_{2m-1}}{2^{2m-1}(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(x), \tag{68}$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_{2m} = \theta \frac{\omega^{2m} E_{2m}}{2^{2m}(2m)!} \varphi^{(2m)}(x), \tag{69}$$

et l'on démontre encore que

$$R_{2m} = \theta \frac{\omega^{2m} D_{2m}}{2^{2m}(2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x). \tag{70}$$

Dans les trois dernières équations θ désigne un nombre compris entre 0 et 2. *Le terme reste admet donc le même signe que le terme suivant de la série.*

19. En supposant quelque chose de plus on peut préciser les dernières inégalités. Admettons que, pour $x > b$, les dérivées $\varphi^{(n-1)}(x)$ et $\varphi^{(n+1)}(x)$ soient continues, négatives, croissantes et tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment. Alors si $n = 2m$, il résulte de l'expression (67) que R_{2m} et R_{2m+2} sont de signes contraires parce qu'il en est ainsi des nombres B_{2m} et B_{2m+2}. Mais on a $R_{2m+2} = R_{2m+1}$. En rapprochant l'équation (64) de l'équation (67) on voit que dans l'équation (64) θ satisfait à l'inégalité $-1 < \theta < 0$. Mais cette inégalité entraîne que dans l'équation (67) on a $0 < \theta < 1$. De la même manière on démontre que $-1 < \theta < 0$ dans

les équations (65) et (66), et que $0 < \theta < 1$ dans les équations (68), (69) et (70). Par conséquent, *le reste est plus petit que le premier des termes qu'on a supprimés* et il admet le même signe que ce terme. De plus le reste et le dernier terme calculé sont de signes contraires. Mais avec les hypothèses que nous venons de faire on peut trouver une expression beaucoup plus précise du terme complémentaire. En effet, si $n = 2m$, la dérivée $\varphi^{(2m)}(x)$ est positive et décroissante, et l'intégrale

$$\int_x^\infty \varphi^{(2m)}(z)\,dz$$

converge. Mais il en résulte (cf. paragraphe 7) que la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}(x + s\omega)$$

converge absolument et uniformément. Reprenons l'équation (58) que nous écrivons de la manière suivante

$$R_{2m} = \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^{\frac{1}{2}} (B_{2m}(z) - B_{2m})\,P(z)\,dz, \tag{71}$$

où

$$P(z) = \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi^{(2m)}(x + \omega z + \omega s) + \varphi^{(2m)}(x - \omega z + \omega + \omega s)].$$

Je dis que la fonction $P(z)$ est positive et décroissante dans l'intervalle $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$. Pour le voir, dérivons par rapport à z, on aura

$$P'(z) = \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi^{(2m+1)}(x + \omega z + \omega s) - \varphi^{(2m+1)}(x - \omega z + \omega(s+1))]. \tag{72}$$

En effet, la dernière série converge uniformément par rapport à z, car en faisant $z = 0$, on obtiendra

$$\begin{aligned} P'(0) &= \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi^{(2m+1)}(x + \omega s) - \varphi^{(2m+1)}(x + \omega(s+1))] \\ &= \omega\varphi^{(2m+1)}(x) - \omega \lim_{s \to \infty} \varphi^{(2m+1)}(x + \omega s) = \omega\varphi^{(2m+1)}(x). \end{aligned}$$

La série (72) converge donc absolument pour $z = 0$ et les valeurs absolues des termes décroissent quand z augmente de 0 à $\frac{1}{2}$. L'équation (72) est ainsi établie, et de cette équation on conclut que $P'(z)$ est négative dans l'intervalle $0 \leq z < \frac{1}{2}$, car tous les termes de la série sont négatifs. Par conséquent la fonction $P(z)$ est positive et décroissante dans cet intervalle. Cela posé, rappelons un lemme dû à TCHEBYCHEF et dont SONIN s'est servi dans le mémoire que nous avons cité dans le paragraphe 6. Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions dont l'une est croissante avec la variable et l'autre décroissante dans l'intervalle $a < x < b$. On aura[1] l'inégalité suivante

$$(b-a)\int_a^b \varphi(z)\,\psi(z)\,dz < \int_a^b \varphi(z)\,dz \int_a^b \psi(z)\,dz.$$

La fonction

$$(-1)^m\,(B_{2m}(z) - B_{2m})$$

est positive et croissante dans l'intervalle $0 < z < \frac{1}{2}$. On peut donc appliquer l'inégalité de Tchebychef à l'intégrale (71) et l'on trouvera

$$(-1)^m R_{2m} < (-1)^m \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!}\, 2 \int_0^{\frac{1}{2}} P(z)\,dz \int_0^{\frac{1}{2}} (B_{2m}(z) - B_{2m})\,dz.$$

Mais on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2m}(z)\,dz = 0,$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{2}} P(z)\,dz = \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}(x + \omega z + \omega s)\,dz = \frac{1}{\omega}\int_x^{\infty} \varphi^{(2m)}(z)\,dz.$$

Par conséquent

$$(-1)^m R_{2m} < (-1)^m \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!}\varphi^{(2m-1)}(x). \tag{73}$$

---

[1] On trouve une démonstration de ce lemme, due à M. PICARD, dans le Cours autographié d'Hermite (2e éd. 1881—2). Une autre démonstration a été donnée par M FRANKLIN (Amer. J. math. 7 (1885), p. 377—9).

C'est la même inégalité que nous avons trouvée plus haut par une autre voie. Mais de l'équation (71) on peut encore tirer une autre inégalité. Puisque $P(x)$ est décroissante dans l'intervalle d'intégration on aura

$$(-1)^m R_{2m} > \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} P\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} (-1)^m (B_{2m}(z) - B_{2m}) dz$$

$$= (-1)^{m+1} \frac{\omega^{2m+1} B_{2m}}{(2m)!} \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}\left(x + \frac{\omega}{2} + s\omega\right).$$

Mais, comme $\varphi^{(2m)}(x)$ est positive et décroissante, on trouvera

$$\omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}\left(x + \frac{\omega}{2} + s\omega\right) > \int_{x+\frac{\omega}{2}}^{\infty} \varphi^{(2m)}(z)\, dz = -\varphi^{(2m-1)}\left(x + \frac{\omega}{2}\right).$$

Par conséquent

$$(-1)^m R_{2m} > (-1)^m \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \varphi^{(2m-1)}\left(x + \frac{\omega}{2}\right).$$

En rapprochant cette inégalité de l'inégalité (73) on voit qu'on a

$$R_{2m} = \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x + \theta\omega), \qquad \text{où } 0 < \theta < \frac{1}{2}. \tag{74}$$

On démontre de même que

$$\overline{R}_{2m} = \frac{\omega^{2m} D_{2m}}{2^{2m}(2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x + \theta\omega), \qquad 0 < \theta < \frac{1}{2}. \tag{75}$$

Soit maintenant $n = 2m + 1$ et envisageons l'équation (63) qui peut s'écrire comme il suit

$$\overline{\mathfrak{R}}_{2m} = -\frac{\omega^{2m}}{(2m-1)!} \int_0^{\frac{1}{2}} E_{2m-1}\left(z + \frac{1}{2}\right) P(z)\, dz,$$

où

$$P(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\varphi^{(2m)}(x + \omega z + \omega s) + \varphi^{(2m)}(x + \omega - \omega z + \omega s)]. \tag{76}$$

Le polynome d'Euler ne change pas de signe dans l'intervalle d'intégration. En appliquant le théorème de la moyenne on trouvera donc

$$\overline{\Re}_{2m} = -\frac{\omega^{2m}}{(2m-1)!} P(\theta) \int_0^{\frac{1}{2}} E_{2m-1}\left(z+\frac{1}{2}\right) dz = \frac{\omega^{2m} E_{2m}}{2^{2m}(2m)!} P(\theta),$$

θ désignant un nombre compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. En dérivant la série (76) par rapport à x et et raisonnant comme plus haut, on démontre que la fonction $P(z)$ est négative et croissante dans l'intervalle $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$. Mais on a d'une part

$$P(0) = \varphi^{(2m)}(x)$$

et d'autre part

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \varphi^{(2m)}\left(x+\frac{\omega}{2}+s\omega\right)$$

$$= \varphi^{(2m)}\left(x+\frac{\omega}{2}\right) + \omega \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1} \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(2m)}\left(x+\frac{\omega}{2}+s\omega\right).$$

La somme de la dernière série est évidemment un nombre négatif. Par conséquent

$$P\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi^{(2m)}\left(x+\frac{\omega}{2}\right).$$

On aura donc

$$\varphi^{(2m)}(x) < P(\theta) < \varphi^{(2m)}\left(x+\frac{\omega}{2}\right).$$

Mais il en résulte que le reste est de la forme

$$\overline{\Re}_{2m} = \frac{\omega^{2m} E_{2m}}{2^{2m}(2m)!} \varphi^{2m}(x+\theta\omega). \tag{77}$$

En supposant $n = 2m$ on démontre enfin que

$$\Re_{2m-1} = \frac{\omega^{2m-1} C_{2m-1}}{2^{2m-1}(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(x+\theta\omega), \tag{78}$$

θ étant, dans les deux cas, compris entre 0 et $\frac{1}{2}$.

Séries trigonométriques.

20. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ admette, pour $x > b$, une dérivée continue d'ordre m telle que l'intégrale

$$\int_b^\infty |\varphi^{(m)}(x)|\, dx$$

ait un sens. La solution $F(x|\omega)$ peut se développer en une série de Fourier dont les coefficients s'expriment d'une manière très simple à l'aide de la fonction $\varphi(x)$. En effet, soit x_0 un nombre quelconque $\geq b$, et considérons l'intégrale suivante

$$\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x_0+\omega} e^{\frac{2\pi i n}{\omega}x} F(x|\omega)\, dx,$$

n étant un entier positif. Puisque F_η tend uniformément vers F cette intégrale est égale à

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x_0+\omega} e^{\frac{2\pi i n}{\omega}x} F_\eta(x|\omega)\, dx.$$

Mais en intégrant terme par terme, on trouve, pour toute valeur positive de η

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x_0+\omega} e^{\frac{2\pi i n}{\omega}x} F_\eta(x|\omega)\, dx &= -\int_{x_0}^{x_0+\omega} \sum_{s=0}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n}{\omega}x} \varphi(x+s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)}\, dx \\
&= -\sum_{s=0}^{\infty} \int_{x_0+s\omega}^{x_0+(s+1)\omega} e^{\frac{2\pi i n}{\omega}x} \varphi(x)\, e^{-\eta x}\, dx \\
&= -\int_{x_0}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n}{\omega}x} \varphi(x)\, e^{-\eta x}\, dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x_0+\omega} e^{\frac{2\pi i n}{\omega}x} F(x|\omega)\, dx = -\lim_{\eta \to 0} \int_{x_0}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n}{\omega}x} \varphi(x)\, e^{-\eta x}\, dx.$$

Notre hypothèse relativement à la fonction $\varphi(x)$ entraîne donc l'existence de la limite au second membre. Cela posé rappelons que nous avons démontré que la

fonction $F(x)$ admet une dérivée continue. Cette fonction se représente donc, dans l'intervalle $x_0 < x < x_0 + \omega$, par la série de Fourier

$$F(x|\omega) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n x}{\omega} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{\omega}\right) \tag{1}$$

dont les coefficients a_n et b_n se déterminent par les expressions suivantes

$$a_0 = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x|\omega)\,dx = \int_a^{x_0}\varphi(x)\,dx,$$

$$a_n = -\lim_{\eta\to 0}\int_{x_0}^{\infty}\cos\frac{2\pi n x}{\omega}\varphi(x)\,e^{-\eta x}\,dx, \tag{2}$$

$$b_n = -\lim_{\eta\to 0}\int_{x_0}^{\infty}\sin\frac{2\pi n x}{\omega}\varphi(x)\,e^{-\eta x}\,dx. \tag{2'}$$

Soit en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ et $\omega = 1$. Les coefficients a_n et b_n s'expriment par le sinus-intégral

$$\operatorname{si}(x) = -\int_x^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

et le cosinus-intégral

$$\operatorname{ci}(x) = -\int_x^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx.$$

On a en effet

$$a_n = -\int_{x_0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n x}{x}\,dx,$$

$$b_n = -\int_{x_0}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{x}\,dx,$$

parce que ces intégrales convergent. Si x_0 est positif la fonction $\Psi(x)$ se représente donc, dans l'intervalle $x_0 < x < x_0 + 1$, par la série

$$\Psi(x) = \log x_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}[\mathrm{ci}(2\pi n x_0)\cos(2\pi n x) + \mathrm{si}(2\pi n x_0)\sin(2\pi n x)]. \tag{3}$$

La fonction $G(x|\omega)$ peut aussi, dans l'intervalle $x_0 < x < x_0 + \omega$, se représenter par une série trigonométrique. De la série (1) on déduit en effet, en tenant compte de l'équation

$$G(x|\omega) = \underset{\omega}{\triangle} F(x|2\omega),$$

cette autre série

$$G(x|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{\omega} + \beta_{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\omega}\right), \qquad x_0 < x < x_0 + \omega, \tag{4}$$

où les coefficients α_n et β_n sont égaux à

$$\alpha_n = \frac{4}{\omega}\lim_{\eta \to 0}\int_{x_0}^{\infty}\cos\frac{\pi n x}{\omega}\varphi(x)e^{-\eta x}dx, \tag{5}$$

$$\beta_n = \frac{4}{\omega}\lim_{\eta \to 0}\int_{x_0}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{\omega}\varphi(x)e^{-\eta x}dx. \tag{5'}$$

Il convient de remarquer que cette série représente la fonction $G(x|\omega)$ seulement dans la moitié de l'intervalle de périodicité. Dans l'intervalle $x_0 - \omega < x < x_0$ elle représente la fonction $-G(x+\omega|\omega)$. Si l'on pose en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ on voit que la fonction $g(x)$, dont il a été question plus haut, se développe de la manière suivante

$$g(x) = -4\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{ci}(2n+1)\pi x_0 \,.\, \cos(2n+1)\pi x + \mathrm{si}(2n+1)\pi x_0 \,.\, \sin(2n+1)\pi x], \tag{6}$$

où l'on suppose que $0 < x_0 < x < x_0 + 1$.

21. En général les intégrales (2) et (5) ne sont pas convergentes pour $\eta = 0$, mais on peut en déduire d'autres qui convergent et représentent les coefficients a_n, b_n etc. En effet, considérons l'intégrale suivante

$$\psi_1(x) = -\int_x^{\infty}\cos\frac{2\pi n t}{\omega}e^{-\eta t}dt.$$

Elle convergera, si $\eta > 0$, et l'on a évidemment

$$\psi_1(x) = -\sum_{s=0}^{\infty} \int_{x+\frac{s\omega}{n}}^{x+\frac{(s+1)\omega}{n}} \cos\frac{2\pi n t}{\omega} e^{-\eta t} dt = -\sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{\eta s \omega}{n}} \int_{x}^{x+\frac{\omega}{n}} \cos\frac{2\pi n t}{\omega} e^{-\eta t} dt,$$

donc

$$\psi_1(x) = \frac{e^{-\eta x}}{e^{-\frac{\eta\omega}{n}} - 1} \int_0^{\frac{\omega}{n}} \cos\frac{2\pi n}{\omega}(x+t)\, e^{-\eta t} dt.$$

La fonction $\psi_1(x)$ satisfait par conséquent à la relation

$$\psi_1\left(x + \frac{\omega}{n}\right) = e^{-\frac{\eta\omega}{n}} \psi_1(x).$$

Posons ensuite

$$\psi_2(x) = -\int_x^{\infty} \psi_1(t)\, dt.$$

Cette intégrale convergera si $\eta > 0$, et l'on trouve

$$\psi_2(x) = -\sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{\eta s\omega}{n}} \int_x^{x+\frac{\omega}{n}} \psi_1(t)\, dt = \frac{1}{e^{-\frac{\eta\omega}{n}} - 1} \int_0^{\frac{\omega}{n}} \psi_1(x+t) dt.$$

Par conséquent

$$\psi_2(x) = \frac{e^{-\eta x}}{\left(e^{-\frac{\eta\omega}{n}} - 1\right)^2} \int_0^{\frac{\omega}{n}} e^{-\eta t_2} dt_2 \int_0^{\frac{\omega}{n}} e^{-\eta t_1} \cos\frac{2\pi n}{\omega}(x + t_1 + t_2)\, dt_1.$$

Posons en général

$$\psi_\nu(x) = -\int_x^{\infty} \psi_{\nu-1}(t)\, dt.$$

On voit aisément que

$$\psi_\nu(x) = \frac{1}{e^{-\frac{\eta\omega}{n}} - 1} \int_0^{\frac{\omega}{n}} \psi_{\nu-1}(x+t)\, dt.$$

Par conséquent

$$\psi_\nu(x) = \frac{e^{-\eta x}}{\left(e^{-\frac{\eta\omega}{n}} - \text{I}\right)^\nu} \int\limits_0^{\frac{\omega}{n}} e^{-\eta t_\nu} dt_\nu \cdots \int\limits_0^{\frac{\omega}{n}} e^{-\eta t_1} \cos \frac{2\pi n}{\omega}(x + t_1 + t_2 \cdots + t_\nu) dt_1 .$$

On peut écrire la dernière équation comme il suit

$$\psi_\nu(x) = e^{-\eta x} \int\limits_0^{\frac{\omega}{n}} \frac{\text{I} - e^{-\eta t_\nu}}{\text{I} - e^{-\frac{\eta\omega}{n}}} dt_\nu \cdots \int\limits_0^{\frac{\omega}{n}} \frac{\text{I} - e^{-\eta t_1}}{\text{I} - e^{-\frac{\eta\omega}{n}}} \cos \frac{2\pi n}{\omega}(x + t_1 + t_2 \cdots + t_\nu) dt_1 . \qquad (7)$$

La fonction $\dfrac{\text{I} - e^{-\eta t}}{\text{I} - e^{-\frac{\eta\omega}{n}}}$ est positive et croissante dans l'intervalle d'intégration. Du second théorème de la moyenne on conclut donc que

$$\psi_\nu(x) = e^{-\eta x} \int\limits_{\theta_\nu}^{\frac{\omega}{n}} dt_\nu \cdots \int\limits_{\theta_1}^{\frac{\omega}{n}} \cos \frac{2\pi n}{\omega}(x + t_1 + t_2 \cdots + t_\nu) dt_1 ,$$

les θ_ν étant des nombres positifs et plus petits que $\dfrac{\omega}{n}$. On sait donc trouver un nombre positif C tel que

$$|\psi_\nu(x)| < C e^{-\eta x} \qquad (8)$$

pour toute valeur positive de η. Faisons maintenant tendre η vers zéro dans l'équation (7), il vient

$$\lim_{\eta \to 0} \psi_\nu(x) = \left(\frac{n}{\omega}\right)^\nu \int\limits_0^{\frac{\omega}{n}} t_\nu dt_\nu \cdots \int\limits_0^{\frac{\omega}{n}} t_1 \cos \frac{2\pi n}{\omega}(x + t_1 + t_2 \cdots + t_\nu) dt_1 ,$$

Par un calcul facile on en déduit

$$\lim_{\eta \to 0} \psi_{2\nu}(x) = (-\text{I})^\nu \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^{2\nu} \cos \frac{2\pi n x}{\omega} ,$$

$$\lim_{\eta \to 0} \psi_{2\nu+1}(x) = (-\text{I})^\nu \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^{2\nu+1} \sin \frac{2\pi n x}{\omega} .$$

En posant

$$\chi_1(x) = -\int_x^\infty \sin\frac{2\pi n t}{\omega} e^{-\eta t}\, dt$$

$$\chi_\nu(x) = -\int_x^\infty \chi_{\nu-1}(t)\, dt$$

on démontre de même que $\chi_\nu(x)$ satisfait à une inégalité de la forme (8) et qu'on a

$$\lim_{\eta\to 0} \chi_{2\nu}(x) = (-1)^\nu \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^{2\nu} \sin\frac{2\pi n x}{\omega},$$

$$\lim_{\eta\to 0} \chi_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1} \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^{2\nu+1} \cos\frac{2\pi n x}{\omega}.$$

Cela posé, considérons les intégrales aux seconds membres des équations (2). En intégrant m fois par partie on trouve, en tenant compte de l'inégalité (8),

$$-\int_{x_0}^\infty \cos\frac{2\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x}\, dx = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu \varphi^{(\nu)}(x_0)\psi_{\nu+1}(x_0) + (-1)^{m+1}\int_{x_0}^\infty \varphi^{(m)}(x)\psi_m(x)\, dx,$$

$$-\int_{x_0}^\infty \sin\frac{2\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x}\, dx = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu \varphi^{(\nu)}(x_0)\chi_{\nu+1}(x_0) + (-1)^{m+1}\int_{x_0}^\infty \varphi^{(m)}(x)\chi_m(x)\, dx.$$

En faisant tendre η vers zéro on trouve, si m est pair,

$$\begin{aligned} a_n = {} & \frac{\omega}{2\pi n}\varphi(x_0)\sin\frac{2\pi n x_0}{\omega} + \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^2 \varphi^{(1)}(x_0)\cos\frac{2\pi n x_0}{\omega} \\ & - \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^3 \varphi^{(2)}(x_0)\sin\frac{2\pi n x_0}{\omega} - \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^4 \varphi^{(3)}(x_0)\cos\frac{2\pi n x_0}{\omega} + \cdots \\ & - (-1)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m \varphi^{(m-1)}(x_0)\cos\frac{2\pi n x_0}{\omega} - (-1)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m \int_{x_0}^\infty \varphi^{(m)}(x)\cos\frac{2\pi n x}{\omega}\, dx, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} b_n = {} & -\frac{\omega}{2\pi n}\varphi(x_0)\cos\frac{2\pi n x_0}{\omega} + \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^2 \varphi^{(1)}(x_0)\sin\frac{2\pi n x_0}{\omega} \\ & + \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^3 \varphi^{(2)}(x_0)\cos\frac{2\pi n x_0}{\omega} - \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^4 \varphi^{(3)}(x_0)\sin\frac{2\pi n x_0}{\omega} - \cdots \\ & - (-1)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m \varphi^{(m-1)}(x_0)\sin\frac{2\pi n x_0}{\omega} - (-1)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m \int_{x_0}^\infty \varphi^{(m)}(x)\sin\frac{2\pi n x}{\omega}\, dx. \end{aligned} \tag{10}$$

Mais si m est impair les deux derniers termes dans l'expression de a_n sont

$$+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m \varphi^{(m-1)}(x_0)\sin\frac{2\pi n x_0}{\omega}+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m\int_{x_0}^{\infty}\varphi^{(m)}(x)\sin\frac{2\pi n x}{\omega}dx,$$

et les deux derniers termes dans l'expression de b_n sont

$$+(-1)^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m \varphi^{(m-1)}(x_0)\cos\frac{2\pi n x_0}{\omega}+(-1)^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m\int_{x_0}^{\infty}\varphi^{(m)}(x)\cos\frac{2\pi n x}{\omega}dx.$$

Il suffit de remplacer ω par 2ω dans ces expressions pour trouver les valeurs des coefficients α_n et β_n de la série (4).

Ces développements mettent en évidence comment les a_n, b_n etc. se comportent pour les valeurs très grandes de n. Le premier terme est du même ordre de grandeur que $\frac{1}{n}$. La convergence des séries (1) et (4) est donc en général due aux variations de signe que présentent leurs termes. *Pour que ces séries convergent absolument il faut et il suffit que* $\varphi(x_0)=0$.

22. Appliquons ces formules à la fonction $\log\Gamma(x)$ et posons $\varphi(x)=\log x$ et $\omega=1$. Soit x_0 un nombre positif quelconque, on trouve, en prenant $m=1$

$$a_n=\log x_0\frac{\sin 2\pi n x_0}{2\pi n}-\frac{\operatorname{si}(2\pi n x_0)}{2\pi n}, \tag{11}$$

$$b_n=-\log x_0\frac{\cos 2\pi n x_0}{2\pi n}+\frac{\operatorname{ci}(2\pi n x_0)}{2\pi n}. \tag{11'}$$

On a en outre

$$a_0=\int_0^{x_0}\varphi(x)\,dx=x_0\log x_0-x_0.$$

En se rappelant que

$$\log\Gamma(x)=\log\sqrt{2\pi}+\mathop{\large S}_0^x\log x\,\triangle x,$$

on trouvera, après une réduction facile

$$\log\Gamma(x)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x_0-x_0$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{si}(2\pi n x_0)\cos(2\pi n x)-\operatorname{ci}(2\pi n x_0)\sin(2\pi n x)}{\pi n}. \tag{12}$$

Cette série converge absolument, si x_0 est positif, et l'équation est vraie dans l'intervalle $0 < x_0 \leq x \leq x_0 + 1$. Elle a été trouvée par M. NIELSEN[1] dans le cas particulier $x_0 = 1$ et par KUMMER[2] dans le cas $x_0 = 0$. Pour voir que notre série s'accorde avec celle de Kummer remarquons qu'on a

$$\operatorname{si}(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)(2s+1)!}, \tag{13}$$

$$\operatorname{ci}(x) = C + \log x + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{2s(2s)!}. \tag{14}$$

Nous avons établi les équations (11) en supposant x_0 positif. En faisant tendre x_0 vers zéro on trouve

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) \cos 2\pi n x \, dx = a_n = \frac{1}{4n},$$

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) \sin 2\pi n x \, dx = b_n = \frac{C + \log 2\pi n}{2\pi n},$$

C étant la constante d'Euler. La fonction $\log \Gamma(x)$ satisfait dans l'intervalle $0 < x < 1$ aux conditions de Dirichlet. On a donc à l'intérieur de cet intervalle

$$\log \Gamma(x) = \log \sqrt{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos 2\pi n x}{2n} + (C + \log 2\pi n) \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}\right]. \tag{15}$$

En réduisant le second membre à l'aide des équations (17') et (20) du paragraphe suivant on trouve

$$\log \Gamma(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)(C + \log 2) + (1 - x) \log \pi - \frac{1}{2} \log \sin \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\pi n} \sin 2\pi n x. \tag{16}$$

C'est la série de Kummer.

Mentionnons deux cas particuliers de l'équation (12). En faisant x égal à un entier positif, et en remplaçant x_0 par z, on voit qu'on a, pour toute valeur positive de z,

[1] Theorie des Integrallogarithmus. Leipzig 1906, p. 79.
[2] J. reine angew. Math. 35 (1847), p. 1—4.

$$\left([z]+\frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} - \log [z]! = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{si}(2\pi n z)}{\pi n},$$

où $[z]$ désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à z. En posant $x = p + \frac{1}{2}$, p étant un entier non négatif on trouve

$$p \log z + \frac{\log 2 - z}{2} - \log 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{si}(\pi n z)}{\pi n}$$

et cette équation est vraie dans l'intervalle $2p - 1 \leq z \leq 2p + 1$. En particulier la série converge dans l'intervalle $-1 \leq z \leq 1$, et sa somme est égale à

$$\frac{\log 2 - z}{2}.$$

En posant $x = p + 1$ dans l'équation (3) on trouve de même

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{p} - C - \log z = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ci}(2\pi n z), \qquad p < z < p + 1.$$

Mais si z est égal à l'entier positif p, on trouve

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2p} - C - \log p = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ci}(2\pi n p),$$

et en particulier

$$C = \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ci}(2\pi n).$$

En posant $x = p + \frac{1}{2}$, on trouvera

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{2p-1} - \frac{C}{2} - \log 2 - \frac{1}{2} \log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{ci}(2\pi n z),$$

pourvu que z soit situé dans l'intervalle $0 < p - \frac{1}{2} < z < p + \frac{1}{2}$. De l'équation (6) on déduit de même les valeurs des séries suivantes:

$$\log 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdots + \frac{(-1)^p}{p} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{ci}(2n+1)\pi z, \qquad p < z < p+1,$$

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdots + \frac{(-1)^p}{2p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{si}(2n+1)\pi z, \qquad p - \frac{1}{2} < z < p + \frac{1}{2},$$

et en particulier

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{si}(2n+1)\pi z, \qquad 0 < z < \frac{1}{2}.$$

23. Il ne sera pas inutile de vérifier les équations (9) et (10) en les appliquant aux polynomes de Bernoulli et d'Euler. Nous avons démontré qu'on a

$$\mathop{\mathbf{S}}_0^x x^\nu \triangle x = \frac{B_{\nu+1}(x)}{\nu+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}\, x^\nu \bigtriangledown x = E_\nu(x).$$

En prenant $x_0 = 0$ et $m = \nu + 1$ tous les termes dans les seconds membres des équations (9) et (10) s'annulent sauf un seul au plus. On trouvera ainsi les séries bien connues:

$$B_{2\nu}(x) = (-1)^{\nu+1} \frac{2(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^{2\nu}}, \tag{17}$$

$$B_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1} \frac{2(2\nu+1)!}{(2\pi)^{2\nu+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n^{2\nu+1}}, \tag{17'}$$

$$E_{2\nu}(x) = (-1)^{\nu} \frac{4(2\nu)!}{\pi^{2\nu+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu+1}}, \tag{18}$$

$$(E_{2\nu-1}x) = (-1)^{\nu} \frac{4(2\nu-1)!}{\pi^{2\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu}}. \tag{18'}$$

Si $\nu > 0$, ces séries convergent absolument et uniformément, et elles représentent, dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, la fonction au premier membre. Les séries représentent donc, pour toutes les valeurs réelles de x, les fonctions que nous avons désignées plus haut par $\dot{B}(x)$ et $\dot{E}(x)$. Si $\nu = 0$, la deuxième et la troisième équation sont encore vraies, pourvu que $0 < x < 1$, mais la convergence des séries est non uniforme au voisinage des points $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que les dernières séries se déduisent presque sans aucun calcul des formules sommatoires d'Euler et de Boole. En effet, reprenons la série (6) du paragraphe 6 avec son terme complémentaire:

$$\frac{\omega}{2}\cot\frac{\omega}{2}=\sum_{s=0}^{\nu}(-1)^s\frac{\omega^{2s}}{(2s)!}B_{2s}+R_\nu.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $\sin\frac{\omega}{2}$ et en posant ensuite $\omega=2\pi n$, on trouve

$$\int_0^1 B_{2\nu}(z)\cos 2\pi nz\,dz=(-1)^{\nu+1}\frac{(2\nu)!}{(2\pi n)^{2\nu}},\qquad \nu>0,$$

$$\int_0^1 B_{2\nu+1}(z)\sin 2\pi nz\,dz=(-1)^{\nu+1}\frac{(2\nu+1)!}{(2\pi n)^{2\nu+1}}.$$

Mais puisque $B_\nu(1-x)=(-1)^\nu B_\nu(x)$, on aura les développements (17). De la même manière on déduira les développements (18) de la série (7) paragraphe 3. Voici encore deux autres séries remarquables les valeurs desquelles on peut aisément tirer des équations (17):

$$\int_0^1(B_{2\nu}(z)-B_{2\nu}(x))\cot\pi(z-x)\,dz=(-1)^\nu\frac{2(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n^{2\nu}},\tag{19}$$

$$\int_0^1(B_{2\nu+1}(z)-B_{2\nu+1}(x))\cot\pi(z-x)\,dz=(-1)^{\nu+1}\frac{2(2\nu+1)!}{(2\pi)^{2\nu+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^{2\nu+1}}.\tag{19'}$$

En effet, supposons $\nu>0$ et $0\leq x\leq 1$; substituons les séries (17) dans les intégrales au premier membre et intégrons terme par terme ce qui est permis, parce que ces séries convergent uniformément. En remarquant qu'on a, n étant un entier positif

$$\int_0^1(\cos 2\pi nz-\cos 2\pi nx)\cot\pi(z-x)\,dz=-\sin 2\pi nx,$$

$$\int_0^1(\sin 2\pi nz-\sin 2\pi nx)\cot\pi(z-x)\,dz=\cos 2\pi nx,$$

on trouvera les équations (19). Ces deux équations sont donc vraies dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$. Si $\nu = 0$ on voit aisément que la seconde équation est encore vraie à l'intérieur de cet intervalle. Elle peut s'écrire comme il suit

$$-\log(2\sin\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n}, \qquad 0 < x < 1. \tag{20}$$

Remarquons enfin qu'en intégrant par partie au premier membre des équations (19) on trouvera

$$\int_0^1 B_{2\nu-1}(z) \log\sin\pi|z-x|\,dz = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\nu-1)!}{(2\pi)^{2\nu-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n^{2\nu}}, \tag{21}$$

$$\int_0^1 B_{2\nu}(z) \log\sin\pi|z-x|\,dz = (-1)^{\nu} \frac{(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^{2\nu+1}}. \tag{21'}$$

Des relations (18) on déduit de même ces deux autres relations

$$\int_0^1 (E_{2\nu}(z) - E_{2\nu}(x)\cos\pi(z-x)) \frac{dz}{\sin\pi(z-x)} = (-1)^{\nu} \frac{4(2\nu)!}{\pi^{2\nu+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu+1}}, \tag{22}$$

$$\int_0^1 (E_{2\nu-1}(z) - E_{2\nu-1}(x)\cos\pi(z-x)) \frac{dz}{\sin\pi(z-x)}$$
$$= (-1)^{\nu+1} \frac{4(2\nu-1)!}{\pi^{2\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu}}. \tag{22'}$$

Si $\nu > 0$, ces relations sont vraies dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$. En effet, substituons dans les deux intégrales au premier membre les séries (18). Ces séries étant uniformément convergentes on peut intégrer terme par terme et on trouve le résultat indiqué.

Si $\nu = 0$ la série (22) converge encore à l'intérieur de l'intervalle et l'on trouve

$$\frac{1}{2} \log\cot\frac{\pi x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{2n+1} \qquad 0 < x < 1 \tag{23}$$

En intégrant par partie au premier membre des équations (22) on aura, pourvu que $\nu > 0$,

$$\int_0^1 E_{2\nu-1}(z) \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}|z-x|\,dz = (-1)^{\nu-1} \frac{4(2\nu-1)!}{\pi^{2\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu+1}} \tag{24}$$

$$\int_0^1 E_{2\nu-2}(z)\log \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}|z-x|\,dz = (-1)^\nu \frac{4(2\nu-2)!}{\pi^{2\nu-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu}}. \qquad (24')$$

24. On sait exprimer les sommes des puissances négatives de nombres entiers par les nombres et les polynomes de Bernoulli. En effet, en posant $x=0$ dans les équations (17), (19′) et (21′), on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\nu}} = (-1)^{\nu+1}\frac{(2\pi)^{2\nu}}{2(2\nu)!}B_{2\nu}, \qquad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\nu+1}} = (-1)^{\nu+1}\frac{(2\pi)^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)!}\int_0^1 B_{2\nu+1}(z)\cot\pi z\,dz,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\nu+1}} = (-1)^{\nu}\frac{(2\pi)^{2\nu}}{(2\nu)!}\int_0^1 B_{2\nu}(z)\log\sin\pi z\,dz.$$

En posant $x=\frac{1}{2}$ dans les mêmes équations il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2\nu}} = (-1)^{\nu+1}\frac{\pi^{2\nu}}{2(2\nu)!}D_{2\nu}, \qquad (26)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2\nu+1}} = (-1)^{\nu+1}\frac{(2\pi)^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)!}\int_0^1 B_{2\nu+1}(z)\operatorname{tg}\pi z\,dz,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2\nu+1}} = (-1)^{\nu}\frac{(2\pi)^{2\nu}}{(2\nu)!}\int_0^1 B_{2\nu}(z)\log|\cos\pi z|\,dz.$$

En faisant $x=0$ dans les équations (18′), (22) et (24) on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2\nu}} = (-1)^{\nu}\frac{\pi^{2\nu}}{(2\nu-1)!}\frac{C_{2\nu-1}}{2^{2\nu+1}}, \qquad (27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2\nu+1}} = (-1)^{\nu}\frac{\pi^{2\nu+1}}{4(2\nu)!}\int_0^1 E_{2\nu}(z)\frac{dz}{\sin\pi z}$$

$$= (-1)^{\nu-1}\frac{\pi^{2\nu}}{4(2\nu-1)!}\int_0^1 E_{2\nu-1}(z)\log\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}\,dz.$$

Enfin en posant $x = \frac{1}{2}$ dans les équations (18) et (22'), on aura

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2\nu+1}} = (-1)^\nu \frac{\pi^{2\nu+1} E_{2\nu}}{(2\nu)!\, 2^{2\nu+2}}, \tag{28}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2\nu}} = (-1)^\nu \frac{\pi^{2\nu}}{4(2\nu-1)!} \int_0^1 E_{2\nu-1}(z) \frac{dz}{\cos \pi z}.$$

25. De la série de Fourier (1) on peut déduire un autre développement remarquable de la fonction $F(x \mid \omega)$. En substituant dans cette série les expressions (2) et (2') des coefficients on trouve

$$F(x \mid \omega) = \int_a^{x_0} \varphi(z)\, dz - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\eta \to 0} \int_{x_0}^{\infty} \cos\left[\frac{2n\pi}{\omega}(z-x)\right] \varphi(z) e^{-\eta z}\, dz.$$

De même, en substituant les expressions (5) et (5') des α_n et β_n dans l'équation (4) on trouve

$$G(x \mid \omega) = \frac{4}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\eta \to 0} \int_{x_0}^{\infty} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{\omega}(z-x)\right] \varphi(z) e^{-\eta z}\, dz.$$

Dans ces équations on suppose que $x_0 < x < x_0 + \omega$. Posons en particulier $x = x_0 + \frac{\omega}{2}$ et remplaçons ensuite x_0 par x, il vient

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} \,\middle|\, \omega\right) = \int_a^{x} \varphi(z)\, dz - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lim_{\eta \to 0} \int_0^{\infty} \cos \frac{2n\pi z}{\omega} \varphi(x+z) e^{-\eta z}\, dz, \tag{29}$$

$$G\left(x + \frac{\omega}{2} \,\middle|\, \omega\right) = \frac{4}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lim_{\eta \to 0} \int_0^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{\omega} \varphi(x+z) e^{-\eta z}\, dz. \tag{30}$$

Mais en posant $x = x_0$ on trouve

$$F(x \mid \omega) = \int_a^{x} \varphi(z)\, dz - \frac{\omega}{2} \varphi(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\eta \to 0} \int_0^{\infty} \cos \frac{2n\pi z}{\omega} \varphi(x+z) e^{-\eta z}\, dz, \tag{31}$$

$$G(x \mid \omega) = \varphi(x) + \frac{4}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\eta \to 0} \int_0^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{\omega} \varphi(x+z) e^{-\eta z}\, dz. \tag{32}$$

Ces quatre équations sont donc vraies pour toute valeur de x qui est plus grande que b. Si l'on pose en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ ces relations se réduisent aux suivantes

$$\Psi\left(x+\frac{1}{2}\right) = \log x - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\infty} \cos 2\pi nz \frac{dz}{x+z},$$

$$g\left(x+\frac{1}{2}\right) = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\infty} \sin\left[(2n+1)\pi z\right] \frac{dz}{x+z},$$

$$\Psi(x) = \log x - \frac{1}{2x} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos 2n\pi z \frac{dz}{x+z},$$

$$g(x) = \frac{1}{x} + 4\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos\left[(2n+1)\pi z\right] \frac{dz}{x+z}.$$

En introduisant le cosinus-intégral et le sinus-intégral on peut encore écrire, par exemple les deux dernières équations, comme il suit

$$\Psi(x) = \log x - \frac{1}{2x} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{ci}(2n\pi x)\cos(2n\pi x) + \operatorname{si}(2n\pi x)\sin(2n\pi x)\right], \tag{33}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 4\sum_{n=0}^{\infty}\left[\operatorname{ci}(2n+1)\pi x \cos(2n+1)\pi x + \operatorname{si}(2n+1)\pi x \sin(2n+1)\pi x\right]. \tag{34}$$

On déduit de même de l'équation (12), ou bien des équations (29) et (31) en posant $\varphi(x) = \log x$:

$$\log\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \log\sqrt{2\pi} + x\log x - x$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\operatorname{ci}(2\pi nx)\sin(2\pi nx) - \operatorname{si}(2\pi nx)\cos(2\pi nx)}{\pi n}, \tag{35}$$

$$\log\Gamma(x) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ci}(2\pi nx)\sin(2\pi nx) - \operatorname{si}(2\pi nx)\cos(2\pi nx)}{\pi n}. \tag{36}$$

On a ici $b = 0$. Ces huit équations sont donc établies pour toute valeur positive de x. Nous démontrerons plus loin qu'elles subsistent encore pour les valeurs complexes de x dont la partie réelle est positive.

Variables Complexes.

Application de l'intégrale de Cauchy.

26. Jusqu'ici x et ω ont été des nombres réels. Nous voulons maintenant donner à ces variables des valeurs complexes et nous étudierons les prolongements analytiques des fonctions que nous venons de considérer. Soit ϑ un angle entourant l'axe des nombres positifs et limité par deux rayons vecteurs formant avec l'axe positif des angles plus petits que $\frac{\pi}{2}$; l'ouverture de cet angle peut d'ailleurs être aussi petit que l'on veut. Soit $\varphi(x)$ une fonction analytique, holomorphe dans l'angle ϑ et admettons qu'on ait uniformément dans cet angle

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \varphi^{(m)}(x) = 0,$$

si m est suffisamment grand. Dans ces conditions il résulte de l'analyse des paragraphes 5 et 9 que les limites

$$G(x \mid \omega) = \mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega} x, \tag{1}$$

$$F(x \mid \omega) = \mathop{\mathsf{S}}_{a}^{x} \varphi(x) \mathop{\triangle}_{\omega} x \tag{2}$$

existent pour toute valeur de x et de ω à l'intérieur de l'angle ϑ et qu'elles représentent deux fonctions analytiques, holomorphes dans cet angle. Les expressions analytiques que nous avons déduites des formules sommatoires d'Euler et de Boole restent donc valables pour ces valeurs des variables. Mais il y en a d'autres qui s'appliquent dans des cas plus généraux et que nous allons mettre en évidence.

Supposons d'abord que la fonction analytique $\varphi(x)$ soit holomorphe dans l'angle ϑ et que l'égalité

$$\lim_{|x| \to \infty} \varphi(x) e^{-\varepsilon |x|} = 0 \tag{3}$$

ait lieu uniformément dans cet angle, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. En ce cas les séries

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x+s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)}, \tag{4}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x+s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)} \tag{5}$$

convergeront pour toute valeur positive de η, pourvu que x et ω restent dans l'angle ϑ. A l'aide du calcul des résidus[1] nous allons étudier comment se comportent ces deux séries quand η tend vers zéro. En observant que la fonction $\pi \cot \pi z$ admet tout nombre entier ν comme pôle simple de résidu *un*, et que le résidu de la fonction $\frac{\pi}{\sin \pi z}$, relatif au pôle $z=\nu$, est égal à $(-1)^\nu$, on trouve les deux équations suivantes

$$\sum_{s=0}^{s=p} \varphi(x+s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(x+\omega z)\, e^{-\eta(x+\omega z)}\, \pi \cot \pi z\, dz;$$

$$\sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \varphi(x+s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)} = \frac{1}{2i}\int_C \varphi(x+\omega z)\, e^{-\eta(x+\omega z)} \frac{dz}{\sin \pi z},$$

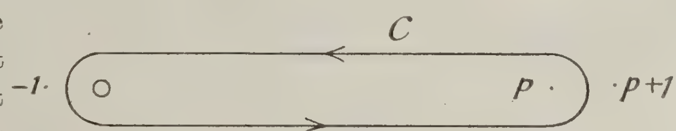


Fig. 1.

C étant un contour formé de deux demi-cercles entourant respectivement les points o et p, réunis par deux droites parallèles à l'axe des nombres positifs. Nous supposerons que les points x et ω sont à l'intérieur de l'angle ϑ et qu'on a choisi les rayons des deux cercles assez petits pour que le point $x+\omega z$ reste à l'intérieur de ϑ quand z parcourt le contour C. Faisons tendre p vers l'infini, le nombre positif η restant fixe. On trouvera

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x+s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \varphi(x+\omega z)\, e^{-\eta(x+\omega z)}\, \pi \cot \pi z\, dz, \tag{6}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x+s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)} = \frac{1}{2i}\int_{C_1} \varphi(x+\omega z)\, e^{-\eta(x+\omega z)} \frac{dz}{\sin \pi z}, \tag{7}$$

[1] Voir sur ce sujet un excellent petit livre de M. E. Lindelöf: Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Paris 1905. L'analyse de ce paragraphe est voisin de celui de M. Lindelöf mais le problème que nous nous sommes posé est bien différent de celui que M. Lindelöf a traité (l. c. p. 52—86).

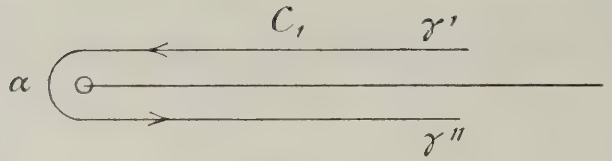


Fig. 2.

C_1 étant un lacet formé d'un petit demi-cercle entourant le point $z = 0$ et de deux droites parallèles à l'axe des nombres positifs. Considérons d'abord l'intégrale (7). La ligne d'intégration coupe l'axe réel dans un point α situé entre 0 et -1. Déformons le contour C_1 en un autre contour C_2 qui sera formé de deux droites issues du point α et situées l'une au-dessus l'autre au-dessous de l'axe réel. Nous choisissons les angles que ces deux droites forment avec l'axe des nombres positifs assez petits pour que le point $x + \omega z$ reste à l'intérieur de ϑ quand z parcourt le contour C_2. Faisons ensuite tendre η vers zéro. L'intégrale au second membre tendra uniformément vers une limite parce qu'on sait trouver un constante K telle que

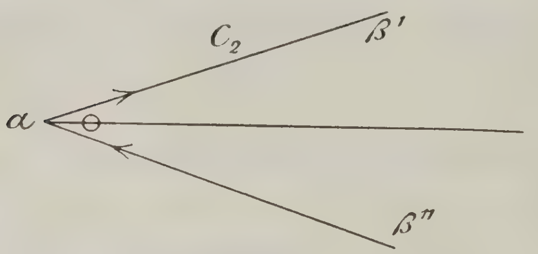


Fig. 3.

$$\left| \frac{\varphi(x+\omega z)}{\sin \pi z} \right| < \frac{K}{|z|^2}$$

sur le contour C_2. On arrive ainsi à l'équation suivante

$$\mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega} x = i \int_{C_2} \varphi(x + \omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}. \tag{8}$$

Considérons maintenant l'intégrale (6) et remarquons qu'on a

$$\frac{1}{2i} \cot \pi z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-2\pi i z} - 1},$$

$$\frac{1}{2i} \cot \pi z = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1}.$$

Je remplace $\cot \pi z$ par la première de ces expressions sur la partie supérieure du contour C_1, formé de l'arc $\alpha \gamma' \infty$. Je remplace $\cot \pi z$ par la seconde expression sur l'arc $\alpha \gamma'' \infty$. On aura donc

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} = \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz$$
$$+ \int_{\alpha\gamma'\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) e^{-\eta(x+\omega z)}}{e^{-2\pi i z} - 1} dz + \int_{\alpha\gamma''\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) e^{-\eta(x+\omega z)}}{e^{2\pi i z} - 1} dz.$$

La première intégrale est étendue le long de l'axe réel. Dans les deux autres intégrales je déforme comme plus haut la ligne d'intégration en remplaçant l'arc $\alpha\gamma'\infty$ par la droite $\alpha\beta'\infty$ et l'arc $\alpha\gamma''\infty$ par la droite $\alpha\beta''\infty$. Je fais ensuite tendre η vers zéro. On a évidemment

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\alpha\beta'\infty}\frac{\varphi(x+\omega z)\,e^{-\eta(x+\omega z)}}{e^{-2\pi i z}-1}\,dz=\int_{\alpha\beta'\infty}\frac{\varphi(x+\omega z)\,dz}{e^{-2\pi i z}-1}$$

parce que l'intégrale au second membre converge. En remarquant que

$$\int_a^\infty \varphi(x+\omega z)\,e^{-\eta(x+\omega z)}\,dz=\frac{1}{\omega}\int_{x+a\omega}^\infty \varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz$$

on arrive à l'équation suivante

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z)\mathop{\triangle}_\omega z=\int_a^{x+a\omega}\varphi(z)\,dz+\omega\int_{\alpha\beta'\infty}\frac{\varphi(x+\omega z)\,dz}{1-e^{-2\pi i z}}+\omega\int_{\alpha\beta''\infty}\frac{\varphi(x+\omega z)\,dz}{1-e^{2\pi i z}}. \tag{9}$$

Cette relation peut s'écrire sous une forme plus simple. Posons

$$f(x)=\int_a^x \varphi(z)\,dz,$$

et intégrons par partie dans les deux derniers termes au second membre. On trouve

$$\omega\int_{\alpha\beta'\infty}\frac{\varphi(x+\omega z)\,dz}{1-e^{-2\pi i z}}=-\frac{f(x+a\omega)}{1-e^{-2\pi i a}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha\beta'\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz,$$

$$\omega\int_{\alpha\beta''\infty}\frac{\varphi(x+\omega z)\,dz}{1-e^{2\pi i z}}=-\frac{f(x+a\omega)}{1-e^{2\pi i a}}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha\beta''\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz.$$

En substituant ces expressions dans l'équation (9) on trouvera

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z)\mathop{\triangle}_\omega z=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz. \tag{10}$$

On voit ainsi que les seconds membres des équations (1) et (2) tendent uniformément vers des limites pour toutes les valeurs de x et de ω qui sont à l'intérieur de l'angle ϑ et qu'elles représentent deux fonctions analytiques de x et de ω,

holomorphes dans l'angle ϑ. On peut dire un peu de plus sur ces fonctions si l'on suppose que $\varphi(x)$ soit holomorphe à l'intérieur d'un angle Θ comprenant l'angle ϑ et qu'il existe une constante positive k telle qu'on a uniformément

$$\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x)\, e^{-k|x|} = 0$$

dans l'angle Θ. Les équations (8) et (10) subsistent pour toute valeur de x à l'intérieur de Θ. Faisons varier ω. Quand ω sort de l'angle ϑ on voit que les intégrales (8) et (10) restent convergentes tant que ω reste à l'intérieur de l'angle Θ pourvu que le module de ω soit suffisamment petit. Les fonctions $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ admettent en général des points singuliers pour des valeurs de ω situées à l'intérieur de Θ. Mais quand x reste dans Θ elles sont holomorphes dans un certain voisinage de $\omega = 0$, situé tout entier à l'intérieur de Θ.

27. Étudions un autre cas. Admettons que:

1° la fonction $\varphi(x)$ soit holomorphe dans le demi-plan $\Re(x) \geq b$ et qu'on sache trouver deux nombres positifs C et k tels que, pour toute valeur de x dans le demi-plan, on ait

$$|\varphi(x)| < C\, e^{(k+\varepsilon)|x|}, \tag{11}$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε;

2° dans une bande quelconque, située dans le demi-plan et limitée par deux droites parallèles à l'axe des nombres positifs on ait

$$|\varphi(x)| < C\, e^{\varepsilon|x|}.$$

Soit ω un nombre positif et x un point à l'intérieur du demi-plan. Les séries (4) et (5) convergent et les équations (6) et (7) sont encore vraies. Posons $z = re^{i\nu}$. On sait trouver une constante M telle que

$$\left|\frac{\varphi(x+\omega z)}{\sin \pi z}\right| < M\, e^{(\varepsilon + (k\omega - \pi)\sin|\nu|)r},$$

si $\frac{\pi}{2} > \nu > -\frac{\pi}{2}$. Considérons d'abord l'intégrale (7). Si $\omega < \frac{\pi}{k}$ on peut raisonner comme plus haut, déformer le chemin d'intégration et remplacer la ligne C_1 par une droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels et coupant celui-ci dans le point α. On trouve ainsi

$$\mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega} x = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}. \tag{12}$$

De l'équation (6) on déduit[1] de même, si $\omega < \frac{2\pi}{k}$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\triangle}_{\omega} z = \int_{a}^{x+a\omega} \varphi(z)\, dz + \omega \int_{a}^{a+i\infty} \frac{\varphi(x+\omega z)\, dz}{1 - e^{-2\pi i z}} + \omega \int_{a}^{a-i\infty} \frac{\varphi(x+\omega z)\, dz}{1 - e^{2\pi i z}}, \tag{13}$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\triangle}_{\omega} z = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz. \tag{14}$$

Dans ces trois équations α est un nombre quelconque entre 0 et -1 et l'on suppose que la partie réelle de x est plus grande que $b - \alpha\omega$. Posons en particulier $\alpha = -\frac{1}{2}$ et remplaçons en même temps x par $x + \frac{\omega}{2}$. On trouve

$$G\left(x + \frac{\omega}{2} \middle| \omega\right) = -i \int_{-i\infty}^{+i\infty} \varphi(x+\omega z) \frac{dz}{\cos \pi z} = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x+i\omega t) + \varphi(x-i\omega t)}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}\, dt, \tag{12'}$$

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} \middle| \omega\right) = \int_{a}^{x} \varphi(z)\, dz + i\omega \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x+i\omega t) - \varphi(x-i\omega t)}{1 + e^{2\pi t}}\, dt, \tag{13'}$$

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} \middle| \omega\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\cos \pi z}\right)^2 dz = 2\pi \int_{0}^{\infty} \frac{f(x+i\omega t) + f(x-i\omega t)}{(e^{\pi t} + e^{-\pi t})^2}\, dt. \tag{14'}$$

D'autre part en faisant tendre α vers zéro et en ayant soin d'éviter le point $z = 0$ en déformant la ligne d'intégration, au voisinage de ce point, en un petit demicercle, dont on fait ensuite tendre le rayon vers zéro, on trouvera

$$G(x|\omega) = \varphi(x) + 2i \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x+i\omega t) - \varphi(x-\omega i t)}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\, dt, \tag{12''}$$

$$F(x|\omega) = \int_{a}^{x} \varphi(z)\, dz - \frac{\omega}{2} \varphi(x) + i\omega \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x+i\omega t) - \varphi(x-i\omega t)}{1 - e^{2\pi t}}\, dt, \tag{13''}$$

$$F(x|\omega) = f(x) - \frac{\omega}{2} f'(x) - 2\pi \int_{0}^{x} \frac{f(x+i\omega t) + f(x-i\omega t) - 2f(x)}{(e^{\pi t} - e^{-\pi t})^2}\, dt. \tag{14''}$$

[1] Je suppose, pour fixer les idées, que $a > b$.

Les six dernières équations sont valables si la partie réelle de x est plus grande que b, et elles mettent en évidence que $G(x\,|\,\omega)$, respectivement $F(x\,|\,\omega)$, sont des fonctions analytiques de x, holomorphes pour toutes les valeurs de x dans le demi-plan $\Re(x) > b$, tant que ω reste à l'intérieur de l'intervalle $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$, respectivement à l'intérieur de l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Mais il n'en est plus ainsi quand ω sort de ces intervalles. En effet, soit par exemple

$$\varphi(x) = e^{ix}.$$

On a ici $k = 1$, et l'on trouve immédiatement pour toute valeur positive de η

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s e^{(i-\eta)(x+s\omega)} = \frac{e^{(i-\eta)x}}{1 + e^{(i-\eta)\omega}},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} e^{(i-\eta)(x+s\omega)} = \frac{e^{(i-\eta)x}}{1 - e^{(i-\eta)\omega}}.$$

En faisant tendre η vers zéro on aura donc

$$\mathop{\mathrm{S}} e^{ix} \mathop{\nabla}_{\omega} x = \frac{2\,e^{ix}}{1 + e^{i\omega}},$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{x} e^{ix} \mathop{\Delta}_{\omega} x = i - \frac{\omega\, e^{ix}}{1 - e^{i\omega}},$$

pourvu que les expressions aux seconds membres aient un sens. En séparant le réel de l'imaginaire on trouve

$$\mathop{\mathrm{S}} \cos x \mathop{\nabla}_{\omega} x = \frac{\cos\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\frac{\omega}{2}},$$

$$\mathop{\mathrm{S}} \sin x \mathop{\nabla}_{\omega} x = \frac{\sin\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\frac{\omega}{2}},$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{x} \cos x \mathop{\Delta}_{\omega} x = \frac{\omega}{2}\,\frac{\sin\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{x} \sin x \underset{\omega}{\triangle} x = 1 - \frac{\omega}{2} \frac{\cos\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}.$$

On voit ainsi que $G(x\,|\,\omega)$, respectivement $F(x\,|\,\omega)$, dans les deux cas sont des fonctions méromorphes de ω admettant pour pôles simples les points $\omega = \pm(2s - 1)\pi$, respectivement les points $\omega = \pm 2s\pi$, s étant un entier positif.

28. Considérons quelques autres cas particuliers. Supposons que $\varphi(x)$ soit une puissance entière et positive de x. Nous avons vu qu'on a

$$\mathop{\mathrm{S}} x^{\nu} \triangle x = E_{\nu}(x),$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{x} \nu x^{\nu-1} \triangle x = B_{\nu}(x).$$

Remplaçons dans les équations (12) et (13) $\varphi(x)$, respectivement $f(x)$, par x^{ν} et posons $\omega = 1$. On trouvera

$$E_{\nu}(x) = i \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} (x + z)^{\nu} \frac{dz}{\sin \pi z}, \tag{15}$$

$$B_{\nu}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} (x + z)^{\nu} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^{2} dz. \tag{16}$$

α est un nombre quelconque entre 0 et -1 et les équations sont valables pour toutes les valeurs de x. En posant $x = 0$ on trouve

$$2^{-\nu} C_{\nu} = i \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i} \frac{z^{\nu}\, dz}{\sin \pi z}, \qquad -1 < \alpha < 0, \tag{17}$$

$$B_{\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} z^{\nu} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^{2} dz, \qquad -1 < \alpha < 0. \tag{18}$$

En posant $x = \frac{1}{2}$ on aura

$$E_{\nu} = \frac{1}{2i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{z^{\nu}\, dz}{\cos \frac{\pi}{2} z}, \qquad -1 < \alpha < 1, \tag{19}$$

$$D_\nu = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} z^\nu \left(\frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}z}\right)^2 dz, \qquad -1<\alpha<1. \tag{20}$$

En faisant tendre α vers zéro dans ces équations, ou bien en se reportant aux relations (12''), (14''), (12') et (14'), on trouve

$$C_{2\nu+1} = (-1)^{\nu+1}\int\limits_0^\infty \frac{x^{2\nu+1}\,dx}{sh\frac{\pi}{2}x},$$

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu+1}\pi\int\limits_0^\infty \frac{x^{2\nu}\,dx}{(sh\,\pi\,x)^2},$$

$$E_{2\nu} = (-1)^{\nu}\int\limits_0^\infty \frac{x^{2\nu}\,dx}{ch\frac{\pi}{2}x},$$

$$D_{2\nu} = (-1)^{\nu}\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\infty \frac{x^{2\nu}\,dx}{\left(ch\frac{\pi}{2}x\right)^2},$$

shx étant le sinus hyperbolique et chx étant le cosinus hyperbolique de x.

Soit en second lieu $\varphi(x)=\frac{1}{x}$. Les équations (12'') et (12') se réduisent aux suivantes

$$g(x) = \frac{1}{x} + \int\limits_0^\infty \frac{2}{sh\,\pi t}\,\frac{t\,dt}{x^2+t^2},$$

$$g\left(x+\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{2}{ch\,\pi t}\,\frac{x\,dt}{x^2+t^2}.$$

La dernière de ces formules a été démontrée par LEGENDRE. Des trois équations (14) on déduit de même

$$\Psi'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log(x+z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz,$$

$$\Psi'\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\log(x^2+t^2)}{(ch\,\pi t)^2}\,dt,$$

$$\Psi(x) = \log x - \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\infty \log\left(1+\frac{t^2}{x^2}\right)\frac{dt}{(sh\,\pi t)^2}.$$

En posant $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ dans l'équation ($13''$) on trouve la relation suivante qui a été établie par Poisson

$$\Psi(x) = \log x - \frac{1}{2x} + 2\int_0^\infty \frac{t}{x^2+t^2}\,\frac{dt}{1-e^{2\pi t}}.$$

Dans toutes ces relations on suppose que la partie réelle de x soit positive.

Supposons en dernier lieu que $\varphi(x)$ soit une fonction entière telle que

$$|\varphi(x)| < C\, e^{\varepsilon |x|} \tag{21}$$

pour toute valeur de x, C étant une constante, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. En démontrant les équations

$$G(x\,|\,\omega) = i\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z)\,\frac{dz}{\sin \pi z}, \qquad -1 < a < 0, \tag{22}$$

$$F(x\,|\,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz, \qquad -1 < a < 0 \tag{23}$$

nous avons supposé ω positif, pendant que x est un nombre quelconque. Mais les intégrales au second membre conservent un sens pour toutes les valeurs réelles ou complexes de x et de ω. Les deux solutions principales $F(x\,|\,\omega)$ et $G(x\,|\,\omega)$ admettent donc un prolongement analytique dans tout le plan des ω et l'on voit à ces intégrales qu'elles sont des fonctions entières des deux variables x et ω. Remplaçons ω par $-\omega$ et en même temps z par $-1-z$; on aura

$$G(x\,|-\omega) = i\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega+\omega z)\,\frac{dz}{\sin \pi z}, \qquad -1 < a < 0,$$

$$F(x\,|-\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz, \qquad -1 < a < 0.$$

En comparant ces deux intégrales aux intégrales (22) et (23) *on voit que les fonctions G et F satisfont aux équations suivantes*

$$G(x-\omega\,|-\omega) = G(x\,|\,\omega), \tag{24}$$

$$F(x-\omega\,|-\omega) = F(x\,|\,\omega). \tag{25}$$

$G(x+\frac{\omega}{2}|\omega)$ et $F(x+\frac{\omega}{2}|\omega)$ sont par conséquent des fonctions paires de ω. Dans le cas des polynomes d'Euler et de Bernoulli ces deux équations prennent la forme suivante

$$E_\nu(1-x) = (-1)^\nu E_\nu(x),$$
$$B_\nu(1-x) = (-1)^\nu B_\nu(x).$$

Nous allons vérifier ces résultats en considérant les séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de ω. Dans le cas actuel on peut déduire ces séries de la manière suivante. Développons la fonction f par la formule de Taylor

$$f(x+\omega z) = \int_a^x \varphi(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^\nu z^\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x).$$

Substituons ce développement dans l'équation (23) et intégrons terme par terme. On trouve en tenant compte de l'équation (18)

$$F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(x)dx - \frac{\omega}{2}\varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!}\varphi^{(2\nu-1)}(x). \tag{26}$$

En remplaçant x par $x+\frac{\omega}{2}$ dans l'équation (23) et en tenant compte de l'équation (20) on obtiendra

$$F\left(x+\frac{\omega}{2}\Big|\omega\right) = \int_a^x \varphi(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu} D_{2\nu}}{2^{2\nu}(2\nu)!}\varphi^{(2\nu-1)}(x). \tag{26'}$$

De l'équation (22) on déduit de même, en tenant compte des formules (17) et (19),

$$G(x|\omega) = \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu-1} C_{2\nu-1}}{2^{2\nu-1}(2\nu-1)!}\varphi^{(2\nu-1)}(x), \tag{26''}$$

$$G\left(x+\frac{\omega}{2}\Big|\omega\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu} E_{2\nu}}{2^{2\nu}(2\nu)!}\varphi^{(2\nu)}(x). \tag{26'''}$$

Est-ce que ces quatre séries convergent? Pour en décider il faut d'abord savoir comment les nombres $B_\nu, \ldots E_\nu$ se comportent pour les valeurs très grandes de ν. Mais des séries (25), (26), (27) et (28) paragraphe 24 il résulte que ces nombres sont de la forme

$$\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} = (-1)^{\nu+1}\frac{2}{(2\pi)^{2\nu}}(1+\varepsilon_\nu), \tag{27}$$

$$\frac{D_{2\nu}}{(2\nu)!} = (-1)^{\nu}\frac{2}{\pi^{2\nu}}(1+\varepsilon_\nu), \tag{27'}$$

$$\frac{C_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} = (-1)^{\nu}2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\nu}(1+\varepsilon_\nu), \tag{27''}$$

$$\frac{E_{2\nu}}{(2\nu)!} = (-1)^{\nu}2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\nu+1}(1+\varepsilon_\nu), \tag{27'''}$$

ε_ν étant dans les quatre cas une quantité qui tend vers zéro quand ν augmente indéfiniment. D'autre part de l'inégalité (21) il résulte qu'on a

$$\lim_{\nu\to\infty} |\varphi^{(\nu)}(x)|^{\frac{1}{\nu}} = 0.$$

Les quatre séries (26) convergent donc pour toute valeur finie de ω, quel que soit x, et la convergence est uniforme dans tout domaine fini. Elles représentent par conséquent des fonctions entières et l'on vérifie immédiatement à l'aide de ces séries que les équations (24) et (25) sont satisfaites.

Prolongement analytique des solutions.

29. Les résultats précédents restent vrais pour certaines fonctions qui ne rentrent pas dans les conditions que nous avons imposées à la fonction $\varphi(x)$. Remarquons d'abord qu'on peut, sans inconvénient, remplacer les deux expressions qui déterminent les solutions principales par les expressions suivantes

$$\mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega} x = 2\lim_{\eta\to 0}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}, \tag{27}$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\triangle}_{\omega} z = \lim_{\eta\to 0}\left[\int_a^{\infty}\varphi(z)\,e^{-\eta\lambda(z)}\,dz - \omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}\right], \tag{28}$$

$\lambda(x)$ étant une fonction de la forme

$$\lambda(x) = x^p(\log x)^q, \qquad p\geq 1,\ q\geq 0.$$

En prenant ces limites pour point de départ il n'y a presque rien à changer dans ce qui précède. Dans les cas que nous venons d'étudier on arrive parfaite-

ment aux mêmes solutions que nous avons trouvées à l'aide de la définition un peu plus simple dont nous avons fait usage jusqu'ici. Mais avec cette définition plus large on peut faire un petit pas en avant.

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ satisfasse à la condition 1° du paragraphe 27 mais supprimons la condition 2°. Il arrive que les séries (4) et (5) n'ont pas de sens pour aucune valeur de ω, mais les séries et l'intégrale qui entrent dans les expressions (27) et (28) convergeront pour toute valeur positive de η, si $p > 1$, ou si $p = 1$ et $q > 0$. Posons $\omega = \varrho e^{i\psi}$ et supposons que $\frac{\pi}{2p} > \psi > -\frac{\pi}{2p}$. Considérons l'équation (28). Supposons que la partie réelle de x soit plus grande que b et reprenons le raisonnement du paragraphe 26. On trouve d'abord

$$\int_a^\infty \varphi(z)\, e^{-\eta\lambda(z)}\, dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x+s\omega)\, e^{-\eta\lambda(x+s\omega)} = \int_a^{x+a\omega} \varphi(z)\, e^{-\eta\lambda(z)}\, dz$$
$$+ \omega \int_{a\gamma'\infty} \frac{\varphi(x+\omega z)\, e^{-\eta\lambda(x+\omega z)}}{1-e^{-2\pi i z}}\, dz + \omega \int_{a\gamma''\infty} \frac{\varphi(x+\omega z)\, e^{-\eta\lambda(x+\omega z)}}{1-e^{2\pi i z}}\, dz. \qquad (29)$$

Déformons comme plus haut le chemin d'intégration et remplaçons les arcs $\alpha\gamma'\infty$ et $\alpha\gamma''\infty$ par deux droites $\alpha\beta'\infty$ et $\alpha\beta''\infty$ (fig. 3, pag. 160). Supposons que les angles que ces deux droites forment avec l'axe des nombres positifs soient, en valeur absolue, plus petits que $\frac{\pi}{2p} - |\psi|$. Faisons ensuite tendre η vers zéro. Le second membre tendra uniformément vers une limite pourvu que ϱ est suffisamment petit. Cette limite ne dépend pas de λ. On retrouve ainsi l'équation (10). On peut enfin de nouveau déformer le chemin d'intégration en faisant tourner les deux droites $\alpha\beta'\infty$ et $\alpha\beta''\infty$ jusqu'à ce qu'elles forment avec l'axe positif les angles $\pm\left(\frac{\pi}{2} - |\psi|\right)$. Notre intégrale restera convergente pourvu que ω satisfasse à la condition

$$\varrho < \frac{2\pi}{k} \cos\psi. \qquad (30)$$

En appliquant le même raisonnement à l'expression (27) on retrouve l'équation (8) pourvu que ω satisfasse à la condition $\varrho < \frac{\pi}{k} \cos\psi$. *On peut donc affirmer que les limites* (27) *et* (28) *ne dépendent pas de la fonction* $\lambda(x)$; seulement il faut avoir soin de choisir p et q suffisamment grands pour assurer l'existence des limites. Si l'on fait $q = 0$, il faut dans le cas actuel prendre $p > 1$. Si l'on fait $p = 1$ il

faut prendre $q > 0$. Il résulte de notre analyse que, dans le dernier cas, la limite (28) existe pour toutes les valeurs de ω qui satisfont à la condition (30). On voit donc que les deux solutions principales $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ sont des fonctions analytiques de x et de ω, holomorphes tant que x reste à l'intérieur du demi-plan $\Re(x) > b$ et tant que ω satisfasse à l'une ou l'autre des deux conditions que nous venons d'indiquer. Par exemple dans le cas de la fonction $F(x|\omega)$ il faut que ω reste à l'intérieur du cercle ayant le point $\frac{\pi}{k}$ pour centre et avec le rayon $\frac{\pi}{k}$, c'est à dire le cercle que je couvre de hachures sur la figure 4. Quand ω sort de ce cercle il arrive que la fonction $F(x|\omega)$ cesse d'exister et il en est de même pour la fonction $G(x|\omega)$.

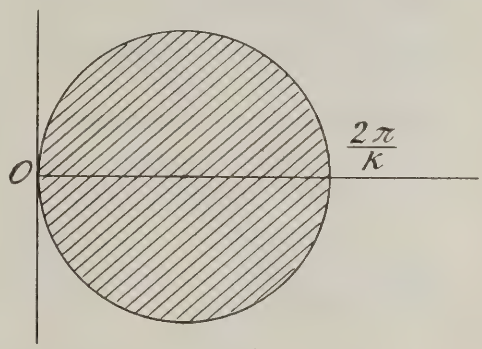


Fig. 4.

En particulier, si ω est positif, on retrouve les équations

$$G(x|\omega) = i\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z)\frac{dz}{\sin \pi z}, \tag{31}$$

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz, \tag{32}$$

pourvu que dans le premier cas $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$ et dans le second cas $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$.

De l'équation (31) on peut tirer une inégalité importante. En effet on a par hypothèse

$$|\varphi(x)| < C\, e^{(k+\varepsilon)|x|}, \qquad \text{si } \Re(x) > b.$$

Par conséquent

$$|G(x|\omega)| < C\, e^{(k+\varepsilon)|x|}\int e^{(k+\varepsilon)\,\omega\,|z|}\frac{dz}{|\sin \pi z|}.$$

Puisque ω est positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$, l'intégrale au second membre converge; on peut donc trouver une constante C_1 telle que

$$|G(x|\omega)| < C_1\, e^{(k+\varepsilon)|x|} \tag{33}$$

pour toute valeur de x dans le demi-plan $\Re(x) > b$. De même on conclut de l'équation (32) qu'on sait trouver une constante C_2 telle que

$$|F(x\,|\,\omega)| < C_2\, e^{(k+\varepsilon)\,|x|} \tag{34}$$

pour toute valeur de x dans le demi-plan $\Re(x) > b$ et pour toute valeur fixe de ω dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Les fonctions F et G satisfont donc aux mêmes conditions que nous avons imposées à la fonction $\varphi(x)$ pour démontrer l'existence des limites (27) et (28). Par conséquent, en appliquant à la fonction $\varphi(x)$ nos deux opérations de sommation un nombre quelconque de fois on arrive toujours à des expressions convergentes et à des fonctions qui satisfont à l'inégalité susdite et qui sont holomorphes dans le demi-plan $\Re(x) > b$.

Les inégalités (33) *et* (34) *caractérisent les solutions principales.* En effet, une fonction périodique $\pi(x)$ avec la période ω qui est holomorphe dans le demi-plan et par conséquent pour toute valeur de x ne peut pas satisfaire à l'inégalité

$$|\pi(x)| < C_2\, e^{(k+\varepsilon)\,|x|}, \qquad 0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$$

sans se reduire à une constante. De même une fonction périodique $p(x)$ telle que

$$p(x+\omega) = -\,p(x), \qquad 0 < \omega < \frac{\pi}{k},$$

qui est holomorphe pour toute valeur finie de x, et qui satisfait à l'inégalité

$$|p(x)| < C_1\, e^{(k+\varepsilon)\,|x|}$$

est égale à zéro. On peut donc caractériser la solution principale $F(x\,|\,\omega)$ de l'équation

$$\mathop{\triangle}_{\omega} F(x) = \varphi(x)$$

de la manière suivante. Cette solution est holomorphe dans la bande $b \leq \Re(x) \leq b + \omega$ et elle y satisfait à l'inégalité (34) pour toute valeur fixe de ω dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$ quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε. Toute autre solution qui possède les mêmes propriétés en diffère par une constante.

De même la solution principale de l'équation

$$\mathop{\nabla}_{\omega} G(x) = \varphi(x)$$

est holomorphe dans la bande $b < \Re(x) \leq b + \omega$ et elle y satisfait à l'inégalité (33),

ω étant un nombre fixe dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$. Il n'y a aucune autre solution qui admet les mêmes propriétés. Parmi toutes les solutions holomorphes les solutions principales sont donc celles qui sont de la plus petite croissance.

30. Dans le paragraphe 20 nous avons étudié la série de Fourier qui représente la fonction F. Nous allons maintenant, par une nouvelle méthode, déduire cette série avec son terme complémentaire. Reprenons l'équation (29) et remarquons qu'on a

$$\frac{1}{1 - e^{-2\pi i z}} = -\sum_{n=1}^{m} e^{2\pi i n z} + \frac{e^{2\pi i m z}}{1 - e^{-2\pi i z}},$$

$$\frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} = -\sum_{n=1}^{m} e^{-2\pi i n z} + \frac{e^{-2\pi i m z}}{1 - e^{2\pi i z}}.$$

En substituant ces expressions le second membre s'écrit comme il suit

$$\int_a^{x+a\omega} \varphi(z)\, e^{-\eta\lambda(z)}\, dz - 2\omega \sum_{n=1}^{m} \int_a^{\infty} \cos(2\pi n z)\, \varphi(x+\omega z)\, e^{-\eta\lambda(x+\omega z)}\, dz$$

$$+\, \omega \int_{a\gamma'\infty} \frac{\varphi(x+\omega z)\, e^{2\pi i m z}}{1 - e^{-2\pi i z}}\, e^{-\eta\lambda(x+\omega z)}\, dz + \omega \int_{a\gamma''\infty} \frac{\varphi(x+\omega z)\, e^{-2\pi i m z}}{1 - e^{2\pi i z}}\, e^{-\eta\lambda(x+\omega z)}\, dz.$$

Soit x un point dans le demi-plan $\Re(x) > b - a\omega$ et soit $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Dans les deux derniers termes je déforme la ligne d'intégration, puis je fais tendre η vers zéro, puis je déforme de nouveau la ligne d'intégration de la manière qui a été expliquée plus haut. J'arrive ainsi à l'équation suivante

$$F(x\,|\,\omega) = \int_a^{x+a\omega} \varphi(z)\, dz - 2\sum_{n=1}^{m} \lim_{\eta \to 0} \int_{x+a\omega}^{\infty} \cos\frac{2\pi n(z-x)}{\omega}\, \varphi(z)\, e^{-\eta\lambda(z)}\, dz + R_m, \tag{35}$$

où

$$R_m = \omega \int_a^{a+i\infty} \frac{\varphi(x+\omega z)\, e^{2\pi i m z}}{1 - e^{-2\pi i z}}\, dz + \omega \int_a^{a-i\infty} \frac{\varphi(x+\omega z)\, e^{-2\pi i m z}}{1 - e^{2\pi i z}}\, dz. \tag{36}$$

Ici a est un nombre quelconque entre 0 et -1. Posons $x_0 = x + a\omega$ et prenons par exemple $\lambda(z) = z^2$. L'équation (35) peut s'écrire comme il suit

$$F(x\,|\,\omega) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{m}\left(a_n \cos\frac{2\pi n x}{\omega} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{\omega}\right) + R_m \tag{37}$$

où

$$a_0 = \int_a^{x_0} \varphi(z)\,dz,$$

$$a_n = -\lim_{\eta \to 0} \int_{x_0}^{\infty} \cos\frac{2\pi n z}{\omega}\,\varphi(z)\,e^{-\eta z^2}\,dz, \tag{38}$$

$$b_n = -\lim_{\eta \to 0} \int_{x_0}^{\infty} \sin\frac{2\pi n z}{\omega}\,\varphi(z)\,e^{-\eta z^2}\,dz, \tag{38'}$$

$$R_m = \int_{x_0}^{x_0 + i\infty} \frac{\varphi(z)\,e^{\frac{2\pi i m}{\omega}(z-x)}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(z-x)}}\,dz + \int_{x_0}^{x_0 - i\infty} \frac{\varphi(z)\,e^{-\frac{2\pi i m}{\omega}(z-x)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z-x)}}\,dz.$$

x_0 représente un point quelconque dans le demi-plan $\Re(x_0) > b$ et l'équation est valable si $0 < \frac{x - x_0}{\omega} < 1$. Quand m augmente indéfiniment la série (37) convergera. En effet considérons l'expression (36) du reste; on sait trouver une constante C telle que

$$|R_m| < C \int_a^{a+i\infty} |e^{2\pi i m z}\,dz| + C \int_a^{a-i\infty} |e^{-2\pi i m z}\,dz|$$

$$= C \int_0^{\infty} e^{-2\pi m z}\,dz + C \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi m z}\,dz = \frac{2C}{2\pi m}.$$

Le reste R_m tend donc vers zéro quand m tend vers l'infini c. q. f. d.

Les expressions (38) des coefficients a_n et b_n ont toujours un sens. Mais en général ces deux intégrales divergent si $\eta = 0$. Il sera quelquefois avantageux de les transformer de manière à obtenir des intégrales convergentes. L'équation (37) peut évidemment s'écrire comme il suit

$$F(x\,|\,\omega) = \int_a^{x_0} \varphi(z)\,dz + \sum_{n=1}^{m}\left(a'_n \cos\frac{2\pi n}{\omega}(x - x_0) + b'_n \sin\frac{2\pi n}{\omega}(x - x_0)\right) + R_m,$$

où

$$a'_n = -2 \lim_{\eta \to 0} \int_0^\infty \cos \frac{2\pi n z}{\omega} \varphi(x_0 + z) e^{-\eta(x_0+z)^2} dz,$$

$$b'_n = -2 \lim_{\eta \to 0} \int_0^\infty \sin \frac{2\pi n z}{\omega} \varphi(x_0 + z) e^{-\eta(x_0+z)^2} dz.$$

En faisant tourner deux fois le chemin d'intégration de la manière que nous avons expliquée plus haut, on voit que les coefficients a'_n et b'_n se représentent par les intégrales convergentes suivantes

$$a'_n = \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{-\frac{2\pi n z}{\omega}} [\varphi(x_0 + iz) - \varphi(x_0 - iz)] dz,$$

$$b'_n = - \int_0^\infty e^{-\frac{2\pi n z}{\omega}} [\varphi(x_0 + iz) + \varphi(x_0 - iz)] dz.$$

31. Revenons à l'équation (35) et faisons $\alpha = -\frac{1}{2}$. En remplaçant x par $x + \frac{\omega}{2}$, on aura

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} \middle| \omega\right) = \int_a^x \varphi(z) dz - 2 \sum_{n=1}^{m} (-1)^n \lim_{\eta \to 0} \int_x^\infty \cos \frac{2\pi n (z - x)}{\omega} \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz + R_m,$$

où

$$R_m = (-1)^m i\omega \int_0^\infty \frac{\varphi(x + i\omega z) - \varphi(x - i\omega z)}{1 + e^{2\pi z}} e^{-2m\pi z} dz.$$

Mais en faisant tendre α vers zéro dans l'équation (35) on obtiendra

$$F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z) dz - \frac{\omega}{2} \varphi(x) - 2 \sum_{n=1}^{m} \lim_{\eta \to 0} \int_x^\infty \cos \frac{2\pi n (z - x)}{\omega} \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz + R_m,$$

où

$$R_m = i\omega \int_0^\infty \frac{\varphi(x + i\omega z) - \varphi(x - i\omega z)}{1 - e^{2\pi z}} e^{-2m\pi z} dz.$$

En soustrayant membre à membre ces deux relations on trouve enfin

$$G(x\,|\,\omega)=\varphi(x)+\frac{4}{\omega}\sum_{n=0}^{m}\lim_{\eta\to 0}\int_{x}^{\infty}\cos\frac{(2n+1)\pi(z-x)}{\omega}\varphi(z)e^{-\eta z^2}dz+R_m,$$

où

$$R_m=\frac{2}{i}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x+i\omega z)-\varphi(x-i\omega z)}{1-e^{2\pi z}}e^{-(2m+1)\pi z}dz.$$

Ces trois équations sont donc vraies pour toute valeur de x dans le demi-plan $\Re(x)>b$. Quand on fait tendre m vers l'infini on obtiendra trois séries qui convergent dans le même demi-plan parce que R_m tend vers zéro. On en conclut en particulier que les séries (33), (34), (35) et (36) du paragraphe 25 convergent, si $\Re(x)>0$.

32. Si l'on veut pouvoir prolonger les fonctions F et G en dehors des domaines que nous avons indiqués dans le paragraphe 29 il faut ajouter des hypothèses nouvelles relativement à la fonction $\varphi(x)$. Nous considérons deux cas différents qui sont assez intéressants. Supposons d'abord que $\varphi(x)$ soit une fonction entière de x qui satisfait à l'inégalité

$$|\varphi(x)|<C\,e^{(k+\varepsilon)|x|},$$

C étant une constante, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, pendant que cette inégalité n'est pas satisfaite pour aucune valeur négative de ε. En regardant les intégrales (31) et (32) on voit que les fonctions $G(x\,|\,\omega)$, respectivement $F(x\,|\,\omega)$ sont holomorphes pour toute valeur finie de x et pour les valeurs de ω qui sont à l'intérieur du cercle $|\omega|=\frac{\pi}{k}$, respectivement à l'intérieur du cercle $|\omega|=\frac{2\pi}{k}$. On vérifie comme plus haut que ces deux fonctions satisfont aux équations (24) et (25) quand ω est à l'intérieur du cercle dont nous venons de parler. Je dis qu'il y a toujours un point singulier sur la circonférence de ce cercle. En effet, reprenons les quatres séries de puissances (26). La condition que nous venons d'imposer à la fonction $\varphi(x)$ entraîne que

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,|\varphi^{(\nu)}(x)|^{\frac{1}{\nu}}=k.$$

La première et la deuxième série admettent donc le rayon de convergence $\frac{2\pi}{k}$ et cela pour toute valeur finie de x; la troisième et la quatrième série admettent le rayon de convergence $\frac{\pi}{k}$. Il y a donc un point singulier sur les circonférences

des deux cercles.[1] On peut vérifier ce fait à l'exemple suivant. Soit $\varphi(x) = e^{\beta x}$, β étant un nombre complexe quelconque. Les équations (31) et (32) se réduisent aux suivantes

$$\underset{\omega}{S}\, e^{\beta x} \mathop{\nabla}_{\omega} x = i\, e^{\beta x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\omega\beta z} \frac{dz}{\sin \pi z}, \qquad -1 < a < 0,$$

$$\underset{0}{\overset{x}{S}}\, e^{\beta x} \mathop{\triangle}_{\omega} x = \frac{1}{2\pi i \beta} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (e^{\beta(x+\omega z)} - 1) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz.$$

Du théorème de Cauchy sur les intégrales complexes on conclut aisément que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a+1-i\infty}^{a+1+i\infty} e^{\omega z} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\omega z} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz = \omega,$$

ω étant un nombre dont la valeur absolue est plus petite que 2π. En remplaçant dans la première intégrale z par $1 + z$ il vient

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\omega z} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz = \frac{\omega}{e^{\omega} - 1}.$$

On trouve de même, si $|\omega| < \pi$

$$i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\omega z} \frac{dz}{\sin \pi z} = \frac{2}{1 + e^{\omega}}.$$

En substituant ces expressions dans les équations que nous venons de trouver, on aura

$$\underset{\omega}{S}\, e^{\beta x} \mathop{\nabla}_{\omega} x = \frac{2\, e^{\beta x}}{e^{\omega\beta} + 1}, \qquad |\omega\beta| < \pi,$$

$$\underset{0}{\overset{x}{S}}\, e^{\beta x} \mathop{\triangle}_{\omega} x = \frac{\omega\, e^{\beta x}}{e^{\omega\beta} - 1} - \frac{1}{\beta}, \qquad |\omega\beta| < 2\pi.$$

[1] Il arrive même que les deux cercles sont des lignes singulières.

On voit que $G(x\,|\,\omega)$ et $F(x\,|\,\omega)$ sont des fonctions méromorphes de ω avec un pôle simple sur les cercles de convergence. En posant $\beta = \pm 1$ et en ajoutant ensemble on trouve

$$\mathop{\mathbf{S}} ch\, x \mathop{\nabla}_{\omega} x = \frac{ch\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{ch\,\frac{\omega}{2}},$$

$$\mathop{\mathbf{S}} sh\, x \mathop{\nabla}_{\omega} x = \frac{sh\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{ch\,\frac{\omega}{2}},$$

$$\mathop{\mathbf{S}}_{0}^{x} ch\, x \mathop{\triangle}_{\omega} x = \frac{\omega}{2}\,\frac{sh\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{sh\,\frac{\omega}{2}},$$

$$\mathop{\mathbf{S}}_{0}^{x} sh\, x \mathop{\triangle}_{\omega} x = \frac{\omega}{2}\,\frac{ch\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{sh\,\frac{\omega}{2}} - 1.$$

33. La nature analytique des fonctions F et G est bien différente si $\varphi(x)$ n'est pas une fonction entière. Nous ferons l'étude complète de ces fonctions en supposant que $\varphi(x)$ soit une fonction uniforme de x admettant à distance finie un nombre fini de points singuliers β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$. Nous supposons en outre que $\varphi(x)$ satisfasse à l'inégalité

$$|\varphi(x)| < e^{(k+\varepsilon)|x|} \tag{39}$$

pour toute valeur de x dont le module est suffisamment grand. Comme il y a seulement un nombre fini de points singuliers β_ν on sait trouver deux nombres réels b et b tels que la fonction $\varphi(x)$ est holomorphe pour $\Re(x) > b$ et pour $\Re(x) < b$. Les intégrales

$$G(x\,|\,\omega) = i\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z)\frac{dz}{\sin \pi z}, \tag{31}$$

$$F(x\,|\,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz \tag{32}$$

représentent la fonction $G(x|\omega)$ (respectivement $F(x|\omega)$) pour $\Re(x) > b$ pourvu que ω soit positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$ $\left(\text{respectivement } \frac{2\pi}{k}\right)$. Je déforme la ligne d'intégration et je la remplace par un contour (fig. 5) formé d'un arc $B\alpha C$ d'un petit cercle entourant l'origine, de deux droites AB et CD parallèles à l'axe des nombres positif et de deux droites DD' et AA', perpendiculaires à l'axe des nombres réels et s'étendant à l'infini. Cela posé, donnons à x une valeur quelconque dans le demi-plan $\Re(x) > b$ et faisons varier ω dans le demi-cercle $\Re(\omega) \geq 0$, $|\omega| < \frac{\pi}{k}$ s'il s'agit de l'intégrale (31). Quand on donne à ω une valeur quelconque, différente de zéro, dans ce demi-cercle on peut toujours choisir les droites CD et AB suffisamment grandes et suffisamment rapprochées de l'axe des nombres positifs pour que la fonction sous le signe reste holomorphe le long de la ligne d'intégration. Pour abréger j'appelle c_1 le demi-cercle défini par les inégalités $\Re(\omega) \geq 0$, et $0 < |\omega| < \frac{\pi}{k}$ et j'appelle c_2 le demi-cercle obtenu en remplaçant la dernière inégalité par la suivante[1] $0 < |\omega| < \frac{2\pi}{k}$. On voit donc que $G(x|\omega)$ est une fonction analytique de x et de ω, holomorphe quand x est dans le demi-plan $\Re(x) > b$ et ω dans le demi-cercle c_1. Il en est de même de la fonction $F(x|\omega)$; seulement c_1 est à remplacer par c_2.

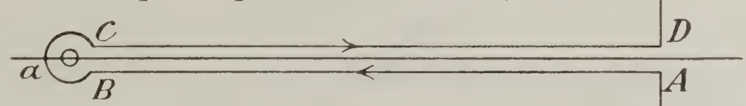


Fig. 5.

Il s'agit maintenant de prolonger les fonctions en dehors de ces deux domaines. Je fais d'abord remarquer qu'il résulte des équations aux différences finies

$$\underset{\omega}{\nabla} G(x|\omega) = \varphi(x), \qquad \underset{\omega}{\triangle} F(x|\omega) = \varphi(x)$$

qu'on a

$$G(x|\omega) = (-1)^m G(x + m\omega|\omega) + 2\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s \varphi(x + s\omega),$$

$$F(x|\omega) = F(x + m\omega|\omega) - \omega\sum_{s=0}^{m-1}\varphi(x + s\omega).$$

Supposons que ω soit à l'intérieur de c_1 ou de c_2. Quel que soit x on peut tou-

[1] Si $k = 0$ les deux demi-cercles sont à remplacer par le demi-plan $\Re(\omega) > 0$.

jours choisir l'entier positif m suffisamment grand pour que le premier terme au second membre soit une fonction holomorphe de x et de ω. On voit donc à ces deux équations que $G(x\,|\,\omega)$ et $F(x\,|\,\omega)$ sont des fonctions uniformes de x admettant les points singuliers

$$x = \beta_\nu - s\omega \qquad \begin{matrix} s = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \\ \nu = 1,\, 2,\, \ldots n \end{matrix}$$

et elles sont d'ailleurs holomorphes. Au voisinage du point $x = \beta_\nu - s\omega$ les fonctions sont de la forme

$$G(x\,|\,\omega) = (-1)^s\, 2\,\varphi(x + s\omega) + \psi(x\,|\,\omega),$$

$$F(x\,|\,\omega) = -\,\omega\,\varphi(x + s\omega) + \psi(x\,|\,\omega),$$

$\psi(x\,|\,\omega)$ étant une fonction holomorphe dans le point en question. La partie principale de $F(x|\omega)$ est donc la même dans tous les points $x = \beta_\nu - s\omega$, $s = 0, 1, 2, \ldots.$ Il arrive que deux ou plusieurs points singuliers viennent coïncider. On voit aisément comment le dernier énoncé est à modifier en ce cas.

34. On peut encore réaliser le prolongement analytique d'une autre manière qui va nous conduire à une expression plus commode. Revenons à l'équation (31) que j'écris sous la forme suivante

$$G(x\,|\,\omega) = \frac{i}{\omega}\int\limits_{x+\alpha\omega-i\omega\infty}^{x+\alpha\omega+i\omega\infty} \varphi(z)\,\frac{dz}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z - x)} \qquad -1 < \alpha < 0. \tag{40}$$

Supposons, pour fixer les idées, que ω soit positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$. Cette relation est vraie, si $\Re(x) > b - \alpha\omega$. Je fais maintenant varier x sur une droite parallèle à l'axe des nombres réels de manière que la partie réelle de x diminue. Je suppose que cette droite ne passe par aucun des points β_ν. Quand la ligne d'intégration arrive à un des points β_ν je la déforme en y ajoutant un petit cercle entourant le point β_ν et parcouru dans le sens positif. L'intégrale étendue le long de ce cercle est égale au résidu dans le point β_ν. Quand la partie réelle de x est devenue plus petite que $\bar{b}$ l'équation (40) a pris la forme[1]

[1] On sait que Cauchy désigne par la notation

$$\mathcal{E}\,[\varphi(z)]\,\psi(z)$$

la somme des résidus de l'expression $\varphi(z)\psi(z)$ relatifs aux points singuliers de la fonction $\varphi(z)$.

$$G(x\,|\,\omega) = -\frac{2\pi}{\omega}\mathcal{C}\frac{[\varphi(z)]}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-x)} + \frac{i}{\omega}\int\limits_{x+a\omega-i\omega\infty}^{x+a\omega+i\omega\infty}\varphi(z)\frac{dz}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-x)}. \tag{41}$$

En posant pour abréger

$$p(x\,|\,\omega) = \frac{2\pi}{\omega}\mathcal{C}\frac{[\varphi(z)]}{\sin\frac{\pi}{\omega}(x-z)}, \tag{42}$$

cette équation peut encore s'écrire

$$G(x\,|\,\omega) = p(x\,|\,\omega) + i\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\varphi(x+\omega z)\frac{dz}{\sin\pi z}. \tag{43}$$

Ici on suppose que $\Re(x) \leq b$. L'intégrale au second membre représente une fonction holomorphe pour ces valeurs de x quand ω est situé dans le demi-cercle c_1. Quand les variables x et ω restent dans ces deux domaines la fonction $G(x\,|\,\omega)$ admet, par conséquent, les mêmes points singuliers que la fonction $p(x\,|\,\omega)$. Or on voit à l'expression (42) que p est une fonction uniforme et périodique de x, admettant la periode 2ω, et satisfaisant aux relations suivantes

$$p(x+\omega\,|\,\omega) = -p(x\,|\,\omega), \qquad p(x\,|\,\omega) = p(x\,|-\omega).$$

Cette fonction périodique admet les points singuliers

$$x = \beta_\nu \pm s\omega, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

et l'on voit aisément comment elle se comporte au voisinage de ces points. Si les β_ν sont des pôles simples de la fonction $\varphi(z)$ avec les résidus B_ν on trouve immédiatement

$$p(x\,|\,\omega) = \frac{2\pi}{\omega}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{B_\nu}{\sin\frac{\pi}{\omega}(x-\beta_\nu)}. \tag{44}$$

Si les β_ν sont des pôles des ordres r_ν la fonction p est de la forme

$$p(x\,|\,\omega) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{s=0}^{s<\frac{r_\nu}{2}}\frac{B_\nu^{(s)} + A_\nu^{(s)}\cot\frac{\pi}{\omega}(x-\beta_\nu)}{\left[\sin\frac{\pi}{\omega}(x-\beta_\nu)\right]^{2s+1}}, \tag{45}$$

où les $B_\nu^{(s)}$ et les $A_\nu^{(s)}$ sont des polynomes en $\frac{1}{\omega}$ mais ils sont indépendants de x. En ce cas la fonction $p(x\,|\,\omega)$ admet pour pôles d'ordre r_ν les points $\beta_\nu \pm s\omega$.

Cela posé, reprenons l'équation (40), donnons à x une valeur fixe dans le demi-plan $\Re(x) > b$ et soit ω un nombre positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$. Faisons maintenant décrire à la variable ω un cercle ayant l'origine pour centre et qui doit être parcouru en sens direct. Le chemin d'intégration tourne. Quand il arrive à un des points β_ν j'évite ce point par un petit cercle, entourant le point β_ν, et parcouru dans le sens positif. Quand ω arrive sur l'axe des nombres négatifs l'équation (40) a pris la forme (41) ou, ce qui revient au même, la forme (43). Quand ω continue sa rotation autour de l'origine on rencontre de nouveau les mêmes points singuliers mais les petits cercles par lesquels on les évite doivent cette fois être parcourus dans le sens négatif. Quand ω revient à son point de départ sur l'axe des nombres positifs l'équation (41) reprend par conséquent la forme (40). *Il en résulte que $G(x\,|\,\omega)$ est une fonction uniforme de ω au voisinage du point $\omega = 0$.*

D'autre part laissons, dans l'équation (41), ω fixe et négatif et faisons varier x de sorte que sa partie réelle diminue. Quand la partie réelle de x est devenue plus petite que b l'équation (41) a pris la forme

$$G(x\,|\,\omega) = i\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z)\frac{dz}{\sin \pi z}. \tag{46}$$

Désignons par c_1 le demi-cercle symétrique à c_1 par rapport à l'axe imaginaire et déterminé par les inégalités $\Re(\omega) \leq 0$, $0 < |\omega| < \frac{\pi}{k}$. On voit comme plus haut que l'intégrale au second membre représente une fonction qui est holomorphe pour toutes les valeurs de ω et de x qui appartiennent respectivement au demi-cercle c_1 et au demi-plan $\Re(x) < b$.

De l'équation (43) on peut déduire une relation remarquable. Nous venons de voir que cette équation est vraie, si ω est négatif et $\Re(x) > b$. Remplaçons ω par $-\omega$ et en même temps z par $-1-z$, nous aurons:

$$G(x\,|-\omega) = p(x\,|\,\omega) + i\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega+\omega z)\frac{dz}{\sin \pi z}.$$

Dans cette équation ω est positif et $\Re(x) > b$. Mais l'intégrale au second membre

représente, pour ces valeurs des variables, la fonction $G(x+\omega\,|\,\omega)$. On a par conséquent

$$G(x-\omega\,|-\omega) = G(x\,|\,\omega) - p(x\,|\,\omega). \tag{47}$$

Cette relation joue un rôle capital dans l'étude de la fonction G. Nous l'avons démontrée en supposant ω positif, mais il va sans dire qu'elle subsiste pour toute valeur régulière de ω et de x.

Il résulte en particulier de cette relation que la fonction $G(x-\omega\,|-\omega)$ est encore une solution de notre équation aux différences finies, c'est à dire qu'on a

$$\mathop{\nabla}_{\omega} G(x-\omega\,|-\omega) = \varphi(x).$$

Ce fait est d'ailleurs une conséquence immédiate d'un théorème classique de la théorie des fonctions, pourvu qu'on sache que la fonction admet le prolongement analytique que nous venons de réaliser.

Il y a, pour cette fonction, un certain développement qui mérite d'être signalé et qui est voisin de celui qui nous a servi pour point de départ. Pour y arriver je définis d'abord une fonction $\bar{G}$ par la limite

$$\bar{G}(x\,|\,\omega) = \mathop{\large S} \varphi(-x) \mathop{\nabla}_{\omega} x.$$

En posant, par exemple, $\lambda(x) = x^2$ on a donc

$$\bar{G}(-x\,|\,\omega) = 2 \lim_{\eta \to 0} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x-s\omega)\, e^{-\eta(x-s\omega)^2}.$$

De ce qui précède il résulte que cette limite existe et qu'on a

$$\bar{G}(-x\,|\,\omega) = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x-\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}.$$

On suppose ici que $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$ et que $\Re(x) < b$. Mais en rapprochant cette équation de l'équation (46) on voit que

$$\bar{G}(-x\,|\,\omega) = G(x\,|-\omega).$$

On a par conséquent, ω étant positif:

$$G(x-\omega\,|-\omega) = 2 \lim_{\eta \to 0} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \varphi(x-s\omega)\, e^{-\eta(x-s\omega)^2}. \tag{48}$$

On vérifie immédiatement que cette limite représente une solution de notre équation aux différences finies. En particulier on trouve

$$G(x-\omega\,|-\omega)=2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s+1}\varphi(x-s\omega),$$

si cette série converge. Ce résultat est d'ailleurs une conséquence directe de notre définition de la fonction $G(x\,|\,\omega)$, si la série converge uniformément pour toutes les valeurs de ω dans un domaine connexe comprenant des segments de l'axe positif et de l'axe négatif; mais s'il n'en est plus ainsi la démonstration que nous venons de donner devient nécessaire.

Je vais encore attirer l'attention sur une expression remarquable de la fonction périodique p qui découle immédiatement de l'expression (48). En substituant cette expression dans l'équation (47) on voit qu'on a toujours

$$p(x\,|\,\omega)=2\lim_{\eta\to 0}\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}(-1)^{s}\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta(x+s\omega)^2}. \tag{49}$$

On a encore

$$p(x\,|\,\omega)=2\lim_{\eta\to 0}\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}(-1)^{s}\varphi(x+s\omega)e^{-\eta|s|},$$

si cette limite existe. En particulier on aura

$$p(x\,|\,\omega)=2\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}(-1)^{s}\varphi(x+s\omega), \tag{50}$$

si la série converge.

35. Passons à la fonction $F(x\,|\,\omega)$. Si $0<\omega<\frac{2\pi}{k}$ cette fonction se représente dans le demi-plan $\Re(x)>b$, par l'intégrale (32) que j'écris sous la forme suivante

$$F(x\,|\,\omega)=\frac{1}{2\pi i\omega}\int_{x+a\omega-i\omega\infty}^{x+a\omega+i\omega\infty}f(z)\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-x)}\right)^2 dz. \tag{51}$$

Pour effectuer le prolongement analytique nous allons raisonner sur cette intégrale comme nous venons de le faire relativement à l'intégrale (40). Pourtant il y a une différence à noter provenant de ce que la fonction $f(z)$ est non uniforme. Cette fonction est uniquement déterminée dans le demi-plan $\Re(z)>b$ si l'on suppose, pour fixer les idées, que $a>b$, et que l'intégrale

$$f(z) = \int_a^z \varphi(z)\, dz$$

soit étendue le long d'un chemin situé tout entier dans le demi-plan. Mais la fonction $f(z)$, étant l'intégrale d'une fonction uniforme, admet en général les points β_ν pour points singuliers logarithmiques. Je trace de chaque point β_ν une coupure réunissant ce point au point à l'infini. Cette coupure sera formée d'une droite parallèle à l'axe imaginaire et dirigée du côté négatif de cet axe. Dans le plan ainsi découpé $f(z)$ est une fonction uniforme. Le point γ représente, dans la figure 6, le point à l'infini sur la coupure partant du point β_ν. Soit Γ_ν un lacet formé du bord droit de la coupure de γ à α, d'un petit cercle C_ν autour de β_ν et parcouru dans le sens positif et enfin du bord gauche de la coupure de α à γ. Posons pour abréger

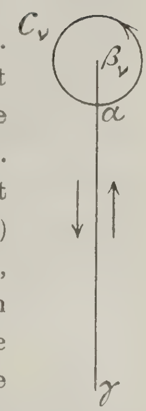


Fig. 6.

$$\Gamma = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Gamma_\nu.$$

Soit ω fixe et positif. Dans l'équation (51) je fais varier x sur une droite parallèle à l'axe réel de sorte que sa partie réelle diminue. Je suppose que cette droite ne passe par aucun des points β_ν. La ligne d'intégration se déplacera à gauche. En franchissant la coupure partant du point β_ν j'ajoute à la ligne d'intégration le lacet Γ_ν. Quand la partie réelle de x est devenue plus petite que b, l'équation (32) a pris la forme

$$F(x\,|\,\omega) = \Pi(x\,|\,\omega) + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz, \qquad \frac{2\pi}{k} > \omega > 0, \tag{52}$$

où l'on a posé pour abréger

$$\Pi(x\,|\,\omega) = \frac{1}{2\pi i \omega} \int_\Gamma f(z) \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-x)}\right)^2 dz.$$

La dernière intégrale dans le second membre de l'équation (52) représente une fonction qui est holomorphe pour $\Re(x) < \bar{b}$ quand ω est situé dans le demi-cercle c_2. Quand x et ω restent dans ces deux domaines les points singuliers de $F(x\,|\,\omega)$ sont donc les mêmes que ceux de la fonction $\Pi(x\,|\,\omega)$. Or il est facile d'évaluer cette fonction. En effet, ω étant positif, la fonction $\cot \frac{\pi}{\omega}(z-x) - i$ tendra

vers zéro quand z tend vers l'infini le long d'une des coupures. En intégrant par partie ou trouve donc

$$\frac{1}{2\pi i\omega}\int_{l_\nu} f(z)\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-x)}\right)^2 dz = \frac{1}{2\,i}\int_{l_\nu}\varphi(z)\left[\cot\frac{\pi}{\omega}(z-x)-i\right]dz.$$

Mais la fonction sur laquelle porte l'intégrale au second membre est uniforme. Les deux intégrales le long des deux bords de la coupure se détruisent donc mutuellement de sorte qu'il reste seulement l'intégrale étendue le long du cercle C_ν qui est égale au résidu dans le point β_ν. On a par conséquent

$$\Pi(x\,|\,\omega) = -\pi i\sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu - \mathcal{E}\,[\varphi(z)]\,\pi\cot\frac{\pi}{\omega}(x-z), \tag{53}$$

où B_ν désigne le résidu de la fonction $\varphi(z)$ dans le point β_ν. La fonction $\Pi(x\,|\,\omega)$ sera définie pour toutes les valeurs des variables par cette équation. On voit que c'est une fonction périodique de x avec la période ω. Elle admet les points singuliers

$$x = \beta_\nu \pm s\,\omega, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

En rapprochant l'expression (53) de l'expression (42) on trouve entre les fonctions p et Π la relation suivante

$$\nabla_{\omega}\,\Pi(x\,|\,2\,\omega) = p(x\,|\,\omega). \tag{54}$$

Si les β_ν sont des pôles simples de la fonction $\varphi(x)$ on aura

$$\Pi(x\,|\,\omega) = -\pi i\sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu\,\pi\cot\frac{\pi}{\omega}(x-\beta_\nu). \tag{55}$$

Si les β_ν sont des pôles des ordres r_ν, la fonction $\Pi(x\,|\,\omega)$ est de la forme

$$\Pi(x\,|\,\omega) = -\pi\sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu\left[\cot\frac{\pi}{\omega}(x-\beta_\nu)+i\right] + \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{s=1}^{s\leq\frac{r_\nu}{2}}\frac{B_\nu^{(s)}+A_\nu^{(s)}\cot\frac{\pi}{\omega}(x-\beta_\nu)}{\left[\sin\frac{\pi}{\omega}(x-\beta_\nu)\right]^{2s}}, \tag{56}$$

où les $A_\nu^{(s)}$ et les $B_\nu^{(s)}$ sont des polynomes en $\frac{1}{\omega}$. Si les β_ν sont des points singuliers essentiels, la fonction $\Pi(x\,|\,\omega)$ admet une infinité de points singuliers essentiels.

Cela posé, reprenons l'équation (51) et donnons à x une valeur fixe quelconque dans le demi-plan $\Re(x) > b$. Soit ω un nombre positif et plus petit que $\frac{2\pi}{k}$. Je fais maintenant décrire à ω un cercle ayant l'origine pour centre et parcouru en sens *inverse.* Quand ω arrive à l'axe des nombres négatifs l'équation (51) a pris la forme (52) où $H(x\,|\,\omega)$ a la valeur donnée par l'équation (53). Mais si l'on fait varier ω sur le même cercle en sens *direct,* partant d'une valeur positive et continuant sa marche jusqu'à ce qu'il arrive à l'axe des nombres négatifs on trouve l'équation suivante

$$F(x\,|\,\omega) = \frac{1}{2\pi i\omega}\int\limits_{\Gamma} f(z)\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-x)}\right)^2 dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz. \quad (57)$$

ω est ici négatif. On peut évaluer la première intégrale comme plus haut en remarquant que la fonction $\cot\frac{\pi}{\omega}(z-x)+i$ tendra vers zéro quand z tend vers l'infini le long d'une des coupures. On a par conséquent

$$\frac{1}{2\pi i\omega}\int\limits_{\Gamma_\nu'} f(z)\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-x)}\right) dz = \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_\nu'} \varphi(z)\left[\cot\frac{\pi}{\omega}(z-x)+i\right]dz.$$

L'équation (57) peut donc s'écrire comme il suit

$$F(x\,|\,\omega) = 2\pi i\sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu + H(x\,|\,\omega) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz. \quad (58)$$

Les valeurs de la fonction $F(x\,|\,\omega)$, pour ω négatif, sont donc différentes dans les deux cas. *$F(x\,|\,\omega)$ est par conséquent une fonction non uniforme de ω.* La différence entre les deux systèmes de valeurs est constante et égale à $2\pi i\sum B_\nu$. Soit B le résidu de $\varphi(x)$ à l'infini. On a

$$B = -\sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu.$$

La fonction $F(x\,|\,\omega)$ est donc de la forme

$$F(x\,|\,\omega) = -B\log\omega + F_1(x\,|\,\omega), \quad (59)$$

$F_1(x\,|\,\omega)$ étant une fonction uniforme de ω au voisinage de $\omega = 0$. Dans le plan

des ω je prend comme coupure la partie négative de l'axe imaginaire. Dans le plan ainsi découpé $F(x\,|\,\omega)$ est une fonction uniforme.

Dans l'équation (58) ω est négatif et $\Re(x) > b$. Laissons ω fixe et faisons varier x de sorte que sa partie réelle diminue. Quand la partie réelle de x devient plus petite que $\bar{b}$ l'équation prend la forme

$$F(x\,|\,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz. \tag{60}$$

J'ai ainsi réalisé complètement le prolongement analytique que j'avais en vue.

Soit c_2 le demi-cercle symétrique à c_2 par rapport à l'axe imaginaire et déterminé par les inégalités $\Re(\omega) \leq 0$, $0 < |\omega| < \frac{2\pi}{k}$. On voit à la dernière intégrale que la fonction $F(x\,|\,\omega)$ est holomorphe pour toutes les valeurs de ω et de x qui appartiennent respectivement au demi-cercle c_2 et au demi-plan $\Re(x) < \bar{b}$.

En regardant l'expression (53) on voit que la fonction périodique $\Pi(x\,|\,\omega)$ satisfait à la relation

$$\Pi(x\,|\,-\omega) = -\Pi(x\,|\,\omega) + 2\pi i B. \tag{61}$$

Cela posé, on trouve immédiatement, en rapprochant les équations (58) et (32), la formule suivante

$$F(x-\omega\,|\,-\omega) = F(x\,|\,\omega) - \Pi(x\,|\,\omega) \tag{62}$$

qui exprime une des principales propriétés de la fonction F. Cette relation est démontrée en supposant ω positif. Il va sans dire qu'elle subsiste pour les valeurs complexes de ω, les branches de la fonction étant convenablement choisies.

36. Je vais maintenant déduire, pour la fonction F, une expression nouvelle qui est fort remarquable. Pour y arriver je définis d'abord une fonction $\bar{F}$ par la limite suivante

$$\bar{F}(x\,|\,\omega) = \mathop{\mathrm{S}}_{-a}^{x} \varphi(-z) \mathop{\triangle}_{\omega} z.$$

En posant $\lambda(x) = x^2$ on a donc

$$\bar{F}(-x\,|\,\omega) = \lim_{\eta \to 0}\left[\int_{-\infty}^{a} \varphi(z)\, e^{-\eta z^2} dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x - s\omega)\, e^{-\eta (x - s\omega)^2}\right]. \tag{63}$$

L'intégrale au second membre n'est pas complètement déterminée, a étant par hypothèse plus grand que b. Convenons de choisir le chemin d'intégration de sorte qu'il ne rencontre aucune des coupures partant des points β_ν. On peut donc intégrer le long de l'axe réel, si tous les points β_ν sont au dessous de cet axe. Mais s'il n'en est pas ainsi, il faut intégrer de $-\infty$ jusqu'au point $\bar{b}$ le long de l'axe réel, et puis de $\bar{b}$ jusqu'à b le long d'une courbe située au-dessus de l'axe réel et laissant tous les points β_ν du côté droit de la courbe; enfin on chemine de b jusqu'à a le long d'une courbe située dans le demi-plan $\Re(z) > b$.

Supposons que $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. De ce qui précède il résulte immédiatement que la limite (63) existe et qu'on a

$$\bar{F}(-x \mid \omega) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x - \omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz$$

pourvu que $\Re(x) < \bar{b}$. Mais en rapprochant cette équation de l'équation (60), on trouve

$$-\bar{F}(-x \mid \omega) = F(x \mid -\omega).$$

On a donc, ω étant positif:

$$F(x \mid -\omega) = \lim_{\eta \to 0} \left[\omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x - s\omega) e^{-\eta(x-s\omega)^2} - \int_{-\infty}^{a} \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz \right].$$

Il s'agit ici de la branche de la fonction F obtenue en faisant varier ω sans franchir la coupure. En substituant cette expression dans l'équation

$$\Pi(x \mid \omega) = F(x \mid \omega) - F(x - \omega \mid -\omega)$$

on trouve enfin

$$\Pi(x \mid \omega) = \lim_{\eta \to 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz - \omega \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)^2} \right]. \tag{64}$$

Cette égalité est valable dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$ pourvu que x ne soit pas situé sur une droite parallèle à l'axe réel et passant par un des points β_ν.

On a donc en particulier

$$\Pi(x \mid \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)\, dz - \omega \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \varphi(x + s\omega), \tag{65}$$

si la série et l'intégrale convergent. Dans ces deux expressions on suppose que les lignes d'intégration ont été choisies comme nous venons de le dire. On vérifie immédiatement à l'aide de ces expressions que $\Pi(x \mid \omega)$ est une fonction périodique de x avec la période ω.

Cette fonction admet un développement en série de Fourier dont les coefficients s'expriment d'une manière très simple à l'aide de la fonction $\varphi(x)$. Admettons que les β_ν soient rangés de sorte que

$$\Re\left(\frac{\beta_1}{i}\right) \geq \Re\left(\frac{\beta_2}{i}\right) \geq \Re\left(\frac{\beta_3}{i}\right) \cdots > \Re\left(\frac{\beta_n}{i}\right).$$

Soient x et x_0 deux points quelconques dans la bande

$$\Re\left(\frac{\beta_\nu}{i}\right) > \Re\left(\frac{x}{i}\right) > \Re\left(\frac{\beta_{\nu+1}}{i}\right). \tag{66}$$

On aura

$$\Pi(x \mid \omega) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n x}{\omega} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{\omega}\right), \tag{67}$$

où

$$a_n = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x_0+\omega} \Pi(x \mid \omega)\cos\frac{2\pi n x}{\omega}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x_0+\omega} \Pi(x \mid \omega)\sin\frac{2\pi n x}{\omega}\,dx.$$

Substituons dans ces intégrales l'expression (64) et remarquons que cette expression converge uniformément par rapport à x. On trouvera, si $n > 0$

$$a_n = -\lim_{\eta \to 0}\int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty}\cos\frac{2\pi n x}{\omega}\,\varphi(x)\,e^{-\eta x^2}\,dx, \tag{68}$$

$$b_n = -\lim_{\eta \to 0}\int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty}\sin\frac{2\pi n x}{\omega}\,\varphi(x)\,e^{-\eta x^2}\,dx, \tag{68'}$$

où l'intégration est étendue le long d'une droite parallèle à l'axe réel et passant par le point x_0. Enfin on aura

$$a_0 = \lim_{\eta \to 0}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{-\eta x^2}\,dx - \int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty}\varphi(x)\,e^{-\eta x^2}\,dx\right].$$

Dans la première intégrale le chemin a été choisi de la même manière que dans l'expression (64). Soit, comme plus haut, B_s le résidu de la fonction $\varphi(x)$ dans le point β_s. On aura donc

$$a_0 = -2\pi i \sum_{s=1}^{s=\nu} B_s.$$

Des intégrales (68) on peut déduire une autre expression remarquable des coefficients a_n et b_n. Je déforme deux fois le chemin d'intégration de la manière que j'ai déjà expliquée. Les nouvelles intégrales se détruisent mutuellement à l'exception de celles qui sont étendues le long de n petit cercles entourant les points singuliers. Par un calcul facile on trouvera ainsi

$$a_n = -\pi i \,\mathcal{E}\left(\varphi(x)\, e^{\frac{2\pi i n x}{\omega}}\right) + \pi i \,\mathcal{E}'\left(\varphi(x)\, e^{-\frac{2\pi i n x}{\omega}}\right),$$

$$b_n = -\pi \,\mathcal{E}\left(\varphi(x)\, e^{\frac{2\pi i n x}{\omega}}\right) - \pi \,\mathcal{E}'\left(\varphi(x)\, e^{-\frac{2\pi i n x}{\omega}}\right),$$

où $\mathcal{E}$ désigne la somme des résidus dans les points $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ et $\mathcal{E}'$ désigne la somme des résidus dans les points $\beta_{\nu+1}, \beta_{\nu+2}, \ldots \beta_n$.

Avec cette détermination des coefficients a_n et b_n la série (67) convergera absolument et uniformément dans la bande (66) et elle représente la fonction $\Pi(x \mid \omega)$. En particulier on aura $a_0 = 0$, s'il s'agit du demi-plan $\Re\left(\frac{x}{i}\right) > \Re\left(\frac{\beta_1}{i}\right)$, et $a_0 = 2\pi i B$, s'il s'agit du demi-plan $\Re\left(\frac{x}{i}\right) < \Re\left(\frac{\beta_n}{i}\right)$.

En tenant compte de la relation

$$p(x \mid \omega) = \mathop{\triangle}_{\omega} \Pi(x \mid 2\omega)$$

on voit enfin que la fonction périodique p se représente dans la bande (66) par la série convergente[1]

[1] On peut déduire plusieurs autres expressions remarquables des deux fonctions périodiques. Admettons pour un moment que le point à l'infini est un pôle d'ordre quelconque pour la fonction $\varphi(x)$. On démontre que

$$p(x \mid \omega) = (-1)^m \omega^m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_{m-1}(z)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x + \omega z)\, dz,$$

$$\Pi(x \mid \omega) = (-1)^m \omega^{m+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_m(z)}{m!} \varphi^{(m)}(x + \omega z)\, dz - 2\pi i \sum_{s=1}^{s=\nu} B_s.$$

$$p(x\,|\,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{\omega} + \beta_{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\omega}\right),$$

où

$$\alpha_n = \frac{4}{\omega}\lim_{\eta\to 0}\int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty}\cos\frac{\pi n x}{\omega}\varphi(x)\,e^{-\eta x^2}dx,$$

$$\beta_n = \frac{4}{\omega}\lim_{\eta\to 0}\int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty}\sin\frac{\pi n x}{\omega}\varphi(x)\,e^{-\eta x^2}dx,$$

x_0 étant un point quelconque dans la bande (66).

Les séries asymptotiques.

37. Nous avons vu que les fonctions $F(x\,|\,\omega)$ et $G(x\,|\,\omega)$ admettent une infinité de points singuliers au voisinage du point $\omega = 0$. Ce point est donc un point singulier essentiel des deux fonctions. Voyons maintenant comment ces fonctions se comportent quand ω tend vers zéro le long d'un rayon vecteur. Dans ce but reprenons les quatre séries que nous avons envisagées dans le paragraphe 16. Nous pouvons présenter le terme complémentaire de ces séries sous une forme nouvelle. Développons la fonction f par la formule de Taylor et prenons le reste sous la forme donnée par Darboux; on aura

---

Ces deux intégrales ne dépendent pas de l'entier m. Seulement il faut avoir soin de choisir m suffisamment grand pour assurer la convergence, ce qui est toujours possible. Les intégrales admettent n coupures formées de n droites parallèles à l'axe réel et passant par les n points β_ν. Elles convergent pour toute valeur positive de ω et pour toute valeur de x qui n'est pas située sur une des coupures. La première équation est vraie dans tout le plan découpé. La première intégrale représente donc la même fonction des deux côtés d'une coupure. La seconde équation est vraie dans la bande (66). Quand x franchit la coupure passant par le point β_ν la seconde intégrale fait un saut brusque qui est égal à $2\pi i B_\nu$. Cette intégrale représente donc différentes fonctions dans les différentes bandes.

On démontre de même que la fonction p se représente par la série suivante

$$p(x\,|\,\omega) = 2\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}(-1)^s\left[\varphi(x+s\omega) - \mathop{\nabla}_{\omega} P(x+s\omega)\right]$$

qui converge pour toute valeur de ω qui est différente de zéro et pour toute valeur de x qui n'est pas de la forme $\beta_\nu, \beta_\nu \pm \omega, \beta_\nu \pm 2\omega, \ldots$ Ici $P(x)$ a la même signification que dans le paragraphe 11.

$$f(x+\omega z)=\int_a^x \varphi(z)\,dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu z^\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x)+\lambda\,\frac{\omega^{m+1}z^{m+1}}{(m+1)!}\varphi^{(m)}(x+\Theta\,\omega z),$$

λ désignant une quantité dont le module est au plus égal à l'unité. Substituons cette expression dans les intégrales suivantes, on trouve, en tenant compte des formules (18) et (20)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz=\int_a^x \varphi(z)\,dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu B_\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x)$$

$$+\frac{\omega^{m+1}}{(m+1)!}\frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\varphi^{(m)}(x+\Theta\,\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 z^{m+1}\,dz,\qquad -1<\alpha<0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\cos\pi z}\right)^2 dz=\int_a^x \varphi(z)\,dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu D_\nu}{2^\nu\,\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x)$$

$$+\frac{\omega^{m+1}}{(m+1)!}\frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\varphi^{(m)}(x+\Theta\,\omega z)\left(\frac{\pi}{\cos\pi z}\right)^2 z^{m+1}\,dz,\qquad -\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2},$$

Θ désignant une quantité comprise entre 0 et 1. De même, en tenant compte des formules (19) et (17) on trouvera

$$\frac{1}{i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\varphi(x+\omega z)\frac{dz}{\cos\pi z}=\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\omega^\nu E_\nu}{2^\nu\,\nu!}\varphi^{(\nu)}(x)$$

$$+\frac{\omega^m}{m!}\frac{\lambda}{i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\varphi^{(m)}(x+\Theta\,\omega z)\frac{z^m}{\cos\pi z}dz,\qquad -\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2},$$

et enfin

$$i\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\varphi(x+\omega z)\frac{dz}{\sin\pi z}=\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\omega^\nu C_\nu}{2^\nu\,\nu!}\varphi^{(\nu)}(x)+R_m, \tag{69}$$

où

$$R_m=i\lambda\frac{\omega^m}{m!}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\varphi^{(m)}(x+\Theta\,\omega z)\frac{z^m}{\sin\pi z}dz,\qquad -1<\alpha<0.$$

Quand m augmente indéfiniment les quatre séries divergeront toujours car autrement les fonctions $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ auraient été holomorphes au voisinage du point $\omega = 0$. Considérons la dernière série. Je vais démontrer qu'elle représente asymptotiquement la fonction G quand ω tend vers zéro d'une certaine manière. Donnons à x une valeur fixe dans le demi-plan $\Re(x) > b$. L'intégrale R_m converge, si ω est positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$. Elle convergera encore quand ω est situé dans le demi-cercle c_1 pourvu qu'on déforme la ligne d'intégration d'une manière convenable. Je prends comme chemin d'intégration le contour C_2 (fig. 3, page 160) dans lequel les deux droites $\alpha\beta'$ et $\alpha\beta''$ doivent former avec l'axe des nombres positifs les angles $\pm\eta$. Supposons que

$$|\omega| < \frac{\pi \sin \eta - \varepsilon}{k},$$

ε étant un nombre positif. On a alors

$$R_m = i\lambda \frac{\omega^m}{m!} \int\limits_{C_2} \varphi^{(m)}(x + \Theta\,\omega z) \frac{z^m}{\sin \pi z} dz.$$

Quand ω est situé dans le demi-cercle c_1 on peut toujours choisir le nombre positif η assez petit pour que la fonction sur laquelle porte l'intégrale R_m reste holomorphe quand z parcourt la ligne C_2. On sait donc trouver une constante K telle que l'on ait constamment

$$\left| \frac{\varphi^{(m)}(x + \Theta\,\omega z)}{m!} \right| < K\, e^{k|\omega z|},$$

On a donc

$$|R_m| < K |\omega|^m \int\limits_{C_2} e^{(\pi \sin \eta - \varepsilon)|z|} \left| \frac{z^m}{\sin \pi z} dz \right|.$$

La fonction $|\omega^{-m} R_m|$ reste par conséquent plus petite qu'une constante quand ω tend vers zéro *et l'on a uniformément*

$$\lim_{|\omega| \to 0} \frac{R}{\omega^{m-1}} = 0,$$

ω tendant vers zéro par des valeurs appartenant au demi-cercle c_1. En déformant le chemin d'intégration d'une autre manière on voit que cette équation subsiste quand ω tend vers zéro par des valeurs appartenant au demi-cercle $\bar{c}_1$. On voit enfin que ces deux résultats restent vrais encore si $\Re(x) < \bar{b}$. La série divergente

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^\nu C_\nu}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) \tag{70}$$

représente donc asymptotiquement la fonction $G(x|\omega)$ d'une part dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$, pourvu que $\Re(x) > b$, et d'autre part dans l'angle $\frac{3\pi}{2} \geq \arg \omega \geq \frac{\pi}{2}$, pourvu que $\Re(x) < b$. Mais elle représente asymptotiquement la fonction

$$G(x|\omega) - p(x|\omega) = G(x-\omega|-\omega)$$

d'une part dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$, si $\Re(x) < b$, et d'autre part dans l'angle $\frac{3\pi}{2} \geq \arg \omega \geq \frac{\pi}{2}$, si $\Re(x) > b$.

On peut évidemment décomposer la fonction $p(x|\omega)$ en n fonctions périodiques

$$p(x|\omega) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_\nu(x|\omega),$$

$p_\nu(x|\omega)$ étant la fonction qui appartient au point singulier β_ν. Supposons que les β_ν soient rangés de sorte que

$$\Re(\beta_1) > \Re(\beta_2) > \ldots \geq \Re(\beta_n).$$

Alors, si

$$\Re(\beta_s) > \Re(x) > \Re(\beta_{s+1}),$$

il résulte de notre analyse que la série représente asymptotiquement la fonction

$$G(x|\omega) - \sum_{\nu=1}^{\nu=s} p_\nu(x|\omega) \text{ dans l'angle } \frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2},$$

et la fonction

$$G(x|\omega) - \sum_{\nu=s+1}^{\nu=n} p_\nu(x|\omega) \text{ dans l'angle } \frac{3\pi}{2} > \arg \omega > \frac{\pi}{2}.$$

On voit de même que la série divergente

$$\int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^\nu B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x), \tag{71}$$

dans le plan découpé, représente asymptotiquement, dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$, la fonction $F(x \mid \omega)$, pourvu que $\Re(x) > b$, mais elle représente la fonction

$$F(x \mid \omega) - \Pi(x \mid \omega) = F(x - \omega \mid -\omega),$$

si $\Re(x) < \bar{b}$. La série représente asymptotiquement, dans l'angle $\frac{3\pi}{2} \geq \arg \omega \geq \frac{\pi}{2}$, la fonction $F(x \mid \omega)$, si $\Re(x) < \bar{b}$ et la fonction

$$F(x \mid \omega) + \Pi(x \mid -\omega),$$

si $\Re(x) > b$. On démontre enfin que les deux autres séries se comportent d'une manière semblable.

Quelles sont maintenant les valeurs asymptotiques des fonctions p et Π? Dans le plan des ω les points singuliers de ces fonctions sont tous situés sur certains rayons vecteurs. Supposons pour simplifier que tous les β_ν soient des pôles. En regardant l'expression (45) on voit alors immédiatement que la fonction $p(x \mid \omega)$ tend vers zéro, quand ω tend vers zéro le long d'un rayon vecteur sur lequel il n'y a pas de point singulier et plus généralement qu'on a

$$\lim_{\omega \to 0} \omega^{-m} p(x \mid \omega) = 0$$

quel que soit l'entier positif m. Sur un tel rayon vecteur tous les termes du développement asymptotique de $p(x \mid \omega)$ sont donc nuls. De l'expression (56) il résulte de même qu'on sait trouver une constante c telle que

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\Pi(x \mid \omega) - c}{\omega^m} = 0$$

le long des mêmes rayons vecteurs. Mais cette constante dépend de l'argument de ω. Elle passe d'une valeur à une autre quand ω franchit un des vecteurs sur lesquels la limite cesse d'exister.

Résumons les résultats que nous venons de trouver. Les fonctions $G(x \mid \omega)$ et $F(x \mid \omega)$ admettent des prolongements analytiques dans tout le plan des x et, dans le plan des ω, elles existent à l'intérieur du cercle $|\omega| < \frac{\pi}{k}$, respectivement à l'intérieur du cercle $|\omega| < \frac{2\pi}{k}$. $G(x \mid \omega)$ est une fonction uniforme de x et de ω. $F(x \mid \omega)$ est une fonction uniforme de x, mais une fonction non uniforme de ω

au voisinage du point $\omega = 0$. Pour toute valeur de ω différente de zéro les deux fonctions admettent dans le plan des x les points singuliers

$$x = \beta_\nu - s\,\omega, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Pour toute valeur de x, différente des β_ν, elles admettent, dans le plan des ω, les points singuliers

$$\omega = \frac{\beta_\nu - x}{s}, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots \qquad \nu = 1, 2, \ldots n.$$

Ces points singuliers sont situés sur n rayons vecteurs que j'appelle *les vecteurs singuliers.* La série (70) représente asymptotiquement la fonction $G(x\,|\,\omega)$ sur tout rayon vecteur différent des vecteurs singuliers. On a donc en particulier

$$\lim_{\omega \to 0} G(x\,|\,\omega) = \varphi(x), \tag{72}$$

ω tendant vers zéro le long d'un rayon vecteur non singulier. Mais cette limite cesse d'exister quand ω tend vers zéro le long d'une courbe tangente à l'origine à un vecteur singulier. De même la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu} E_{2\nu}}{2^{2\nu}(2\nu)!} \varphi^{(2\nu)}(x)$$

représente asymptotiquement la fonction $G\left(x + \frac{\omega}{2}\,\middle|\,\omega\right)$ sur les mêmes vecteurs.

Supposons, pour fixer les idées, que $\Re(x) > b$ et que les β_ν soient rangés de sorte que

$$\arg(\beta_{\nu+1} - x) \geq \arg(\beta_\nu - x) \qquad \nu = 1, 2, \ldots n - 1.$$

Alors la série (71) représente asymptotiquement la fonction $F(x\,|\,\omega)$ dans l'angle $\arg(\beta_1 - x) > \arg \omega > -\frac{\pi}{2}$. Et elle représente asymtotiquement la fonction

$$F(x\,|\,\omega) - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=p} B_\nu \qquad \text{dans l'angle } \arg(\beta_{p+1} - x) > \arg\omega > \arg(\beta_p - x).$$

La valeur asymptotique de la fonction $F(x\,|\,\omega)$ fait donc un saut brusque quand ω franchit un des vecteurs singuliers. Ce saut est égal à une des périodes de l'intégrale $\int_a^x \varphi(x)\,dx$. On a donc en particulier

$$\lim_{\omega \to 0} F(x \mid \omega) = \int_a^x \varphi(x)\, dx, \tag{73}$$

ω tendant vers zéro le long d'un rayon vecteur quelconque différent des vecteurs singuliers. Mais la détermination qu'il faut choisir de l'intégrale au second membre change avec l'argument de ω.

Les égalités (72) et (73) ont lieu uniformément dans tout angle qui ne comprend aucun vecteur singulier et qui n'est pas limité par un tel rayon vecteur. Mais quand ω franchit le vecteur qui passe par le point $\beta_\nu - x$ la valeur asymptotique de $F(x \mid \omega)$ augmente de $2\pi i B_\nu$.

Quand on fait varier x les vecteurs singuliers tournent. Quand x décrit un cercle autour d'un des points singuliers le vecteur singulier correspondant à ce point fait une rotation complète.

Intégrales définies.

38. Je vais encore signaler quelques autres expressions des solutions principales qui pourtant ne sont que d'une médiocre importance. Supposons pour abréger que $b < 0$ et que $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Soit x un point dans la bande

$$0 < \Re(x) < \omega$$

et posons $\alpha = -\frac{x}{\omega}$ dans la formule (14). On aura

$$F(x \mid \omega) = \frac{1}{2\pi i \omega} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(z) \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z - x)} \right)^2 dz.$$

En changeant la variable d'intégration on trouve, après quelques réductions faciles

$$F(x \mid \omega) = \frac{\pi}{\omega} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \frac{2\pi x}{\omega} ch \frac{2\pi t}{\omega}}{\left(ch \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega} \right)^2} [f(it) + f(-it)]\, dt$$

$$+ \frac{\pi i}{\omega} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{2\pi x}{\omega} sh \frac{2\pi t}{\omega}}{\left(ch \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega} \right)^2} [f(it) - f(-it)]\, dt. \tag{74}$$

De l'équation (13) on déduit de même, en supposant $a = 0$,

$$F(x \mid \omega) = \frac{i}{2} \int_0^\infty \left[1 - \frac{sh \frac{2\pi t}{\omega}}{ch \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega}} \right] [\varphi(it) - \varphi(-it)]\, dt$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{2\pi x}{\omega}}{ch \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega}} [\varphi(it) + \varphi(-it)]\, dt. \tag{75}$$

Si $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$ on trouve enfin, en posant $a = -\frac{x}{\omega}$ dans l'équation (12),

$$G(x \mid \omega) = \frac{2}{\omega} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{\pi x}{\omega} ch \frac{\pi t}{\omega}}{ch \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega}} [\varphi(it) + \varphi(-it)]\, dt$$

$$+ \frac{2i}{\omega} \int_0^\infty \frac{\cos \frac{\pi x}{\omega} sh \frac{\pi t}{\omega}}{ch \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega}} [\varphi(it) - \varphi(-it)]\, dt. \tag{76}$$

Ces trois relations sont valables pour toute valeur de x dans la bande $0 < \Re(x) < \omega$. Les seconds membres représentent d'ailleurs des fonctions périodiques de x.

Si $\varphi(x)$ est une puissance entière de x les fonctions F et G se réduisent aux polynomes de Bernoulli et aux polynomes d'Euler. En posant $\omega = 1$ dans les trois formules précédentes on trouve ainsi pour ces polynomes les expressions suivantes

$$B_{2\nu}(x) = (-1)^\nu 2\pi \int_0^\infty t^{2\nu} \frac{1 - \cos 2\pi x\, ch\, 2\pi t}{(ch\, 2\pi t - \cos 2\pi x)^2}\, dt,$$

$$B_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1} 2\pi \int_0^\infty t^{2\nu+1} \frac{\sin 2\pi x\, sh\, 2\pi t}{(ch\, 2\pi t - \cos 2\pi x)^2}\, dt,$$

$$B_{2\nu}(x) = (-1)^\nu 2\nu \int_0^\infty t^{2\nu-1} \left[1 - \frac{sh\, 2\pi t}{ch\, 2\pi t - \cos 2\pi x} \right] dt,$$

$$B_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1}(2\nu+1)\int_0^\infty t^{2\nu}\frac{\sin 2\pi x}{ch\,2\pi t - \cos 2\pi x}\,dt,$$

$$E_{2\nu}(x) = (-1)^{\nu}\,4\int_0^\infty t^{2\nu}\frac{\sin \pi x\, ch\,\pi t}{ch\,2\pi t - \cos 2\pi x}\,dt,$$

$$E_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1}\,4\int_0^\infty t^{2\nu+1}\frac{\cos \pi x\, sh\,\pi t}{ch\,2\pi t - \cos 2\pi x}\,dt.$$

On suppose ici que $0 < \Re(x) < 1$. Les seconds membres sont des fonctions périodiques de x. Les intégrales se confondent donc, pour les valeurs réelles de x, avec les fonctions que nous avons désignées plus haut par $\dot{B}_\nu(x)$ et $\dot{E}_\nu(x)$. Cauchy[1] a démontré pour la première fois ces formules et elles ont été retrouvées par Raabe[2] et Hermite[3].

Nous mentionnerons encore quelques autres cas particuliers. En posant $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ dans l'équation (76) on trouve

$$g(x) = \mathop{\Large S}\frac{\nabla x}{x} = 4\int_0^\infty \frac{\cos \pi x\, sh\,\pi t}{ch\,2\pi t - \cos 2\pi x}\frac{dt}{t} + \frac{\pi}{\sin \pi x}, \tag{77}$$

où $0 < \Re(x) < 1$. Le dernier terme au second membre provient de ce qu'il y a, dans l'intégrale (12), sur le chemin d'intégration un pôle qu'il faut éviter par un petit demi-cercle dont on fait ensuite tendre le rayon vers zéro.

En posant $\varphi(x) = \frac{1}{x+n}$, n étant positif, on trouve directement de l'équation (76)

$$g(x+n) = 4\int_0^\infty \frac{\sin \pi x\, ch\,\pi t}{ch\,2\pi t - \cos 2\pi x}\frac{n\,dt}{n^2+t^2} + 4\int_0^\infty \frac{\cos \pi x\, sh\,\pi t}{ch\,2\pi t - \cos 2\pi x}\frac{t\,dt}{n^2+t^2}. \tag{78}$$

En remplaçant x par $1-x$ dans cette équation on voit que la première intégrale au second membre est égale à

[1] Mémoire sur les intégrales définies, Œuvres (1) 1, Paris 1882, p. 458—60.

[2] Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jakob-Bernoulli'sche Funktion, J. reine angew. Math. 42 (1851), p. 348—67.

[3] Sur la fonction de Jacob-Bernoulli, id. 79 (1875), p. 339—44; Œuvres 3, Paris 1912, p. 215—21. voir aussi: Lindelöf, Le calcul des résidus p. 71—2.

$$\frac{g(n+x)+g(n+1-x)}{2}$$

et la seconde intégrale est égale à

$$\frac{g(n+x)-g(n+1-x)}{2}$$

dans la bande $0 < \Re(x) < 1$. Si n est un entier positif l'équation (78) peut donc aussi s'écrire comme il suit

$$g(x) = (-1)^n 4 \int_0^\infty \frac{\cos \pi x \, sh\, \pi t}{ch\, 2\pi t - \cos 2\pi x} \frac{t\,dt}{n^2+t^2} + \frac{\pi}{\sin \pi x} - \sum_{s=1}^{s=2n} \frac{(-1)^s}{x-s},$$

où l'on suppose que $n < \Re(x) < n+1$. Si l'on fait $f(x) = \log x$ dans l'équation (74) on trouve, en supposant $0 < \Re(x) < 1$,

$$\Psi(x) = 2\pi \int_0^\infty \frac{1 - \cos 2\pi x \, ch\, 2\pi t}{(ch\, 2\pi t - \cos 2\pi x)^2} \log t\,dt - \frac{\pi}{2} \cot \pi x.$$

Si $x = \frac{1}{2}$ cette relation se réduit à

$$\pi \int_0^\infty \frac{\log t\,dt}{(ch\, \pi t)^2} = -C - \log 4,$$

C étant la constante d'Euler. De même en posant $\varphi(x) = \frac{1}{x+n}$ dans l'équation (75), n étant un entier positif, on trouve après quelques réductions

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \left[1 - \frac{sh\, 2\pi t}{ch\, 2\pi t - \cos 2\pi x}\right] \frac{t\,dt}{n^2+t^2} + \log n - \frac{\pi}{2} \cot \pi x + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=2n} \frac{1}{x-s}.$$

Cette relation est vraie dans la bande $n < \Re(x) < n+1$. On trouve enfin, en posant $\varphi(x) = \log x$ dans l'équation (75):

$$\log \Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{\sin 2\pi x}{\cos 2\pi x - ch\, 2\pi t} \log t\,dt + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

où $0 < \Re(x) < 1$.

Développements en séries procédant suivant les différences successives d'une fonction.

39. Pour arriver à ces développements nous déduirons d'abord deux lemmes. M. Bendixson[1] a démontré que le domaine de convergence de la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s \frac{(y-1)(y-2)\cdots(y-s)}{1 \cdot 2 \ldots s} \tag{1}$$

est un demi-plan, limité à gauche par une droite perpendiculaire à l'axe réel. C'est à dire qu'il existe un nombre réel λ tel que la série converge si $\Re(y) > \lambda$, et diverge si $\Re(y) < \lambda$. La série converge uniformément dans tout domaine fini situé à l'intérieur du domaine de convergence. En tenant compte d'un résultat de M. Cahen, MM. Landau[2] et Pincherle[3] ont démontré que l'abscisse de convergence λ se détermine par l'une ou l'autre des deux limites suivantes

$$\lambda = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \left| \sum\limits_{s=0}^{s=n} (-1)^s c_s \right|}{\log n}, \qquad \text{si } \lambda \geq 0,$$

$$\lambda = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \left| \sum\limits_{s=n}^{\infty} (-1)^s c_s \right|}{\log n}, \qquad \text{si } \lambda < 0.$$

M. Pincherle a donné la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction admette un développement de la forme (1). Des résultats de M. Pincherle[4] on peut sans peine conclure que:

Lemme 1. Soit $\Omega(x)$ une fonction holomorphe pour $\Re(x) > b$, et supposons qu'on sache trouver deux constantes positives C et k telles qu'on ait, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$|\Omega(x)| < C\, e^{(k+\varepsilon)|x|}$$

---

[1] Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss, Acta math. 9 (1886), p. 1—34.

[2] Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Sitzgsb. Akad. München 36 (1906), p. 151—218.

[3] Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti, Atti del 4. congresso internationale dei Matematici 2, p. 45 Roma 1909. Voir aussi une Note de M. Mittag-Leffler: Sur un nouveau théorème dans la théorie des séries de Dirichlet, C. R. Acad. sc. Paris 160 (1915) p. 271—3.

[4] Sur les fonctions déterminantes, Ann. Éc. Norm. (3) 22 (1905), p. 1—68. Sopra un problema d'interpolazione, Rend. Circ. mat. Palermo 14 (1900), p. 142—4. Voir aussi un mémoire de M. Carlson: Sur les séries de coefficients binomiaux, Nova Acta Soc. sc. Upsal. (4) 4 (1915) n° 3.

pour toute valeur de x dans le demi-plan $\Re(x) > b$. Cette fonction admet un développement de la forme

$$\Omega(x + y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(y-\omega)(y-2\omega)\cdots(y-s\omega)}{s!} \mathop{\triangle}_{\omega}^{s} \Omega(x+\omega) \tag{2}$$

qui converge, si $\Re(x + y) > b$. Ici ω désigne un nombre positif et plus petit que $\frac{\log 2}{k}$. Si la partie réelle de x est plus petite que b on suppose, pour fixer les idées, que la fonction $\Omega(y)$ est holomorphe dans les points $y = x, x+\omega, x+2\omega, \ldots$

Si l'une ou l'autre des deux conditions que nous venons d'imposer à la fonction $\Omega(x)$ cesse d'être satisfaite quand on remplace le nombre b par un nombre[1] plus petit que b, on peut en outre affirmer que la série (2) diverge, si $\Re(x+y) < b$. En diminuant le nombre positif ω on augmente en général le domaine de convergence de la série (2).

Comment se comporte la différence $n^{\text{ième}}$ de $\Omega(x)$ pour les valeurs très grandes de n? De ce que nous venons de dire relativement à la série (1) il résulte que l'abscisse de convergence de la série (2) est égale à

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{\log \left| \omega^n \mathop{\triangle}\limits_{\omega}^{n} \Omega(x) \right|}{\log n}.$$

Cette série converge donc si $\Re\left(\frac{y}{\omega}\right) > \lambda$, et elle diverge si $\Re\left(\frac{y}{\omega}\right) < \lambda$. Mais $\lambda \leq \frac{b-\sigma}{\omega}$, où σ désigne la partie réelle de x. On a donc pour des valeurs suffisamment grandes de n

$$\left| \omega^n \mathop{\triangle}_{\omega}^{n} \Omega(x) \right| < n^{\frac{b-\sigma}{\omega}+\varepsilon}. \tag{3}$$

Cette inégalité nous sera utile dans un moment.

Lemme 2. J'ai besoin encore d'un autre lemme qui a été donné par Euler.[2] Soit une série de puissances

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$$

convergente pour $|x| < 1$. Posons

[1] Il peut arriver que $b = -\infty$.

[2] Institutiones calculi differentialis, Opera mathematica (1) 10, p. 217.

$$x = \frac{z}{1+z},$$

et développons chaque terme suivant les puissances de z. Il vient

$$f(x) = (1+z) \sum_{s=0}^{\infty} a_s \sum_{\nu=s}^{\infty} (-1)^{\nu-s} \binom{\nu}{s} z^{\nu}.$$

Cette série converge en particulier si $|z| < \frac{1}{2}$. D'un théorème connu, dû à Weierstrass, il résulte qu'on peut échanger l'ordre des sommations et ranger la série suivant les puissances de z, si $|z| < \frac{1}{2}$. On trouve ainsi

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{(1-x)^{s+1}} \left(a_s - \binom{s}{1} a_{s-1} + \binom{s}{2} a_{s-2} - \cdots + (-1)^s a_0\right),$$

pourvu que $\left|\frac{x}{1-x}\right| < \frac{1}{2}$. La relation est donc en particulier valable si $-1 < x < 0$. Cette transformation d'Euler a été rigoureusement établie pour la première fois par Poncelet. MM. Pringsheim[1], Fabry et Lindelöf en ont fait récemment des applications intéressantes.

40. Ces préliminaires posés je vais signaler un développement de la fonction $G(x|\omega)$ qui est fort remarquable et qui nous fournira une nouvelle occasion de démontrer l'existence de la limite

$$\mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega} x = \lim_{\varrho \to 1} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x+s\omega) \varrho^s. \tag{4}$$

Supposons que la série au second membre converge, si le nombre positif ϱ est plus petit que 1. Appliquons la transformation d'Euler à cette série. On trouve

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varrho^s \varphi(x+s\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\varrho^s \omega^s}{(1+\varrho)^{s+1}} \mathop{\triangle}_{\omega}^{s} \varphi(x). \tag{5}$$

Il résulte du lemme 2 que cette relation est toujours valable si ϱ est positif et plus petit que 1. Faisons tendre ϱ vers 1. Le premier membre tend par hypothèse vers la fonction $\frac{1}{2} G(x|\omega)$. On a donc

[1] Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihen-Transformation. Sitzgsb. Akad. München Jahrg. 1912, p. 11—92.

$$G(x\,|\,\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x) \tag{6}$$

pourvu que la série au second membre converge. *La limite* (4) *existe donc toujours si cette série converge.* On peut indiquer une expression simple du terme complémentaire de la série. En effet, multiplions et divisons la série au premier membre de l'équation (5) par $1+\varrho$. On trouve

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varrho^s \varphi(x+s\omega) = \frac{\varphi(x)}{1+\varrho} - \frac{\varrho}{1+\varrho} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varrho^s \omega \underset{\omega}{\triangle} \varphi(x+s\omega).$$

En répétant cette opération n fois on trouvera

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varrho^s \varphi(x+s\omega) =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \frac{\varrho^s \omega^s}{(1+\varrho)^{s+1}} \overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x) + (-1)^n \frac{\varrho^n \omega^n}{(1+\varrho)^n} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varrho^s \overset{n}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x+s\omega).$$

Dans cette identité on suppose que $\varrho < 1$. Faisons tendre ϱ vers 1. Il vient

$$\mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x) + (-1)^n \left(\frac{\omega}{2}\right)^n \mathop{\mathsf{S}} \overset{n}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x.$$

On en conclut en particulier que la limite (4) *existe toujours si la série*

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \overset{n}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x+s\omega)$$

converge pour une valeur convenablement choisie de n c'est à dire en prenant n suffisamment grand. Soit par exemple $\varphi(x) = x^\nu$, ν étant un entier plus petit que n. Tous les termes de la série sont nuls. La limite existe donc et l'équation (6) se réduit à

$$E_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^s \frac{\overset{s}{\triangle} x^\nu}{2^s}.$$

Considérons un autre exemple. Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction analytique qui satisfait aux conditions énumérées au commencement du paragraphe 27. Soit ω un nombre positif et plus petit que $\dfrac{\log 2}{k}$. Soit x un point quelconque tel que la fonction $\varphi(z)$ soit holomorphe dans les points $z = x, x+\omega, x+2\omega, \ldots$ De l'inégalité (3) il résulte qu'on a

$$\left|\left(\frac{\omega}{2}\right)^n \overset{n}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x)\right| < \frac{n^{\frac{b-a}{\omega}+1}}{2^n}$$

pour des valeurs suffisamment grandes de n. *La série* (6) *converge donc absolument pour toute valeur de x qui n'est pas un point singulier de la fonction $G(x\,|\,\omega)$.*

41. Considérons maintenant la fonction

$$F(x\,|\,\omega) = \mathop{\Large\mathsf{S}}_a^x \varphi(x) \underset{\omega}{\triangle} x.$$

Admettons que, dans le demi-plan $\Re(x) > b + \varepsilon$, la fonction $\varphi(x)$ soit holomorphe et satisfasse à l'inégalité

$$|\varphi(x)| < C\, e^{(k+\varepsilon)\,|x|} \tag{7}$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε. Soit $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Dans le paragraphe 29 nous avons démontré que ces conditions entraînent qu'on sait trouver une constante C_1 telle que

$$|F(x\,|\,\omega)| < C_1\, e^{(k+\varepsilon)\,|x|}$$

pour toute valeur de x dans le demi-plan $\Re(x) > b + \varepsilon$. On sait en outre que $F(x\,|\,\omega)$ est holomorphe dans ce demi-plan. Si l'on suppose que ω soit positif et plus petit que $\frac{\log 2}{k}$ on peut donc développer la fonction $F(x\,|\,\omega)$ à l'aide de la formule d'interpolation de Newton:

$$\Omega(x+y) = \Omega(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{y\,(y-\omega)\cdots(y-(s-1)\,\omega)}{s!} \overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} \Omega(x). \tag{8}$$

En posant

$$\Omega(x) = F(x\,|\,\omega)$$

et en remarquant qu'on a

$$\underset{\omega}{\triangle} F(x\,|\,\omega) = \varphi(x),$$

et par conséquent

$$\overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} F(x\,|\,\omega) = \overset{s-1}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x),$$

on trouve

$$F(x+y\,|\,\omega) = F(x\,|\,\omega) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{y(y-\omega)(y-2\omega)\cdots(y-s\omega)}{(s+1)!} \mathop{\triangle}_{\omega}^{s} \varphi(x). \tag{9}$$

Il résulte du lemme 1 que cette série converge pourvu que $\Re(x+y) > b$. Supposons que, dans une petite bande entourant la droite $\Re(x) = b$, la fonction $\varphi(x)$ ou bien admette un point singulier ou bien cesse de satisfaire à une inégalité de la forme (7) quelque grand que soit k. Alors la série diverge si $\Re(x+y) < b$.

Soit en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ et $\omega = 1$ on trouve la série bien connue[1]:

$$\Psi(x+y) = \Psi(x) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+1} \frac{y(y-1)\cdots(y-s)}{x(x+1)\cdots(x+s)}.$$

On a ici $b = 0$. La condition de convergence est donc $\Re(x+y) > 0$.

En posant $y = \frac{\omega}{2}$ dans l'équation (9), et en se rappelant qu'on a

$$\mathop{F}_{\omega}(x\,|\,2\omega) = G(x\,|\,\omega),$$

on trouve la série:

$$G\left(x\,\Big|\,\frac{\omega}{2}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}{(s+1)!} \mathop{\triangle}_{\omega}^{s} \varphi(x) \tag{10}$$

qui converge dans le demi-plan $\Re(x) > b - \frac{\omega}{2}$. En posant $y = -\frac{\omega}{2}$ on trouve de même

$$G\left(x - \frac{\omega}{2}\,\Big|\,\frac{\omega}{2}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s+1)}{(s+1)!} \mathop{\triangle}_{\omega}^{s} \varphi(x). \tag{11}$$

Cette série converge dans le demi-plan $\Re(x) > b + \frac{\omega}{2}$. Au sujet de la série (10) on peut noter qu'il arrive qu'il y a, à l'intérieur du domaine de convergence, des points singuliers (essentiels ou non) de la fonction correspondante car en général la fonction $G(x)$ n'est pas holomorphe dans la bande $b \geq \Re(x) > b - \frac{\omega}{2}$. Ce fait ne se présente pas pour la série (11). Si en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ et $\omega = 2$, ces deux séries se reduisent aux suivantes

[1] Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 83.

$$\mathop{\mathsf{S}} \frac{\bigtriangledown x}{x} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2s-1)}{x(x+2)(x+4)\ldots(x+2s)},$$

$$\mathop{\mathsf{S}} \frac{\bar{\ } x}{x} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2s+1)}{(x+1)(x+3)\ldots(x+2s+1)}.$$

La première série converge dans le demi-plan $\Re(x) > -1$ et la seconde converge dans le demi-plan $\Re(x) > 0$.

42. Nous avons déjà dit que la série (8) converge uniformément par rapport à y à l'intérieur du domaine de convergence. En dérivant par rapport à y on trouve donc

$$\Omega'(x+y) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} \Omega(x)}{s!} y(y-\omega)\ldots(y-(s-1)\omega)\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-\omega} + \cdots + \frac{1}{y-(s-1)\omega}\right]. \quad (12)$$

Cette série va nous donner un nouveau développement de la fonction F. En effet, posons

$$\Omega(x) = \int_a^x F(x|\omega)\,dx.$$

On a en vertu de l'équation (21) paragraphe 2

$$\underset{\omega}{\triangle} \Omega(x) = \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F(x|\omega)\,dx = \int_a^x \varphi(x)\,dx = f(x)$$

et par conséquent

$$\overset{s+1}{\underset{\omega}{\triangle}} \Omega(x) = \overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} f(x).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (12) on obtiendra

$$F(x+y|\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} f(x)}{(s+1)!} y(y-\omega)\ldots(y-s\omega)\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-\omega} + \cdots + \frac{1}{y-s\omega}\right]. \quad (13)$$

Du lemme 1 on conclut que cette série converge, pourvu que $\Re(x+y) > b$, et qu'elle représente la solution principale F. Soit en particulier $y = 0$ on aura

$$F(x|\omega) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+1} \omega^s \overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} f(x). \quad (14)$$

Le domaine de convergence de cette série est donc le demi-plan $\Re(x) > b$, et elle converge absolument pour ces valeurs de x. On suppose toujours que $0 < \omega < \frac{\log 2}{k}$. Si $k = 0$ la série converge pour toute valeur positive de ω.

On peut vérifier à l'aide de cette série que la différence de $F(x \mid \omega)$ est égale à $\varphi(x)$ car en appliquant l'opération $\underset{\omega}{\triangle}$ à la série on trouve

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \omega^{s-1} \overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} f(x).$$

Mais cette série représente la dérivée de $f(x)$ c'est à dire $\varphi(x)$. C'est ce qu'on voit en posant $y = 0$ dans l'équation (12).

En faisant $y = -\omega$ dans l'équation (13) on trouve cet autre développement

$$F(x - \omega \mid \omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \omega^s \overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} f(x) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s+1}\right),$$

qui converge, si $\Re(x) > b + \omega$.

Si la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions du paragraphe 33 ces series convergent encore pour des valeurs complexes de ω pourvu que la valeur absolue de ω soit suffisamment petite. Par exemple, si ω est négatif, la série (14) convergera dans le demi-plan $\Re(x) < b$.

43. Je fais remarquer qu'il y a une différence notable entre les conditions de convergence des séries que nous venons de considérer et celles de la série (6)

$$G(x \mid \omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x). \tag{6}$$

La dernière série converge dans des cas beaucoup plus étendus que ne le font les autres séries. Nous l'avons déjà constaté en partie. Nous avons établi l'équation (6) par une méthode directe et très simple, mais nous avons dû supposer que la série au premier membre de l'équation (5) converge, si $|\varrho| < 1$. D'autre part nous avons établi l'équation (14), par exemple, sans faire cette hypothèse. Il y a donc lieu de se demander si l'équation (6) reste vraie dans les mêmes cas que l'équation (14). Il en est bien ainsi mais la démonstration que j'en peux donner est indirecte et un peu détournée.

Supposons que $\varphi(x)$ satisfasse aux conditions du paragraphe 41. Nous avons démontré qu'on a

$$G(x \mid \omega) = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}. \tag{15}$$

Soit $0 < \omega < \frac{\log 2}{k}$. La fonction $\varphi(x)$ admet, en vertu du lemme 1, un développement de la forme

$$\varphi(x+\omega z) = \varphi(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z(z-1)\cdots(z-s+1)}{s!} \omega^s \overset{s}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x).$$

Substituons ce développement dans l'intégrale (15) et supposons pour un moment que $\varphi(x)$ soit un polynome quelconque. La série s'arrête après un nombre fini de termes; on peut donc intégrer terme par terme. Mais l'équation (6) est déjà établie dans le cas actuel. En comparant les deux expressions de la fonction G on constate que

$$i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} z(z-1)\cdots(z-s+1) \frac{dz}{\sin \pi z} = (-1)^s \frac{s!}{2^s}.$$

Cela posé revenons au cas général et intégrons de nouveau terme par terme. On retrouve l'équation (6). Pour justifier l'intégration terme par terme il suffit de démontrer que l'intégrale

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n! \sin \pi z} \omega^n \overset{n}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x) \right| |dz| \tag{16}$$

converge. Posons $x = \sigma + i\tau$, $z = -\frac{1}{2} + it$. On a, en vertu de l'inégalité (3),

$$\left| \omega^n \overset{n}{\underset{\omega}{\triangle}} \varphi(x) \right| < n^{\frac{b-\sigma}{\omega}+\varepsilon}. \tag{17}$$

D'autre part en remarquant que

$$\frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n! \sin \pi z} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \frac{\Gamma(n-z)\,\Gamma(1+z)}{\Gamma(n+1)}$$

et en tenant compte de la valeur asymptotique de la fonction gamma on voit qu'on peut trouver une constante C telle que

$$\left|\frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!\,\sin\pi z}\right| < C\sqrt{n}\,e^{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)|t|}$$

pour $n \geq 1$ et pour toute valeur réelle de t. De ces deux inégalités il résulte que l'intégrale (16) converge si $\sigma > b + \frac{3}{2}\omega$. L'équation (6) est ainsi établie si la partie réelle de x est suffisamment grande. Mais de l'inégalité (17) résulte que la série converge uniformément dans tout domaine fini qui ne renferme pas de point singulier de la fonction $G(x\,|\,\omega)$. L'équation (6) est par conséquent vraie pour toute valeur non singulière de x.

Table des matières.

SUR L'INTÉGRALE $\int_{x_0}^{x} f(y)\,d\,f(x)$ OÙ x ET y SONT LIÉS PAR UNE RELATION SYMÉTRIQUE.

Par

PAUL APPELL

à Paris.

(Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler).

Quoique les mathématiciens ne s'occupent plus guère des intégrales définies ou indéfinies, si fort à la mode il y a une cinquantaine d'années, j'espère que vous lirez avec quelqu'intérêt les considérations suivantes.

I. Posons

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(v)\,d\,f(u); \tag{1}$$

la fonction f étant quelconque, et v étant lié à u par une relation

$$F(u, v) \equiv F(v, u) = 0 \tag{2}$$

symétrique en u et v. Si on construit la courbe (2) par rapport à deux axes rectangulaires Ou et Ov, cette courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice et l'intégrale (1) est supposée prise le long d'un arc continu de cette courbe, du point M_0 de coordonnées x_0, y_0 au point M de coordonnées x et y. Le long de cet arc on a

$$v = \lambda(u) \tag{3}$$

et nous supposerons, à cause de la symétrie,

$$u = \lambda(v). \tag{4}$$

L'intégration par parties donne immédiatement

$$\varphi(x) = f(y) f(x) - f(y_0) f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f(u)\, d f[\lambda(u)].$$

Prenons comme variable indépendante v, en faisant

$$v = \lambda(u),$$

alors v varie de y_0 à y le long du même arc $M_0 M$. En écrivant

$$\varphi(x) = f(y) f(x) - f(y_0) f(x_0) + \int_{x_0}^{y_0} f(u)\, d f(v) - \int_{x_0}^{y} f(u)\, d f(v)$$

on voit que la dernière intégrale est $\varphi(y)$; d'où enfin

$$(5) \qquad \varphi(x) + \varphi(y) = f(y) f(x) - f(y_0) f(x_0) + \int_{x_0}^{y_0} f(u)\, d f(v),$$

équation dans laquelle y est lié à x par la relation

$$F(x, y) = 0,$$

le dernier terme étant $\varphi(y_0)$.

On a ainsi une équation générale, digne d'attention entre $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$, équation qui montre que

$$\varphi(x) + \varphi(y) - f(x) f(y)$$

est constant.

II. Supposons $y = x = \alpha$, α étant une racine de l'équation

$$F(x, x) = 0,$$

ce qui suppose le point M sur la bissectrice.

On a alors

$$2\varphi(\alpha) = f^2(\alpha) - f(x_0) f(y_0) + \int_{x_0}^{y_0} f(u)\, d f(v).$$

Dans le cas où l'on aurait en même temps,

$$y_0 = x = \alpha',$$

la dernière intégrale serait nulle et on aurait

$$2\varphi(\alpha) = f^2(\alpha) - f^2(\alpha').$$

III. Je n'insiste pas sur les cas particuliers dont quelques uns sont bien connus, par exemple le cas où $f(x) = \log(1-x)$, la relation (2) étant

$$u + v = 1\text{ [1]}$$

Je laisse également de côté le cas où u et v seraient liés par une relation involutive

$$auv + b(u+v) + c = 0$$

pour m'arrêter un instant sur le cas le plus simple de tous où

$$u + v = 1, \qquad f(u) = u^p,$$

p étant un nombre positif quelconque.

Dans ce cas nous prendrons $x_0 = 0$, et nous aurons $y_0 = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\varphi(x) = p\int\limits_0^x (1-u)^p u^{p-1}\,du.$$

La relation (5) devient alors

$$\varphi(1-x) + \varphi(x) = (1-x)^p x^p + \frac{p}{2}\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)}$$

d'où pour $x = \frac{1}{2}$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-u)^p u^{p-1}\,du = \frac{1}{p\,2^{2p+1}} + \frac{1}{4}\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)}.$$

---

[1] Voir Bertrand, Calcul intégral, p. 216—220.

SUR L'INTÉGRALE $\int \log(z-\lambda)\, d\log(z-\mu)$.

Par

PAUL APPELL

à Paris.

I. L'intégrale

$$I = \int \log(1-x)\, d\log x$$

a fait l'objet de nombreuses études.[1] Plaçons nous dans le domaine complexe, en supposant que λ et μ désignent des constantes *différentes*, et posons

$$\varphi(z, \lambda, \mu) = \int \log(z-\lambda)\, d\log(z-\mu). \tag{1}$$

En faisant le changement de variable

$$z = \mu + (\lambda - \mu)x$$

on ramène l'intégrale à la forme I. Mais, conservons la forme générale et faisons le changement de variable

$$z = R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)},$$

$R(t)$ étant une fonction rationnelle quelconque, $P(t)$ et $Q(t)$ des polynômes en t.

Appelons $\alpha_h (h = 1, 2, \ldots, n)$ les racines de $P(t) - \lambda Q(t)$, $\beta_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ celles de $P(t) - \mu Q(t)$, et $\gamma_k (k = 1, 2, \ldots, p)$ celles de $Q(t)$. Nous avons, en désignant par A une constante

$$\varphi(z, \lambda, \mu) = \int \log A \frac{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_n)}{(t-\gamma_1)(t-\gamma_2)\cdots(t-\gamma_p)}\, d\log \frac{(t-\beta_1)(t-\beta_2)\cdots(t-\beta_n)}{(t-\gamma_1)(t-\gamma_2)\cdots(t-\gamma_p)} \tag{2}$$

$$= \text{partie intégrée} + \sum_{h,i} \varphi(t, \alpha_h, \beta_i) - \sum_{h,k} \varphi(t, \alpha_h, \gamma_k) - \sum_{k,i} \varphi(t, \gamma_k, \beta_i).$$

[1] Voyez J. Bertrand, Calcul intégral, p. 216.

THE LIBRARY OF THE

L'intégrale $\varphi[R(t), \lambda, \mu]$ se réduit donc, quelle que soit la fonction rationnelle $R(t)$, à une somme d'intégrales analogues.

Telle est la propriété fondamentale que j'avais en vue, qui donne la clef des recherches antérieures et qui permet de les étendre.

II. La propriété précédente peut se généraliser comme il suit, relativement à des intégrales de la forme

$$\varphi_1(z) = \int \log(z-\lambda_1)\log(z-\lambda_2)\cdots\log(z-\lambda_\nu)\, d\log(z-\mu) \tag{3}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu, \mu$ sont des constantes non toutes égales. L'intégrale (3) possède cette propriété que le changement de variable

$$z = R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

où $R(t)$ est une fonction rationnelle *quelconque* de la nouvelle variable t et où $P(t)$ et $Q(t)$ désignent des polynômes en t, la transforme en une somme d'intégrales de même nature, où ν peut varier d'une intégrale à l'autre et où figurent les racines des polynômes

$$Q(t),\ P(t)-\lambda_j\, Q(t),\ P(t)-\mu\, Q(t).$$

III. Enfin une propriété analogue a lieu pour les intégrales $\varphi_p(z)$ obtenues par voie récurrente en posant

$$\varphi_p(z) = \int \log(z-a_{1p})\log(z-a_{2p})\cdots\log(z-a_{\nu p})\,\varphi_{p-1}(z)\, d\log(z-\alpha_p)$$

ν pouvant varier avec p. Des intégrales de cette sorte ont été considérées par Poincaré à la page 215 du Tome 4 des Acta Mathematica.

ZUR THEORIE DER ALGEBRAISCHEN KÖRPER.

Von

ÖYSTEIN ORE

in Kristiania.

Inhalt.

Einleitung.

Es soll in dieser Arbeit eine Methode zur Bestimmung der Primideale in algebraischen Körpern gegeben werden, welche eine weitere Ausführung der Gedanken ist, die ich in meinem Vortrage: »Über die Bestimmung der Primideale in algebraischen Körpern» 5. skand. Matematikerkongress, Helsingfors 1922 skizziert habe.

Die Dedekindsche Bestimmung der Primideale mittels höherer Kongruenzen versagt bekanntlich in dem Falle, wo die vorgelegte Primzahl ein ausserwesentlicher Teiler der Gattungsdiskriminante ist. Es wird hier gezeigt, wie man diese Dedekindschen Untersuchungen so weiterführen kann, dass man in jedem Falle, auch für gemeinsame ausserwesentliche Diskriminantenteiler eines Körpers, die Primidealzerlegung bestimmen kann. Zu diesem Zwecke werden die Newtonschen Polygone angewandt, und es ist von Interesse, dass eine gewisse Analogie mit der Bestimmung der Reihenentwickelungen einer algebraischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle besteht.

Diese Methode hat weiter den Vorteil, dass man direkt aus der vorgelegten Gleichung die Primidealzerlegung bestimmen kann, ohne dass die Aufstellung einer Basis notwendig ist. Ausserdem geben die Untersuchungen eine Reihe von anderen algebraischen Sätzen über höhere Kongruenzen, Verallgemeinerung der Dumas'schen Irreduzibilitätsuntersuchungen usw. Auf andere Fragen, die durch diese Methoden behandelt werden können, u. a. die Bestimmung der Körperdiskriminante, werde ich in einer anderen Arbeit zurückkommen.

Für das Interesse und die Hilfe während der Ausarbeitung dieser Abhandlung fühle ich mich verpflichtet, Herrn Professor Mittag-Leffler meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Kap. I. Höhere Kongruenzen.

§ 1. Einleitende Sätze.

Im Folgenden soll p eine rationale Primzahl und $\varphi(x)$ eine Primfunktion m^{ten} Grades für den Modul p bedeuten, und es soll weiter angenommen werden, dass der Koeffizient von x^m in $\varphi(x)$ gleich 1 ist. Für den Doppelmodul $p, \varphi(x)$ (modd $p, \varphi(x)$) gibt es dann p^m inkongruente Polynome, indem unter Polynom immer eine ganze, rationale Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten verstanden wird.

Es sollen jetzt Funktionen von der Form

$$f(y) = A_0(x) \,.\, y^n + A_1(x) \,.\, y^{n-1} + \cdots + A_n(x) \tag{1}$$

untersucht werden, wo die Koeffizienten $A_i(x)$ Polynome sind. Diese Funktionen (1) sollen besonders in Bezug auf ihre Verhältnisse für den Doppelmodul $p, \varphi(x)$ untersucht werden, und wenn $f(y)$ und $f_1(y)$ zwei Funktionen dieser Art sind, soll

$$f(y) \equiv f_1(y) \pmod{p, \varphi(x)} \tag{2}$$

gesetzt werden, wenn die Differenz $f(y) - f_1(y)$ (mod p) durch $\varphi(x)$ teilbar ist. Man sieht einfach ein, dass die Kongruenz (2) dann und nur dann erfüllt ist, wenn die entsprechenden Koeffizienten der beiden Seiten einander (modd $p, \varphi(x)$) kongruent sind.

Es folgt nun ohne Schwierigkeiten für diese Kongruenzen die Richtigkeit der gewöhnlichen Rechenoperationen ganz analog wie für höhere Kongruenzen.

Für die späteren Anwendungen dieser Kongruenzen in der Theorie der algebraischen Zahlen brauche ich verschiedene Sätze, die hier entwickelt werden sollen.

Ich gehe erstens zur Aufstellung eines Euklidischen Algorithmus über und nehme an, dass zwei Funktionen gegeben sind

$$f_1(y) = A_0(x) \,.\, y^{n_1} + A_1(x) \,.\, y^{n_1-1} + \cdots + A_{n_1}(x),$$

$$f_2(y) = B_0(x) \,.\, y^{n_2} + B_1(x) \,.\, y^{n_2-1} + \cdots + B_{n_2}(x),$$

wo

$$n_1 \geqq n_2, \; A_0(x) \not\equiv 0, \; B_0(x) \not\equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)}.$$

Man kann dann immer ein $D_0(x)$ von höchstens $(m-1)^{\text{tem}}$ Grade derart bestimmen, dass

$$B_0(x) \cdot D_0(x) \equiv A_0(x) \pmod{p, \varphi(x)},$$

und man hat dann

$$f_1(y) \equiv D_0(x) \cdot y^{n_1-n_2} \cdot f_2(y) + R_1(y) \pmod{p, \varphi(x)},$$

wo

$$R_1(y) = C_0(x) \cdot y^{n_3} + C_1(x) \cdot y^{n_3-1} + \cdots + C_{n_3}(x)$$

und der Grad n_3 von $R_1(y)$ kleiner als n_1 ist. Daraus folgt weiter, wenn $D_1(x)$ so gewählt wird, dass

$$B_0(x) \cdot D_1(x) \equiv C_0(x) \pmod{p, \varphi(x)}$$

erfüllt ist,

$$R_1(y) \equiv D_1(x) \cdot y^{n_3-n_2} \cdot f_2(y) + R_2(y) \pmod{p, \varphi(x)},$$

wo der Grad von $R_2(y)$ kleiner als n_3 ist.

Wenn dieser Vorgang fortgesetzt wird, sieht man ein:

Man kann die Funktionen $q(y)$ und $f_3(y)$ derart bestimmen, dass

$$f_1(y) \equiv q(y) \cdot f_2(y) + f_3(y) \pmod{p, \varphi(x)}, \tag{3}$$

wo $q(y)$ vom Grade $n_1 - n_2$ und $f_3(y)$ höchstens vom Grade $n_2 - 1$ ist.

Wenn $B_0(x) = 1$ ist, hat man einfach

$$f_1(y) = q(y) \cdot f_2(y) + f_3(y).$$

Man definiert jetzt in gewöhnlicher Weise die *Teilbarkeit:* $f(y)$ ist durch $\psi(y)$ (modd $p, \varphi(x)$) teilbar, wenn

$$f(y) \equiv \psi_1(y) \cdot \psi(y) \pmod{p, \varphi(x)}$$

ist. Zwei Polynome $f_1(y)$ und $f_2(y)$ sind *relativ prim*, wenn sie (modd $p, \varphi(x)$) keinen gemeinsamen von y abhängigen Faktor besitzen.

Eine Funktion $f(y)$ von der Art (1) soll *primär* heissen wenn $A_0(x) = 1$ ist, und unter *Primfunktion* soll jede primäre Funktion verstanden werden, die ausser sich selbst keinen primären Teiler besitzt.

Aus (3) folgt jetzt eine Reihe von Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\equiv q_1 \cdot f_2 + f_3 \\ f_2 &\equiv q_2 \cdot f_3 + f_4 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_{\nu-2} &\equiv q_{\nu-2} \cdot f_{\nu-1} + f_\nu \end{aligned}\right\} \pmod{p, \varphi(x)}, \tag{4}$$

wo die Grade der Funktionen $f_i(y)$ immer abnehmen. Man kann daher immer annehmen, dass f_ν von y unabhängig ist. Es folgt daher aus (4) dass die notwendige und hinreichende Bedingung für einen gemeinsamen Faktor (modd $p, \varphi(x)$) für $f_1(y)$ und $f_2(y)$ durch

$$f_\nu(y) \equiv 0 \text{ (modd } p, \varphi(x))$$

ausgedrückt ist. Weiter folgt in der gewöhnlichen Weise:

Satz 1. Wenn $f_1(y)$ zu $f_2(y)$ relativ prim (modd $p, \varphi(x)$) ist, kann man solche Funktionen $A(y)$ und $B(y)$ bestimmen, dass

$$A(y) \cdot f_1(y) + B(y) \cdot f_2(y) \equiv 1 \text{ (modd } p, \varphi(x)). \tag{5}$$

Eine beliebige Funktion $f(y)$ kann nun in ein Produkt von Primfunktionen zerlegt werden, und aus dem Bestehen des Euklidischen Algorithmus schliesst man auch, dass diese Zerlegung eine eindeutige ist.

Weiter sieht man ein, dass

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = f'(y)$$

dann und nur dann mit $f(y)$ einen Faktor (modd $p, \varphi(x)$) gemeinsam hat, wenn $f(y)$ durch das Quadrat einer Primfunktion teilbar ist.

Zuletzt sei bemerkt, dass ein beliebiges Polynom $f(x)$ immer die Kongruenz

$$f(x)^{p^m} \equiv f(x) \text{ (modd } p, \varphi(x)) \tag{6}$$

erfüllt, was genau so bewiesen wird wie in der gewöhnlichen Zahlentheorie der Satz von *Fermat*.

§ 2. Produkt der Primfunktionen.

Sei

$$\psi(y) = y^n + A_1(x) \cdot y^{n-1} + \cdots + A_n(x)$$

eine gegebene Primfunktion (modd $p, \varphi(x)$). Es sollen jetzt Funktionen $f(y)$ von der Art (1) untersucht werden, aber jetzt für einen dreifachen Modul (modd $p, \varphi(x), \psi(y)$), und zwar soll

$$f_1(y) \equiv f_2(y) \text{ (modd } p, \varphi(x), \psi(y))$$

gesetzt werden, wenn die Differenz $f_1(y) - f_2(y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch die Primfunktion $\psi(y)$ teilbar ist.

Alle Funktionen, welche (modd p, $\varphi(x)$, $\psi(y)$) (oder kürzer (modd M)) inkongruent sind, sind in der Form

$$B_1(x) \cdot y^{n-1} + B_2(x) \cdot y^{n-2} + \cdots + B_n(x) \tag{7}$$

enthalten, wo die Koeffizienten unabhängig von einander alle (modd p, $\varphi(x)$) inkongruenten Werte annehmen. Nach § 1 gibt es daher $p^{n \cdot m}$ inkongruente Funktionen (modd M).

Sei jetzt $f(y) \not\equiv 0$ (modd M) ein bestimmter der Reste (7). Wenn dann $f_i(y) \not\equiv 0$ (modd M) einen beliebigen dieser Reste bedeutet, so ist

$$f(y) \cdot f_i(y) \equiv F_i(y) \pmod{M}, \tag{8}$$

wo $F_i(y)$ wieder einer der Reste (7) ist. Wenn $f_i(y)$ und $f_j(y)$ zwei solche Reste sind, so ist nur dann

$$F_i(y) \equiv F_j(y) \pmod{M},$$

wenn

$$f_i(y) \equiv f_j(y) \pmod{M}.$$

Daraus folgt aus (8), wenn $f_i(y)$ alle Reste (7) durchläuft und diese Kongruenzen alle mit einander multipliziert werden,

$$f(y)^{p^{n \cdot m}-1} \cdot \Pi f_i(y) \equiv \Pi f_i(y) \pmod{M}$$

und daraus einfach

$$f(y)^{p^{n \cdot m}-1} \equiv 1 \pmod{M}.$$

Es ist daher bewiesen:

Es ist für alle Funktionen $f(y)$

$$f(y)^{p^{n \cdot m}} \equiv f(y) \;(\text{modd } p, \varphi(x), \psi(y)). \tag{9}$$

Weiter folgt, dass eine Kongruenz

$$F(z) \equiv 0 \;(\text{modd } p, \varphi(x), \psi(y)),$$

wo die Koeffizienten alle von der Form (7) sind, höchstens n Wurzeln besitzen kann, wenn n den Grad von $F(z)$ in z angibt.

Nach (6) ist auch immer

$$f(y)^{p^m} \equiv f(y^{p^m}) \;(\text{modd } p, \varphi(x))$$

oder allgemeiner

$$f(y)^{p^{h \cdot m}} \equiv f(y^{p^{h \cdot m}}) \;(\text{modd } p, \varphi(x)). \tag{10}$$

Nach diesen Vorbereitungen soll jetzt der wichtige Satz bewiesen werden:

Satz 2. Es ist

$$f(y) = y^{p^{n\cdot m}} - y$$

kongruent (modd $p, \varphi(x)$) dem Produkt aller Primfunktionen $\psi(y)$ (modd $p, \varphi(x)$), deren Grade Teiler von n sind.[1]

Der Beweis wird in der folgenden Weise erbracht:

1) $f(y)$ besitzt (modd $p, \varphi(x)$) keine mehrfachen Faktoren. Es ist nämlich $f'(y) \equiv -1$ (modd $p, \varphi(x)$).

2) Es ist $f(y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch alle Primfunktionen teilbar, deren Grade Teiler von n sind.

Aus (9) folgt nämlich

$$y^{p^{n\cdot m}} - y \equiv 0 \text{ (modd } p, \varphi(x), \psi(y))$$

für alle Primfunktionen $\psi(y)$ vom Grade n. Wenn aber der Grad n' von $\psi(y)$ ein Teiler von n ist, so folgt nach (9)

$$y^{p^{n'\cdot m}} \equiv y \text{ (modd } p, \varphi(x), \psi(y)),$$

und wenn man diese Kongruenz nacheinander in die Potenzen

$$p^{n'\cdot m},\; p^{2n'\cdot m},\; \ldots\; p^{n\cdot m}$$

erhebt, so kommt

$$y \quad y^{p^{n'\cdot m}} \equiv y^{p^{2n'\cdot m}} \equiv \cdots \equiv y^{p^{n\cdot m}} \text{ (modd } M)$$

oder

$$y^{p^{n\cdot m}} - y \equiv 0 \text{ (modd } p, \varphi(x), \psi(y)).$$

3) $f(y)$ kann durch keine Primfunktion von höherem Grade als n (modd $p, \varphi(x)$) teilbar sein. Denn sei $\psi(y)$ eine Primfunktion vom Grade $n' > n$, wofür

$$y^{p^{n\cdot m}} - y \equiv 0 \text{ (modd } p, \varphi(y), \psi(y))$$

wäre. Dann kommt für jede Funktion $f(y)$ nach (10)

$$f(y)^{p^{n\cdot m}} \equiv f(y^{p^{n\cdot m}}) \text{ (modd } p, \varphi(x), \psi(y)),$$

[1] Dieser Satz ist für $n = 1$ schon von DEDEKIND, Crelles Journ. 54, p. 13, bewiesen worden.

und die Kongruenz

$$z^{p^{n \cdot m}} - z \equiv 0 \pmod{p, \varphi(x), \psi(y)}$$

hätte $p^{n' \cdot m} > p^{n \cdot m}$ Wurzeln, was unmöglich ist.

4) Wenn $\psi(y)$ ein Teiler von $f(y)$ ist, so ist der Grad von $\psi(y)$ ein Teiler von n. Denn wäre $n = n' \cdot q + r$, wo $n' > r > 0$ ist, so hat man gleichzeitig

$$y^{p^{n' \cdot m}} \equiv y, \quad y^{p^{n \cdot m}} \equiv y \pmod{p, \varphi(x), \psi(y)},$$

und daraus folgt leicht

$$y^{p^{r \cdot m}} - y \equiv 0 \pmod{p, \varphi(x), \psi(y)},$$

was nach 3) unmöglich ist.

Durch Zusammenfassen von 1) bis 4) ist der Satz bewiesen.

Kap. 2. Entwickelungen für Polynome.

§ 1. Kongruenzen (mod p^a).

Sei wie früher p eine rationale Primzahl und $\varphi(x)$ eine Primfunktion (mod p), worin der höchste Koeffizient gleich 1 vorausgesetzt wird. Weiter soll

$$f(x) = x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{1}$$

ein gegebenes Polynom bezeichnen. Aus $f(x)$ soll später durch die Gleichung $f(\vartheta) = 0$ ein algebraischer Körper abgeleitet werden, indem $f(x)$ irreduzibel vorausgesetzt wird. Vorläufig soll aber die Irreduzibilität von $f(x)$ nicht vorausgesetzt werden.

Weiter soll

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_r(x)$$

die verschiedenen Primfunktionen bezeichnen, die (mod p) in $f(x)$ aufgehen, wo

$$\varphi_i(x) = x^{m_i} + b_1^{(i)} \cdot x^{m_i - 1} + \cdots + b_{m_i}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots r).$$

Man kann dann immer $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \varphi_1(x)^{e_1} \cdot \varphi_2(x)^{e_2} \ldots \varphi_r(x)^{e_r} + p \cdot M(x) \tag{2}$$

darstellen, wo

$$m_1 \,.\, e_1 + m_2 \,.\, e_2 + \cdots + m_r \,.\, e_r = n$$

und $M(x)$ ein Polynom von höchstens $(n-1)^{\text{tem}}$ Grade ist.

Wir untersuchen jetzt das Polynom (1) für einen Primzahlpotenzmodul p^a. Nach einem Satze, der schon von Schönemann[1] aufgestellt worden ist, kann man aus (2) für alle α eine Darstellung

$$f(x) = \Phi_1^{(\alpha)}(x) \,.\, \Phi_2^{(\alpha)}(x) \ldots \Phi_r^{(\alpha)}(x) + p^\alpha M^{(\alpha)}(x) \tag{3}$$

herleiten, wo

$$\Phi_i^{(\alpha)}(x) \equiv \varphi_i(x)^{e_i} \pmod{p} \quad \begin{array}{l}(i = 1, 2, \ldots r) \\ (\alpha = 1, 2, \ldots .),\end{array}$$

und diese Darstellung von $\Phi_i^{(\alpha)}(x)$ ist ausserdem für den Modul p^α eindeutig. Wie man am einfachsten diese Darstellung findet, habe ich in der Arbeit: »Zur Theorie der algebraischen Gleichungen»[2] gezeigt.

§ 2. Entwickelungen $(p, \varphi(x))$.

Es soll jetzt der Begriff *Entwickelung* $(p, \varphi(x))$ eingeführt werden. Die Primfunktion $\varphi(x)$ soll (mod p) ein Teiler von $f(x)$ sein.

Durch fortgesetzte Divisionen mit Potenzen von $\varphi(x)$ kann man immer das Polynom (1) in der Form

$$f(x) = \sum_{i=0}^{t} Q_i(x) \,.\, \varphi(x)^i$$

schreiben, wo

$$t = \left[\frac{n}{m}\right]$$

und die $Q_i(x)$ Polynome von höchstens $(m-1)^{\text{tem}}$ Grade bezeichnen. Allgemein kann man nun weiter

$$Q_i(x) = A_i \,.\, p^{\alpha_i} \,.\, P_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots t)$$

setzen, wo die Zahl $A_i \,.\, p^{\alpha_i}$ derart gewählt wird, dass $P_i(x)$ primitiv wird (wenn $P_i(x) \neq 0$), und α_i derart, dass

$$A_i \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

[1] Schoenemann, Crelles Journ. 32, S. 98.

[2] Kristiania Videnskapsselskaps skrifter 1923, No. 1.

Speziell ist $\alpha_t = 0$ und $A_t = 1$. Man hat dann eine Entwickelung $(p, \varphi(x))$ in der Darstellung

$$f(x) = \sum_{i=0}^{t} A_i \; P_i(x) \, . \, p^{\alpha_i} \, . \, \varphi(x)^i . \tag{4}$$

Im Folgenden sollen als geometrisches Hilfsmittel die *Newton*'schen Polygone eingeführt werden.[1] In ein rechtwinkliges Koordinatensystem werden die Punkte

$$(t - i, \alpha_i) \quad (i = 0, 1, \ldots t)$$

eingezeichnet, und es entspricht einem jeden Gliede in (4) ein solcher Punkt. Wenn in (4) ein Glied $p^{\alpha_i} . A_i . P_i(x)$ verschwindet, wird kein zugehöriger Punkt eingezeichnet.

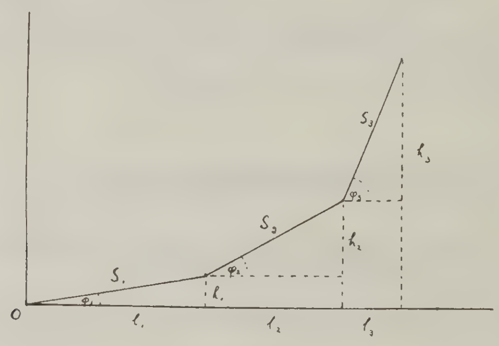


Fig. 1.

Man erhält auf diese Weise eine Gitterpunktmenge, wozu immer der Punkt (0, 0) gehört, und zu dieser Punktmenge kann man, indem man in (0, 0) anfängt, ein Newton'sches Polygon konstruieren. Für dieses Polygon wende ich im Folgenden die nachstehenden Bezeichnungen an:

Das Polygon wird aus einer gewissen Anzahl von Seiten

$$S_1, S_2, \ldots S_r$$

bestehen, deren Projektionen auf die X-achse die Längen

$$l_1, l_2, \ldots l_r,$$

auf die Y-achse die Längen

$$h_1, h_2, \ldots h_r$$

[1] Man sehe z. B. Hensel u. Landsberg: Theorie der alg. Funktionen. Vierte Vorlesung.

haben. Die Zahlen l_i und h_i sind immer ganz rational. e_i sei der grösste gemeinsame Faktor von l_i und h_i, also

$$\begin{matrix} l_i = e_i \,.\, \lambda_i \\ h_i = e_i \,.\, \varkappa_i \end{matrix} \quad (i = 1, 2, \ldots r),$$

wo λ_i zu $\varkappa_i$ relativ prim ist. Möglicherweise kann $h_1 = 0$ sein, dann wird $\lambda_1 = 1$ gesetzt. Zuletzt sei erwähnt, dass die Neigung φ_i einer Seite S_i gegen die X-achse durch

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{h_i}{l_i} = \frac{\varkappa_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \ldots r)$$

bestimmt ist.

§ 3. Irreduzibilitätssätze.

Wie ich gezeigt habe[1], kann man nun den wichtigen Satz beweisen:

Satz 3. Sind

$$g(x) = \sum_{i=0}^{s'} a'_i \,.\, Q'_i(x) \,.\, p^{a'_i} \,.\, \varphi(x)^i$$

$$h(x) = \sum_{i=0}^{s''} a''_i \,.\, Q''_i(x) \,.\, p^{a''_i} \,.\, \varphi(x)^i$$

zwei Polynome mit den Polygonen S' und S'' für die Entwickelungen $(p, \varphi(x))$, dann hat das Produkt

$$f(x) = g(x) \,.\, h(x) = \sum_{i=1}^{s} a_i \,.\, Q_i(x) \,.\, p^{a_i} \,.\, \varphi(x)^i \qquad s = s' + s''$$

ein Polygon $S(p, \varphi(x))$, das aus den Seiten von S' und S'' nach steigender Neigung zusammengesetzt ist.

Dabei ist zu bemerken, dass der Grad von $Q'_{s'}(x) \,.\, Q''_{s''}(x)$ auch grösser oder gleich m sein kann. In diesem Falle ist $s = s' + s'' + 1$, aber der Satz 3 bleibt doch richtig, indem man nur zu dem zusammengesetzten Polygone die Gerade von $(0, 0)$ bis $(1, 0)$ hinzufügt.

Für die folgenden Untersuchungen wird der Teil des Polygones von $f(x)$ von besonderer Bedeutung welcher über der X-achse liegt. Dieser Teil soll *Hauptpolygon* genannt und seine Seiten sollen wie früher mit $S_1, S_2, \ldots S_r$ bezeichnet werden.

---

[1] Kri:a Videnskapsselskaps Skr. 1923. No. 1. S. 27. Man sehe auch meine Arbeit: Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien. Zeitschrift f. Math. 1923.

Sei jetzt $f(x)$ von der Form

$$f(x) \equiv Q(x) \,.\, \varphi(x)^l \pmod{p},$$

wo $Q(x) \pmod{p}$ nicht durch $\varphi(x)$ teilbar ist. Man kann dann immer für die Primzahlpotenz p^a solche Polynome $Q_a(x)$ und $\Phi_a(x)$ bestimmen, dass

$$f(x) \equiv Q_a(x) \,.\, \Phi_a(x) \pmod{p^a}$$

wird, also

$$f(x) = Q_a(x) \,.\, \Phi_a(x) + p^a \,.\, M(x), \tag{5}$$

wo $M(x)$ ein Polynom von höchstens $(n-1)^{\text{tem}}$ Grade ist und

$$\Phi_a(x) \equiv \varphi(x)^l \pmod{p}.$$

Wenn jetzt (4) die Entwickelung $(p, \varphi(x))$ für $f(x)$ ist, so wird das Polygon von $f(x)$ seinen Endpunkt im Punkte (t, α_0) haben. Man sieht daher: Wenn man in (5) $\alpha > \alpha_0$ wählt, so wird das Glied $p^a \,.\, M(x)$ ohne Bedeutung für das Polygon von $f(x)\,(p, \varphi(x))$. Das Polygon von $Q_a(x)$ wird aus einer Geraden bestehen, welche mit der X-achse zusammenfällt, und das Polygon von $\Phi_a(x)$ wird daher nach Satz 3 aus dem Hauptpolygone von $f(x)$ bestehen.

Daraus folgt ganz einfach wegen des Satzes 3[1]:

Satz 4. Ein Polynom $f(x) \equiv Q(x) \,.\, \varphi(x)^l \pmod{p}$ kann nur dann im rationalen Gebiete einen Faktor

$$g(x) \equiv \varphi(x)^i \pmod{p}$$

haben, wenn $g(x)$ vom Grade

$$q = m \,.\, \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \,.\, \lambda_i$$

ist, wo m der Grad von $\varphi(x)$ ist und ε_i eine der Zahlen $0, 1, \ldots e_i$ bedeutet.

Aus diesem Satze leitet man ohne Schwierigkeiten die Irreduzibilitätssätze von KÖNIGSBERGER[2], PERRON[3], DUMAS[4] und BAUER[5] ab.

Es ist jetzt von der grössten Wichtigkeit, dass diese Sätze auch für einen beliebigen algebraischen Körper richtig bleiben. Dann müssen also die Koeffi-

---

[1] Loc. cit. S. 29.

[2] KÖNIGSBERGER, Crelles Journ. 115, S. 69.

[3] O. PERRON, Math. Ann. 60, S. 448 u. f.

[4] DUMAS, Journal de math. 6$^{\text{ser.}}$ t. 2, S. 237.

[5] M. BAUER, Crelles Journ. 128, S. 87.

zienten von $f(x)$ in irgend einem Körper $P(\vartheta)$ enthalten sein und $\varphi(x)$ muss eine Primfunktion für einen Primidealmodul $\mathfrak{p}$ in $P(\vartheta)$ sein. Dann kann man aber nicht in der Entwickelung $(\mathfrak{p}, \varphi(x))$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{t} Q_i(x) \,.\, \varphi(x)^i$$

aus $Q_i(x)$ wie in (4) den Faktor $\mathfrak{p}^{a_i}$ herausziehen, sondern nur $\mathfrak{p}^{a_i}$ als die grösste den Koeffizienten von $Q_i(x)$ gemeinsame Potenz von $\mathfrak{p}$ bezeichnen. Der Satz 3 bleibt jedoch richtig, und daraus folgt sofort die Richtigkeit des Satzes 4 für den Körper $P(\vartheta)$.

§ 4. Zerlegung in Faktoren für ein Polygon.

Da für die Anwendung dieser Untersuchungen nur Kongruenzen für einen Primzahlpotenzmodul p^a in Betracht kommen, wo α beliebig gross gewählt werden kann, werde ich jetzt nach den Bemerkungen der Paragraphen 1 und 3 annehmen können, dass $f(x)$ (mod p) nur durch eine Primfunktion teilbar ist. Es ist also

$$f(x) \equiv \varphi(x)^t, \tag{6}$$

wo

$$n = m \,.\, t$$

ist. Das Polygon S von $f(x)$ ist dann immer ein Hauptpolygon. Wenn man jetzt für $f(x)$ eine Entwickelung $(p, \varphi(x))$ hat, so gibt es in dieser Entwickelung gewisse Glieder, deren entsprechende Punkte auf dem Polygone S liegen. Dies ist besonders für die Eckpunkte des Polygons der Fall.

Es sei jetzt $\psi(x)$ ein Polynom mit demselben Polygone $S(p, \varphi(x))$ wie $f(x)$. *Durch*

$$f(x) \equiv \psi(x) \pmod{S}$$

wird bezeichnet, dass in der Differenz $f(x) - \psi(x)$ alle repräsentierenden Punkte oberhalb des Polygones S liegen.

Man setze jetzt in der Entwickelung (4)

$$A_i \,.\, P_i(x) = Q_i(x),$$

wodurch die Entwickelung $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ in

$$f(x) = \sum_0^t Q_i(x) \,.\, p^{\alpha_i} \,.\, \varphi(x)^i \tag{7}$$

übergeht, wo in einem Polynom $Q_i(x)$ nicht alle Koeffizienten durch p teilbar sein können, ausser wenn $Q_i(x)$ verschwindet. Sei

$$\psi(x) = \sum_0^t Q'_i(x) \,.\, p^{\alpha'_i} \,.\, \varphi(x)^i \tag{8}$$

die entsprechende Entwickelung für $\psi(x)$. Dann sieht man ein:

Es ist $f(x) \equiv \psi(x)$ (mod S) dann und nur dann, wenn

$$Q_i(x) \equiv Q'_i(x) \pmod{p}$$

für alle i, wofür die entsprechenden Punkte $(t-i, \alpha_i)$ $(\alpha'_i = \alpha_i)$ auf S liegen. Wenn in $f(x)$ ein Glied oberhalb S liegt, muss dies natürlich auch mit dem entsprechenden Gliede in $\psi(x)$ der Fall sein. (Ich sage hier der Kürze wegen, dass ein Glied oberhalb S liegt, und meine damit, dass der repräsentierende Punkt dieses Gliedes oberhalb S liegt. Diese Bezeichnungsweise kann kaum missverstanden werden und wird im Folgenden oft angewandt.)

Es ist bisweilen nützlich, den Begriff Entwickelung $(p, \varphi(x))$ etwas weiter zu fassen. Es soll jetzt allgemeiner angenommen werden, dass in (8) die Grade der Polynome $Q'_i(x)$ nicht durch $m - 1$ begrenzt sind, d. h. diese Grade dürfen auch grösser als $m - 1$ sein, doch sollen sie in der Weise begrenzt sein, dass der Grad von $\psi(x)$ nicht grösser als $m \,.\, t$ wird. Man sieht leicht ein, dass das Polygon $(p, \varphi(x))$ dasselbe wird, wenn man das Polygon für diese allgemeine Form konstruiert oder wenn man vorher die Entwickelung zur reduzierten Form überführt.

Nehmen wir die Entwickelung (8) von der hier erwähnten allgemeineren Art an, so folgt:

Es ist $f(x) \equiv \psi(x)$ (mod S) dann und nur dann, wenn

$$Q_i(x) \equiv Q'_i(x) \ (\text{modd } p, \varphi(x))$$

für alle i, wofür die entsprechenden Punkte $(t-i, \alpha_i)$ $(\alpha_i = \alpha'_i)$ auf S liegen.

Es soll jetzt untersucht werden, welche Glieder überhaupt auf S liegen können. Ich betrachte die erste Seite S_1 von S. Die Gitterpunkte, welche auf dieser Geraden liegen, entsprechen den Gliedern von (7)

$$\varphi(x)^t,\ Q_{\lambda_1}(x) \,.\, p^{\varkappa_1} \,.\, \varphi(x)^{t-\lambda_1},\ Q_{2\lambda_1}(x) \,.\, p^{2\varkappa_1} \,.\, \varphi(t)^{t-2\lambda_1}, \ldots Q_{l_1}(x) \,.\, p^{h_1} \,.\, \varphi(x)^{t-l_1}.$$

Ebenso sind die Glieder der zweiten Seite entsprechend

$$Q_{l_1}(x) \cdot p^{h_1} \cdot \varphi(x)^{t-l_1},\ Q_{l_1+\lambda_2}(x) \cdot p^{h_1+\varkappa_2} \cdot \varphi(x)^{t-l_1-\lambda_2},\ Q_{l_1+2\lambda_2}(x) \cdot p^{h_1+2\varkappa_2} \cdot \varphi(x)^{t-l_1-2\lambda_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_{l_1+l_2}(x) \cdot p^{h_1+h_2} \cdot \varphi(x)^{t-l_1-l_2}$$

und allgemein für die i^{te} Seite

$$\left.\begin{array}{l} Q_{l_1+l_2+\cdots+l_{i-1}}(x) \cdot p^{h_1+h_2+\cdots+h_{i-1}} \cdot \varphi(x)^{t-l_1-l_2-\cdots-l_{i-1}}, \\ Q_{l_1+l_2+\cdots+l_{i-1}+\lambda_i}(x) \cdot p^{h_1+h_2+\cdots+h_{i-1}+\varkappa_i} \cdot \varphi(x)^{t-l_1-l_2-\cdots-l_{i-1}-\lambda_i}, \\ Q_{l_1+l_2+\cdots+l_{i-1}+2\lambda_i}(x) \cdot p^{h_1+h_2+\cdots h_{i-1}+2\varkappa_i} \cdot \varphi(x)^{t-l_1-l_2-\cdots-l_{i-1}-2\lambda_i}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{l_1+l_2+\cdots+l_{i-1}+l_i}(x) \cdot p^{h_1+h_2+\cdots+h_{i-1}+h_i} \cdot \varphi(x)^{t-l_1-l_2-\cdots-l_{i-1}-l_i}. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Sei jetzt $\psi_i(x)$ die Summe der Glieder (9), also

$$\psi_i(x) = p^{h_1+h_2+\cdots+h_{i-1}} \cdot \varphi(x)^{t-l_1-l_2-\cdots-l_i}(Q_{l_1+l_2+\cdots+l_{i-1}}(x) \cdot \varphi(x)^{l_i} +$$
$$+ Q_{l_1+\cdots+l_{i-1}+\lambda_i}(x) \cdot p^{\varkappa_i} \cdot \varphi(x)^{l_i-\lambda_i} + Q_{l_1+\cdots+l_{i-1}+2\lambda_i}(x) \cdot p^{2\varkappa_i} \cdot \varphi(x)^{l_i-2\lambda_i} + \cdots +$$
$$+ Q_{l_1+\cdots+l_{i-1}+l_i}(x) \cdot p^{h_i}).$$

Zur Abkürzung soll jetzt

$$Q_{l_1+l_2+\cdots+l_{i-1}+s\cdot\lambda_i}(x) = R_{i,s}(x)$$

gesetzt werden, wo also $R_{i,s}(x)$ entweder Null ist oder alle Koeffizienten nicht durch p teilbar sind. Dann kommt

$$\psi_i(x) = p^{h_1+h_2+\cdots+h_{i-1}} \cdot \varphi(x)^{t-l_1-l_2-\cdots-l_i} \cdot \varphi_i(x),$$

wo

$$\varphi_i(x) = R_{i,0}(x) \cdot \varphi(x)^{l_i} + R_{i,1}(x) \cdot p^{\varkappa_i} \cdot \varphi(x)^{l_i-\lambda_i} + R_{i,2}(x) \cdot p^{2\varkappa_i} \cdot \varphi(x)^{l_i-2\lambda_i} +$$
$$+ \cdots + R_{i,e_i}(x) \cdot p^{h_i}.$$

Nun ist allgemein

$$R_{i,e_i}(x) = R_{i+1,0}(x) \not\equiv 0 \ (\text{modd } p, \varphi(x)).$$

Man kann daher immer solche Polynome $A_i(x)$ und $B_i(x)$ finden, dass

$$R_{i,0}(x) \cdot A_i(x) + \varphi(x) \cdot B_i(x) = 1 + C_i \cdot p \tag{10}$$

ist, wo C_i eine Constante, $A_i(x)$ von höchstens $(m-1)^{\text{tem}}$ Grade, $B_i(x)$ höchstens vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade ist. Die Gleichung (10) kann auch

$$R_{i,0}(x) \,.\, A_i(x) \equiv 1 \pmod{p,\, \varphi(x)}$$

geschrieben werden.

Wenn jetzt

$$f_i(x) = \varphi(x)^{l_i} + S_{i,1}(x) \,.\, p^{\varkappa_i} \,.\, \varphi(x)^{l_i - \lambda_i} + S_{i,2}(x) \,.\, p^{2\varkappa_i} \,.\, \varphi(x)^{l_i - 2\lambda_i} + \cdots + S_{i,e_i}(x) \,.\, p^{h_i}$$

gesetzt wird, wo $S_{i,j}(x)$ Polynome von höchstens $(m-1)^{\text{tem}}$ Grade sind und ausserdem

$$S_{i,j}(x) \equiv A_i(x) \,.\, R_{i,j}(x) \pmod{p\,,\, \varphi(x)} \tag{11}$$

ist, so kann man den folgenden wichtigen Satz beweisen:

Satz 5. Es ist

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{r} f_i(x) \pmod{S}. \tag{12}$$

Ein Polynom soll *primär* genannt werden, wenn der Koeffizient für die höchste Potenz von $\varphi(x)$ in der Entwickelung $(p, \varphi(x))$ gleich 1 ist.

Nach (10) und (11) ist

$$S_{i,e_i}(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad (i = 1, 2, \ldots r),$$

und das Polygon von $f_i(x)$ ist daher eine Gerade von derselben Neigung und Länge wie S_i. Folglich wird auch nach Satz 3 das Polygon von

$$\prod_{i=1}^{r} f_i(x)$$

gleich S. *Der Satz 5 besagt daher, dass man $f(x)$ (mod S) in solche primäre Faktoren zerlegen kann, dass das Polygon eines Faktors $f_i(x)$ gleich einer Seite S_i von S ist.*

Da die beiden Seiten von (12) dasselbe Polygon S besitzen, kommt es, um die Richtigkeit dieser Kongruenz zu beweisen, nur darauf an zu zeigen dass die entsprechenden Glieder auf dem Polygone einander (modd $p, \varphi(x)$) gleich sind.

Der Satz soll jetzt durch vollständige Induktion bewiesen werden. Es wird daher erstens $r = 2$ angenommen, und man soll zeigen

$$\begin{aligned} f(x) \equiv f_1(x) \,.\, f_2(x) = (\varphi(x)^{l_1} + S_{1,1}(x) \,.\, p^{\varkappa_1} \varphi(x)^{l_1 - \lambda_1} + \cdots + S_{1,e_1}(x) \,.\, p^{h_1}) \,. \\ (\varphi(x)^{l_2} + S_{2,1}(x) \,.\, p^{\varkappa_2} \varphi(x)^{l_2 - \lambda_2} + \cdots + S_{2,e_2}(x) \,.\, p^{h_2}) \pmod{S}. \end{aligned} \tag{13}$$

Hier ist aber immer nach (11)

$$S_{1,i}(x) = Q_{i\lambda_1}(x),$$

so dass, wenn man in (13) die Multiplikation derart ausführt, dass man erstens $f_1(x)$ mit $\varphi(x)^{l_2}$ multipliziert, man alle Glieder von $f(x)$ erhält, deren repräsentierende Punkte auf der ersten Seite S_1 liegen.

Ein Glied

$$S_{1,i}(x) \,.\, p^{i\varkappa_1} \,.\, \varphi(x)^{l_1 - i\lambda_1}$$

in $f_1(x)$ wird durch einen Punkt $A_1 = (i\lambda_1, i\varkappa_1)$ abgebildet und ebenso ein Glied

$$S_{2,j}(x) \,.\, p^{j\varkappa_2} \,.\, \varphi(x)^{l_2 - j\,.\,\lambda_2}$$

in $f_2(x)$ durch einen Punkt $A_2 = (j\lambda_2, j\varkappa_2)$. Das Produkt dieser Glieder

$$S_{1,i}(x)\, S_{2,j}(x) \,.\, p^{i\varkappa_1 + j\varkappa_2} \,.\, \varphi(x)^{l_1 + l_2 - i\lambda_1 - j\lambda_2} \tag{14}$$

wird durch den Punkt

$$A = (i\lambda_1 + j\,.\,\lambda_2,\; i\varkappa_1 + j\,.\,\varkappa_2)$$

und noch dazu den Punkt

$$A' = (i\lambda_1 + j\lambda_2 - 1,\; i\varkappa_1 + j\varkappa_2)$$

abgebildet, wenn der Grad von

$$S_{1,i}(x) \,.\, S_{2,j}(x)$$

grösser als $m - 1$ ist. Wenn aber A auf oder über dem Polygone von $f(x)$ liegt, so wird sicher A' oberhalb dieses Polygones liegen. Man braucht daher nur das Glied zu untersuchen, dem A entspricht. Man kann aber A in der Weise aus A_1 und A_2 erhalten, dass man die Vektoren OA_1 und OA_2 addiert, und diese Regel ist für das Produkt zweier Glieder allgemein gültig.[1]

Ein Produkt (14) wird daher immer Glieder geben, deren repräsentierende Punkte über dem Polygone S von $f(x)$ liegen, ausser in dem Falle, dass $i = e_i$ ist. Die Glieder, welche auf der zweiten Seite S_2 liegen, werden also durch

$$S_{1,e_1}(x) \,.\, p^{h_1} \,.\, f_2(x)$$

erschöpft, da ja das Glied

$$S_{1,e_1}(x) \,.\, p^{h_1} \,.\, \varphi(x)^{l_2},$$

[1] Die genauere Ausführung dieser Bemerkungen findet man in meiner oben zitierten Abhandlung S. 25.

welchem der Eckpunkt des Polygones entspricht, schon einmal früher mitgerechnet worden ist. Es ist aber nach (11)

$$S_{1,e_1}(x) \,.\, S_{2,i}(x) \equiv A_2(x) \,.\, R_{2,i}(x) \,.\, S_{1,e_1}(x) \text{ (modd } p,\ \varphi(x)),$$

und daraus folgt

$$R_{2,i}(x) - S_{1,e_1}(x)\, S_{2,i}(x) \equiv R_{2,i}(x)\,(1 - A_2(x) \,.\, S_{1,e_1}(x)) \text{ (modd } p,\ \varphi(x)),$$

also nach (10) unter Berücksichtigung dessen, dass $S_{1,e_1}(x) = S_{2,0}(x)$,

$$R_{2,i}(x) \equiv S_{1,e_1}(x) \,.\, S_{2,i}(x) \text{ (modd } p,\ \varphi(x)),$$

wodurch der Beweis erledigt ist.

Um jetzt den Induktionsbeweis zu vollenden, muss man annehmen, es sei schon bewiesen worden, dass $f(x)$ und das Produkt

$$\prod_{i=1}^{r-1} f_i(x)$$

für die ersten $r-1$ Seiten S_i dieselben repräsentierenden Glieder besitzen. Man muss dann das Produkt

$$f_r(x) \,.\, \prod_{i=1}^{r-1} f_i(x)$$

untersuchen. In dem Produkte

$$\varphi(x)^{l_r} \,.\, \prod_{i=1}^{r-1} f_i(x)$$

kommen alle Glieder von $f(x)$ vor, welche auf den $r-1$ ersten Seiten liegen. Die Glieder, welche auf der r^{ten} Seite liegen, können nur durch die Glieder von

$$f_r(x) \,.\, p^{h_1+h_2+\cdots+h_{r-1}} \,.\, S_{r-1,e_{r-1}}(x)$$

geliefert werden, wo der letzte Eckpunkt schon früher mitgerechnet worden ist. Alle anderen Glieder des Produktes werden nach den früheren Bemerkungen sicher oberhalb S liegen.

Nach (11) ist aber

$$S_{r-1,e_{r-1}}(x) \,.\, S_{r,j}(x) \equiv A_r(x) \,.\, R_{r,j}(x) \,.\, S_{r-1,e_{r-1}}(x) \text{ (modd } p,\ \varphi(x)),$$

folglich

$$R_{r,j}(x) - S_{r-1,e_{r-1}}(x) \,.\, S_{r,j}(x) \equiv R_{r,j}(x)\,(1 - A_r(x)\,.\,S_{r-1,e_{r-1}}(x)) \pmod{p, \varphi(x)},$$

woraus nach (10) folgt

$$R_{r,j}(x) \equiv S_{r-1,e_{r-1}}(x)\,.\,S_{r,j}(x) \;(\mathrm{modd}\; p, \varphi(x).$$

Dadurch ist der Beweis des Satzes 5 vollständig geliefert worden.

Ohne Schwierigkeiten sieht man auch die Richtigkeit der folgenden, wichtigen Bemerkung ein:

Wenn man $f(x)$ nach Satz 5 in primäre Faktoren derart zerlegt, dass das Polygon eines Faktors gleich einer Seite des Polygones S ist, so sind die Koeffizienten der Faktoren (modd p, $\varphi(x)$) eindeutig bestimmt.

§ 5. Geradlinige Polygone.

Es soll jetzt der Fall behandelt werden, dass das Polygon $(p, \varphi(x))$ eine Gerade L ist. $f(x)$ kann dann immer in der Form

$$f(x) = \varphi(x)^l + A_1(x)\,.\,p^{\overline{\underline{\tfrac{h}{l}}}}\,.\,\varphi(x)^{l-1} + A_2(x)\,.\,p^{\overline{\underline{\tfrac{2h}{l}}}}\,.\,\varphi(x)^{l-2} + \cdots + A_l(x)\,.\,p^h \qquad (15)$$

angenommen werden, wo die $A_i(x)$ Polynome von höchstens $(m-1)^{\mathrm{tem}}$ Grade sind und

$$A_l(x) \not\equiv 0 \;(\mathrm{modd}\; p, \varphi(x)). \qquad (16)$$

Dabei bedeutet das Symbol $\overline{\underline{s}}$ für eine positive reelle Zahl s immer die kleinste positive Zahl, welche gleich oder grösser als s ist. Man kann auch Polynome mit mehrseitigem Polygone in der Form (15) schreiben, indem man nur für das Verhältnis $\frac{h}{l}$ die Neigungszahl $\frac{h_1}{l_1}$ der ersten Seite wählt. Dann braucht aber die Bedingung (16) nicht erfüllt zu sein. In (15) ist wie früher

$$h = e\,.\,\varkappa$$

$$l = e\,.\,\lambda$$

und daher

$$f(x) \equiv \varphi(x)^l + B_1(x)\,.\,p^{\varkappa}\,.\,\varphi(x)^{l-\lambda} + \cdots + B_l(x)\,.\,p^h \pmod{L}, \qquad (17)$$

wenn

$$A_{i.\lambda}(x) = B_i(x)$$

gesetzt wird.

$f(x)$ wird *reduzibel* (mod L) genannt, wenn eine Zerlegung

$$f(x) \equiv g(x) \,.\, h(x) \pmod{L}$$

möglich ist. Hier müssen nach Satz 3 $g(x)$ und $h(x)$ von der Form

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \equiv \varphi(x)^{r\cdot\lambda} + C_1(x)\,.\,p^{\varkappa}\,.\,\varphi(x)^{\lambda(r-1)} + \cdots + C_r(x)\,.\,p^{r\cdot\varkappa} \\ h(x) \equiv \varphi(x)^{s\cdot\lambda} + D_1(x)\,.\,p^{\varkappa}\,.\,\varphi(x)^{\lambda(s-1)} + \cdots + D_r(x)\,.\,p^{s\cdot\varkappa} \end{array}\right\} \pmod{L} \tag{18}$$

sein, wo $r + s = e$ ist.

Eine primäre Funktion, die ein geradliniges Polygon besitzt und noch dazu für dieses Polygon irreduzibel ist, soll eine *Primfunktion* (mod L) genannt werden. So ist z. B. $f(x)$ selbst immer eine Primfunktion (mod L), wenn $e = 1$, also l zu h relativ prim ist. Allgemein kann $f(x)$ (mod L) nicht durch mehr als e Primfunktionen teilbar sein. Für eine Funktion mit geradlinigem Polygone hat man also immer eine Darstellung von der Form

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{s} \varphi_i(x) \pmod{L},$$

wo die Polygone der Polynome $\varphi_i(x)$ Geraden sind, die aus Stücken von L bestehen, und diese Polynome sind für ihre geradlinigen Polygone Primfunktionen.

Dies gibt mit Satz 5:

Satz 6. Ein Polynom $f(x)$ mit einem beliebigen Polygone S kann in der Form

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s_i} \varphi_{i,j}(x) \pmod{S}$$

geschrieben werden, wo die Polynome $\varphi_{i,j}(x)$ für ihre geradlinigen Polygone Primfunktionen sind, und diese Polygone bilden zusammen das Polygon S.

Es soll jetzt die Eindeutigkeit dieser Zerlegung bewiesen werden, und dazu sollen die Untersuchungen des Kap. 1 angewandt werden.

Es seien wie in (18) $g(x)$ und $h(x)$ zwei beliebige Polynome mit einem geradlinigen Polygone von der Neigung $\frac{\varkappa}{\lambda}$. Wenn man dann

$$\frac{\varphi(x)^{\lambda}}{p^{\varkappa}} = z$$

setzt, geht (18) in

$$\left.\begin{aligned} g(x) &\equiv p^{r \cdot \varkappa}(z^r + C_1(x) \,.\, z^{r-1} + \cdots + C_r(x)) \\ h(x) &\equiv p^{s \cdot \varkappa}(z^s + D_1(x) \,.\, z^{s-1} + \cdots + D_s(x)) \end{aligned}\right\} \pmod{L}$$

über. Nun soll hier

$$\begin{aligned} G(z,\, x) &= z^r + C_1(x) \,.\, z^{r-1} + \cdots + C_r(x) \\ H(z,\, x) &= z^s + D_1(x) \,.\, z^{s-1} + \cdots + D_s(x) \end{aligned}$$

eingeführt werden; dann sieht man ein, dass eine Kongruenz

$$g(x) \equiv h(x) \pmod{L}$$

nichts anders als

$$G(z,\, x) \equiv H(z,\, x) \;(\text{modd } p,\, \varphi(x))$$

bedeutet, indem z als eine unabhängige Variable betrachtet wird. Die Theorie der Polynome mit geradlinigen Polygonen kann daher ganz analog wie die der Kongruenzen (modd p, $\varphi(x)$) entwickelt und ausserdem aus dieser abgeleitet werden. So folgt z. B.: Wenn $g(x)$ (mod L) in Primfunktionen zerlegt ist, entspringt daraus eine entsprechende Zerlegung (modd p, $\varphi(x)$) von $G(z, x)$. Daraus folgt aus Kap. 1 auch die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Polynoms für ein geradliniges Polygon.

Weiter kann man in dieser Weise die Sätze des Kap. 1 auf Kongruenzen (mod L) übertragen. So hat man z. B.

Satz 7. Wenn zwei primäre Polynome $g(x)$ und $h(x)$ mit demselben geradlinigen Polygone L gegeben sind, die von den Graden $r \,.\, \lambda$ und $s \,.\, \lambda$ in $\varphi(x)$ und (mod L) zu einander relativ prim sind, kann man immer solche Polynome $A(x)$ und $B(x)$ mit dem Polygone L bestimmen, dass

$$g(x) \,.\, A(x) + h(x) \,.\, B(x) \equiv p^{(r+a)\varkappa} \pmod{L},$$

wo $a \,.\, \lambda$ und $b \,.\, \lambda$ die Grade von $A(x)$ und $B(x)$ in $\varphi(x)$ bedeuten.

Hier ist natürlich $a + r = b + s$, und man kann ausserdem a und b derart wählen, dass $a < s$ und $b < r$. Wenn in diesem Satze gesagt wird, dass zwei Polynome dasselbe geradlinige Polygon L besitzen, so bedeutet dies hier wie im Folgenden, dass die Neigungen der beiden Polygone dieselben sind, aber die Längen brauchen nicht gleich zu sein, d. h. die Polynome brauchen nicht von gleichen Graden in $\varphi(x)$ zu sein.

Aus Satz 7 folgt weiter: Wenn ein Polynom $j(x)$ mit dem Polygone L und vom Grade $i \,.\, \lambda$ in $\varphi(x)$ gegeben ist, so kann man, wenn wie früher $g(x)$

zu $h(x)$ (mod L) relativ prim ist, zwei Polynome $A(x)$ und $B(x)$ derart bestimmen, dass

$$g(x) \,.\, A(x) + h(x) \,.\, B(x) \equiv p^{(r+a-i)\varkappa} \,.\, j(x) \pmod{L}$$

ist. Hier kann man den Grad $a \,.\, \lambda$ von $A(x)$ kleiner als $s \,.\, \lambda$ wählen, und wenn daher der Grad von $j(x)$ in $\varphi(x)$ kleiner als $(r+s)\lambda$ ist, so wird auch $b \,.\, \lambda < r \,.\, \lambda$.

Weiter kann man den Satz 2 in dieser Sprache folgendermassen formulieren:

Satz 8. Es ist

$$\varphi(x)^{\lambda \cdot p^{n \cdot m}} - p^{\varkappa(p^{n \cdot m}-1)} \,.\, \varphi(x)^{\lambda}$$

(mod L) kongruent dem Produkt aller Primfunktionen (mod L), deren Grade in $\varphi(x)^{\lambda}$ Teiler von n sind.

Zuletzt soll die folgende Erweiterung des Satzes 4 erwähnt werden, die sofort aus der Einführung der Primfunktionen mit Hilfe des Satzes 6 folgt. Es sollen für alle Primfunktionen $\varphi_i(x)$ (mod p), welche in $f(x)$ aufgehen, die zugehörigen Polygone S_i gezeichnet und es soll $f(x)$ (mod S_i) in Primfaktoren zerlegt werden. Seien

$$\lambda_i^{(j)} \,.\, n_{i,k}^{(j)} \quad (k = 1, 2, \ldots t_i^{(j)})$$

die Grade in $\varphi(x)$ der irreduziblen Faktoren für eine beliebige Seite $S_i^{(j)}$ von S_i mit der Neigung

$$\frac{h_i^{(j)}}{l_i^{(j)}} = \frac{e_i^{(j)} \,.\, \varkappa_i^{(j)}}{e_i^{(j)} \,.\, \lambda_i^{(j)}} = \frac{\varkappa_i^{(j)}}{\lambda_i^{(j)}}.$$

$t_i^{(j)}$ bedeutet die Anzahl der irreduziblen Faktoren für diese Seite, also die Anzahl der Zahlen $n_{i,k}^{(j)}$, indem man, wenn (mod $S_i^{(j)}$) gleiche Faktoren vorkommen, die entsprechenden Grade $n_{i,k}^{(j)}$ so oft vorkommen lässt, wie die Multiplizität angibt.

Dann folgt die Richtigkeit des Satzes:

Satz 9. Ist für ein beliebiges Polynom

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{e_1} \,.\, \varphi_2(x)^{e_2} \ldots \varphi_s(x)^{e_s} \pmod{p}$$

die Zerlegung in Primfaktoren, wo der Grad der Primfunktion $\varphi_i(x)$ gleich m_i ist, so kann $f(x)$ im rationalen Bereiche nur dann einen Faktor vom Grade m haben, wenn m von der Form

$$m = \sum m_i \,.\, \lambda_i^{(j)} \,.\, n_{i,k}^{(j)}$$

ist, wo in dieser Summe eine beliebige Anzahl von Glieder mitgerechnet werden darf.

Wenn daher ein oder mehrere Diskriminantenteiler oder allgemeiner die Diskriminante des Polynoms bekannt ist, kann man nach diesem Satze in vielen Fällen die Untersuchung der Reduzibilität des Polynoms sehr vereinfachen.

§ 6. **Reduzibilität für Polygonmoduln.**

Den Primfunktionen für Polygonmoduln, welche in § 5 definiert worden sind, entsprechen genau die Primfunktionen für einen Primzahlmodul p. Es sollen jetzt einige Untersuchungen über Polygonmoduln ausgeführt werden, welche für die späteren Untersuchungen über Primideale in algebraischen Körper notwendig sind und gleichzeitig sehr interessante Sätze über höhere Kongruenzen ergeben.

Es soll erstens angenommen werden, dass $f(x)$ ein geradliniges Polygon L besitzt und daher die Form (15) hat. Nennen wir in (17) die rechte Seite $\psi(x)$, so wird die Differenz $f(x)-\psi(x)$ nur solche Glieder enthalten, wofür die repräsentierenden Punkte oberhalb L liegen. Es soll jetzt untersucht werden, wie solche Glieder oberhalb L überhaupt verteilt sein können.

Ein Glied

$$A_i(x)\,.\,p^{\boxed{i\frac{h}{l}}}\,.\,\varphi(x)^{l-i}$$

in (15) wird durch den Punkt

$$\left(i,\ \boxed{i\frac{h}{l}}\right)\quad (i=0,1,\ldots l)$$

abgebildet, und es sollen nun die Abstände dieser Punkte von L oder die damit proportionalen Grössen

$$d_i=\boxed{i\,.\,\frac{h}{l}}-i\,.\,\frac{h}{l}=\boxed{\frac{i\varkappa}{\lambda}}-i\frac{\varkappa}{\lambda}\quad (i=1,2,\ldots l)\,. \tag{19}$$

untersucht werden.

Für diese Grössen soll jetzt gezeigt werden, dass immer

$$d_i=d_{i+\lambda}=d_{i+2\lambda}=\cdots$$

ist. Man hat nämlich

$$d_i-d_{i+\lambda}=\boxed{\frac{i\varkappa}{\lambda}}-\boxed{\frac{(i+\lambda)\varkappa}{\lambda}}-\frac{i\varkappa}{\lambda}+(i+\lambda)\frac{\varkappa}{\lambda}$$

oder

$$d_i-d_{i+\lambda}=\boxed{\frac{i\varkappa}{\lambda}}-\boxed{\frac{i\varkappa}{\lambda}+\varkappa}+\varkappa=0.$$

Um daher die Zahlen (19) zu untersuchen, braucht man nur die Zahlen

$$d_0 = 0,\ d_1, d_2, \ldots d_{\lambda-1},\ d_\lambda = 0$$

zu bestimmen. Diese Zahlen sind nach (19) sicher kleiner als 1. Bei der Bestimmung ihrer Grösse braucht man daher nur auf die darin vorkommenden Brüche Rücksicht zu nehmen. Wenn aber in (19) i die Zahlen $1, 2, \ldots \lambda$ durchläuft, werden auch die Zahlen $i \cdot \varkappa$ ein vollständiges Restsystem (mod λ) bilden. Die echten Brüche, welche sich als Reste ergeben, wenn man $i \cdot \varkappa$ durch λ dividiert, sind daher alle verschieden, und folglich ist bewiesen:

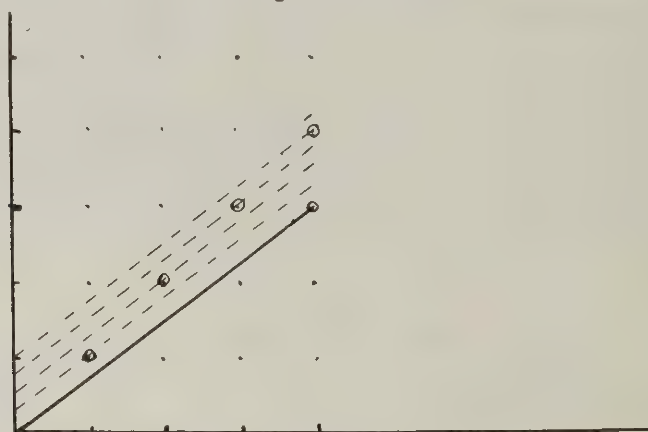


Fig. 2.

Die Zahlen $d_1, d_2, \ldots d_{\lambda-1}$ stimmen mit den Zahlen

$$\frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}, \ldots \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

in irgendeiner Reihenfolge überein.

Durch die Punkte der Y-achse

$$\left(0, \frac{1}{\lambda}\right), \left(0, \frac{2}{\lambda}\right), \cdots \left(0, \frac{\lambda-1}{\lambda}\right), (0, 1), \left(0, 1+\frac{1}{\lambda}\right), \cdots$$

werden jetzt Parallellen zu der Geraden L gezogen; diese Geraden sollen bzw. mit

$$L_1, L_2, L_3, \ldots\ldots L_{\lambda-1}, L_\lambda, L_{\lambda+1}, \ldots\ldots$$

bezeichnet werden, und wegen der Vollständigkeit werde $L = L_0$ gesetzt. Alle Gitterpunkte, welche oberhalb L liegen, werden auf irgendeine dieser Geraden fallen, und ein Glied

$$A(x) \cdot p^a \cdot \varphi(x)^i$$

wird daher durch einen Punkt repräsentiert, welcher auf einer bestimmten der Geraden L_k liegt. Umgekehrt liegen auf allen L_k Gitterpunkte. Die Glieder, welche durch Punkte auf L_0 abgebildet werden, sind schon in (17) aufgestellt. Es sollen jetzt allgemein die Glieder bestimmt werden, welche auf einer Seite L_k liegen, indem zunächst vorausgesetzt wird, dass $0 < k < \lambda$. Für ein Glied

$$A_i(x) \,.\, p^{\left\lceil i\frac{\varkappa}{\lambda}\right\rceil} \,.\, \varphi(x)^{l-i}$$

muss man

$$d_i = \left\lceil \frac{i\varkappa}{\lambda} \right\rceil - i\frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{k}{\lambda}$$

haben, woraus durch Multiplikation mit λ folgt

$$i\varkappa + k \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

Die kleinste positive Lösung dieser Kongruenz soll i_k genannt werden, dann ist die allgemeinste Lösung

$$i = i_k + \lambda \,.\, s \quad (s = 0, 1, \ldots),$$

indem nur positive Werte von i berücksichtigt werden.

Ein Glied, das auf L_k liegt, wird daher von der Form

$$A_s(x) \,.\, p^{\left\lceil (i_k + \lambda \,.\, s)\frac{\varkappa}{\lambda}\right\rceil} \,.\, \varphi(x)^{l - i_k - s\,.\,\lambda}. \tag{20}$$

Es wurde hier vorausgesetzt dass $k < \lambda$ ist. Wenn man aber (20) mit p multipliziert, bekommt man, wie einfach einzusehen ist, ein Glied, das auf $L_{k+\lambda}$ liegt, und allgemeiner, wenn man (20) mit p^t multipliziert, erhält man Glieder, welche auf $L_{k+t\,.\,\lambda}$ liegen. Umgekehrt, wenn ein Glied G gegeben ist, welches auf $L_{k+t\,.\,\lambda}$ liegt, so ist G durch p^t teilbar, und man erhält durch Division durch p^t ein Glied auf L_k.

Es soll im Folgenden gesagt werden, dass *ein Polynom $f_1(x)$ zu L_k gehört*, wenn $j = k$ die kleinste Zahl ist, wofür ein Glied von $f_1(x)$ auf L_j liegt. Allgemeiner soll auch oft gesagt werden, wenn Missverständnisse nicht zu befürchten sind, dass $f_1(x)$ zu L_k gehört, wenn nur festgestellt ist, dass auf den Geraden $L_0, L_1, \ldots L_{k-1}$ keine Glieder von $f(x)$ liegen, aber nicht, dass es auf L_k wirklich Glieder von $f_1(x)$ gibt.

Durch (17) ist die allgemeine Form eines Polynoms gegeben, wofür alle Glieder auf L_0 liegen. Im Allgemeinen soll jetzt die Form eines Polynoms be-

stimmt werden, wofür alle Glieder auf L_k liegen, und man nehme erstens $k < \lambda$ an. Das gesuchte Polynom muss dann eine Summe der Glieder (20) sein, also

$$f_1(x) = \sum_{s=0}^{t} A_s(x) \,.\, p^{\left[(i_k+\lambda s)\frac{\varkappa}{\lambda}\right]} \,.\, \varphi(x)^{l-i_k-s\,.\,\lambda},$$

was man auch

$$f_1(x) = \frac{p^{\left[i_k \cdot \frac{\varkappa}{\lambda}\right]}}{\varphi(x)^{i_k}} \cdot \sum_{s=0}^{t} A_s(x) \,.\, p^{s\,.\,\varkappa} \,.\, \varphi(x)^{l-s\,.\,\lambda}$$

schreiben kann oder

$$f_1(x) = \frac{p^{\left[i_k \cdot \frac{\varkappa}{\lambda}\right]}}{\varphi(x)^{i_k}} \cdot \varphi_1(x);$$

wo $\varphi_1(x)$ ein Polynom ist, wofür alle Glieder auf L_0 liegen. Man bemerkt aber, dass $\varphi_1(x)$ immer durch $\varphi(x)^\lambda$ teilbar sein muss, woraus folgt:

$$f_1(x) = p^{\left[i_k \cdot \frac{\varkappa}{\lambda}\right]} \,.\, \varphi(x)^{\lambda - i_k} \,.\, \psi_1(x), \tag{21}$$

wo $\psi_1(x)$ wieder ein Polynom ist, worin alle Glieder auf L_0 liegen.

Es war hier $k < \lambda$ vorausgesetzt. Soll man aber die Polynome bestimmen, wofür alle Glieder auf $L_{k'}$ liegen, wo $k' = t\,.\,\lambda + k$, so kann man nur das eben gefundene $f_1(x)$ mit p^t multiplizieren.

Aus (21) folgt daher:

$f_1(x)$ sei ein Polynom, wofür alle Glieder auf L_k liegen. Dann kann man zwei positive, ganzzahlige Exponenten α und β derart finden, dass

$$f_1(x) = p^\alpha \,.\, \varphi(x)^\beta \,.\, \varphi_1(x),$$

wo in $\varphi_1(x)$ alle Glieder auf L_0 liegen. β kann hier immer kleiner als λ vorausgesetzt werden.

Und umgekehrt:

Wenn ein $\varphi_1(x)$ gegeben ist, wofür alle Glieder auf L_0 liegen, kann man immer solche α und $\beta < \lambda$ bestimmen, dass in

$$f_1(x) = p^\alpha \,.\, \varphi(x)^\beta \,.\, \varphi_1(x)$$

alle Glieder auf L_k liegen.

Es ist früher definiert worden, dass ein Polynom $F_1(x)$ zu L_k gehört, wenn alle Glieder in $F_1(x)$ oberhalb L_k liegen. Daraus folgt, dass, wenn $F_1(x)$ und $F_2(x)$ bzw. zu L_k und L_l gehören, $F_1(x)\,.\,F_2(x)$ zu L_{k+l} gehört.

Die Kongruenz

$$f_1(x) \equiv f_2(x) \pmod{L_\gamma}$$

soll nun bezeichnen, dass in der Differenz $f_1(x) - f_2(x)$ alle repräsentierenden Punkte oberhalb L_γ liegen. Diese Kongruenzen (mod L_γ) werden in diesen Untersuchungen eine ähnliche Rolle wie in der gewöhnlichen Zahlentheorie die Kongruenzen für einen Primzahlpotenzmodul p^a spielen.

Es sei jetzt $f_1(x)$ ein gegebenes Polynom, das zu L_γ gehört, und es seien $g(x)$ und $h(x)$ zwei Polynome mit dem geradlinigen Polygone L_0 und ausserdem (mod L_0) relativ prim. Man kann dann immer solche Polynome $A_1(x)$ und $B_1(x)$ bestimmen, welche zu L_γ gehören, dass

$$g(x) \,.\, A_1(x) + h(x) \,.\, B_1(x) \equiv p^{j \cdot \varkappa} f_1(x) \pmod{L_\gamma}, \tag{22}$$

wo j eine ganze Zahl ist.

Dafür, dass diese Kongruenz erfüllt sein soll, spielen die Glieder in $f_1(x)$, welche oberhalb L_γ liegen, keine Rolle, und man kann daher voraussetzen, dass $f_1(x)$ ein Polynom ist, wofür alle Glieder auf L_γ liegen. Ebenso mit $A_1(x)$ und $B_1(x)$.

Dann kann

$$f_1(x) = p^a \,.\, \varphi(x)^\beta \,.\, \varphi_1(x)$$

gesetzt werden, wo $\varphi_1(x)$ ein Polynom ist, wofür alle Glieder auf L_0 liegen. Nach § 5 ist es nun möglich, $A(x)$ und $B(x)$ mit Gliedern auf L_0 derart zu bestimmen, dass

$$g(x) \,.\, A(x) + h(x) \,.\, B(x) \equiv p^{(r+a-i)\varkappa} \varphi_1(x) \pmod{L_0}.$$

Wenn diese Kongruenz mit $p^a \,.\, \varphi(x)^\beta$ multipliziert und

$$A_1(x) = p^a \,.\, \varphi(x)^\beta \,.\, A(x)$$

$$B_1(x) = p^a \,.\, \varphi(x)^\beta \,.\, B(x)$$

gesetzt wird, folgt sofort die Richtigkeit von (22).[1]

Mittels dieser Bemerkung folgt jetzt der wichtige Satz:

Satz 10. Wenn $f(x) \equiv g(x) \,.\, h(x)$ (mod L) und $g(x)$ zu $h(x)$ (mod L) relativ prim ist, so ist $f(x)$ auch für alle Geraden L_γ reduzibel und zwar

$$f(x) \equiv g_\gamma(x) \,.\, h_\gamma(x) \pmod{L_\gamma}, \tag{23}$$

wo

$$g_\gamma(x) \equiv g(x), \quad h_\gamma(x) \equiv h(x) \pmod{L}.$$

[1] Man sieht ein: Wenn das Produkt $g(x) . h(x)$ das Polygon L_0 mit der Projektion $e . \lambda$ besitzt, und in $f_1(x)$, das von einem Grade in $\varphi(x)$ sein soll, der $\leq e . \lambda$, alle Glieder auf dem entsprechenden L_γ liegen, so kann man die Kongruenz

$$g(x) . A_1(x) + h(x) . B_1(x) \equiv f_1(x) \pmod{L_\gamma}$$

erfüllen.

Dieser Satz soll durch vollständige Induktion bewiesen werden, indem man beachtet, dass $f(x)$ für $\gamma = 0$ reduzibel ist. Es kann daher angenommen werden, dass

$$f(x) \equiv g_{\gamma-1}(x) \,.\, h_{\gamma-1}(x) \pmod{L_{\gamma-1}} \tag{24}$$

ist, wo

$$g_{\gamma-1}(x) \equiv g(x), \;\; h_{\gamma-1}(x) \equiv h(x) \pmod{L}.$$

Es soll jetzt

$$\left.\begin{aligned} g_\gamma(x) &= g_{\gamma-1}(x) + G(x) \\ h_\gamma(x) &= h_{\gamma-1}(x) + H(x) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

gesetzt werden, wo $G(x)$ und $H(x)$ nur Glieder auf L_γ haben sollen. Es kommt nun darauf an, die Zusatzpolynome $G(x)$ und $H(x)$ in (25) so zu wählen, dass, wenn (24) erfüllt ist, auch die Kongruenz (23) richtig wird.

Nach (24) ist

$$\psi(x) = f(x) - g_{\gamma-1}(x) \,.\, h_{\gamma-1}(x) \equiv 0 \pmod{L_{\gamma-1}},$$

und $\psi(x)$ gehört daher zu L_γ. Wenn man daher (25) in (23) einsetzt, so folgt

$$\psi(x) \equiv G(x) \,.\, h_{\gamma-1}(x) + H(x) \,.\, g_{\gamma-1}(x) + H(x) \,.\, G(x) \pmod{L_\gamma}.$$

Da das Produkt $H(x) \,.\, G(x)$ nach den früheren Bemerkungen zu $L_{2\gamma}$ gehört, ist es hier ohne Bedeutung, und man hat daher nur die Bedingung

$$\psi(x) \equiv G(x) \,.\, h_{\gamma-1}(x) + H(x) \,.\, g_{\gamma-1}(x) \pmod{L_\gamma}. \tag{26}$$

Setzt man nun nach den Voraussetzungen

$$g_{\gamma-1}(x) = g(x) + \bar{g}(x), \;\; h_{\gamma-1}(x) = h(x) + h(x),$$

wo

$$\bar{g}(x) \equiv \bar{h}(x) \equiv 0 \pmod{L}$$

ist, so folgt aus (26)

$$\psi(x) \equiv G(x) \,.\, h(x) + H(x) \,.\, g(x) \pmod{L_\gamma},$$

indem

$$G(x) \,.\, h(x) \equiv H(x) \,.\, \bar{g}(x) \equiv 0 \pmod{L_\gamma}$$

wird. Diese letzte Kongruenz kann aber nach (22) (Fussnote) immer erfüllt werden, wodurch der Satz bewiesen ist. Es ist auch möglich, worauf ich hier nicht eingehe, die Eindeutigkeit der Zerlegung des Satzes 10 zu beweisen.

Aus Satz 10 folgt sofort, dass $f(x)$ für jede Primzahlpotenz p^a reduzibel wird, und zwar

$$f(x) \equiv g^{(a)}(x) \, . \, h^{(a)}(x) \pmod{p^a},$$

wo

$$g^{(a)}(x) \equiv \varphi(x)^{r \cdot \lambda}, \;\; h^{(a)}(x) \equiv \varphi(x)^{s \cdot \lambda} \pmod{p},$$

wenn $g(x)$ und $h(x)$ von der Form (18) sind.

Weiter folgt, wenn

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{e_1} \, . \, \varphi_2(x)^{e_2} \ldots \varphi_s(x)^{e_s} \pmod{L}$$

die Primfaktorenzerlegung (mod L) von $f(x)$ ist, dass auch

$$f(x) \equiv \Phi_1^{(\gamma)}(x) \, . \, \Phi_2^{(\gamma)}(x) \ldots \Phi_s^{(\gamma)}(x) \pmod{L_\gamma}$$

für alle γ, wo

$$\Phi_i^{(\gamma)}(x) \equiv \varphi_i(x)^{e_i} \pmod{L}.$$

Wenn

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_s = 1$$

ist, so sind die Funktionen $\Phi_i^{(\gamma)}(x)$ (mod L_γ) irreduzibel, aber wenn einige der Exponenten $e_i > 1$ sind, können auch die entsprechenden Faktoren $\Phi_i^{(\gamma)}(x)$ reduzibel sein.

Aus diesen Bemerkungen folgt auch, dass $f(x)$ für alle Primzahlpotenzmoduln p^a reduzibel wird und

$$f(x) \equiv \psi_1^{(a)}(x) \, . \, \psi_2^{(a)}(x) \ldots \psi_s^{(a)}(x) \pmod{p^a},$$

wo

$$\psi_i^{(a)}(x) \equiv \varphi_i(x)^{e_i} \pmod{p}.$$

Nachdem so der Fall behandelt worden ist, dass das Polygon von $f(x)$ eine Gerade ist, soll nun der allgemeine Fall behandelt werden, dass das Polygon eine beliebige Anzahl von Seiten besitzt. Man kann dann den wichtigen Satz beweisen:

Satz 11. $f(x)$ ist für jeden Primzahlpotenzmodul p^a reduzibel, und zwar können die Faktoren derart gewählt werden, dass das Polygon eines Faktors gleich einer Seite des Polygones zu $f(x)$ ist, und die geradlinigen Polygone der Faktoren bilden zusammen das Polygon zu $f(x)$.

Um diesen Satz zu beweisen, kann man zunächst annehmen, was gestattet ist, dass das Polygon S ein Hauptpolygon ist. Sei $L = L_0$ die erste Seite dieses

Polygons, so soll gezeigt werden, dass $f(x)$ für alle zu L_0 parallelen Geraden L_γ reduzibel ist und zwar in der Weise, dass der eine Faktor das Polygon L_0 besitzt und der andere ein Polygon, das oberhalb L_0 liegt. Dadurch folgt nämlich, dass $f(x)$ auch für jeden Modul p^α reduzibel wird, und für genügend grosse α wird das Polygon des einen Faktors aus der Seite L und folglich nach dem Multiplikationssatze das Polygon des anderen Faktors aus dem anderen Teile von S bestehen. Den zweiten Faktor kann man aber dann in entsprechender Weise behandeln, und dadurch folgt einfach der Satz.

Es sei

$$f(x) \equiv (\varphi(x)^l + B_1(x) \cdot p^\varkappa \cdot \varphi(x)^{l-\lambda} + \cdots + B_e(x) \cdot p^h)\, \varphi(x)^j \pmod{L}$$

die Zerlegung von $f(x)$ (mod L), wo

$$B_e(x) \not\equiv 0 \ (\text{modd } p, \varphi(x)).$$

Wenn hier j ein Multiplum von λ ist, so folgt wie im Satz 10, dass $f(x)$ für alle L_γ in der gewünschten Weise reduzibel wird. Im Allgemeinen ist aber j kein Multiplum von λ, und man kann dann $j = t \cdot \lambda - \varepsilon$ setzen, wo $0 \leqq \varepsilon < \lambda$. In diesem Falle wird der Satz wie der Satz 10 durch vollständige Induktion bewiesen, indem man folgendermassen vorgeht:

Es wird angenommen, es sei bereits bewiesen worden, dass

$$f(x) \equiv g^{(\gamma-1)}(x) \cdot h^{(\gamma-1)}(x) \pmod{L_{\gamma-1}}$$

ist, wo

$$\left.\begin{aligned} g^{(\gamma-1)}(x) &\equiv \varphi(x)^l + \cdots + B_e(x) \cdot p^h = f_1(x) \\ h^{(\gamma-1)}(x) &\equiv \varphi(x)^j \end{aligned}\right\} \pmod{L}.$$

Es soll dann gezeigt werden, dass man die Zusatzfunktionen $G(x)$ und $H(x)$ nur mit Gliedern auf L_γ, also

$$G(x) \equiv H(x) \equiv 0 \pmod{L_{\gamma-1}}$$

bestimmen kann, so dass, wenn

$$g^{(\gamma)}(x) = g^{(\gamma-1)}(x) + G(x)$$
$$h^{(\gamma)}(x) = h^{(\gamma-1)}(x) + H(x)$$

gesetzt wird, die Kongruenz

$$f(x) \equiv g^{(\gamma)}(x) \cdot h^{(\gamma)}(x) \pmod{L_\gamma} \tag{27}$$

erfüllt ist.

Der Beweis wird jetzt ganz analog wie für Satz 10 geführt. Es ist

$$\psi(x) = f(x) - g^{(\gamma-1)}(x) \,.\, h^{(\gamma-1)}(x) \equiv 0 \pmod{L_{\gamma-1}},$$

und da (27) erfüllt sein soll, muss man

$$\psi(x) \equiv G(x) \,.\, h^{(\gamma-1)}(x) + H(x) \,.\, g^{(\gamma-1)}(x) + H(x) \,.\, G(x) \pmod{L_\gamma}.$$

haben. Nach den Voraussetzungen ist aber

$$H(x) \,.\, G(x) \equiv 0 \pmod{L_\gamma},$$

und die zu lösende Aufgabe reduziert sich daher dazu, zu zeigen, dass man die Polynome $G(x)$ und $H(x)$ mit Gliedern auf L_γ finden kann derart, dass

$$G(x) \,.\, h^{(\gamma-1)}(x) + H(x) \,.\, g^{(\gamma-1)}(x) \equiv \psi(x) \pmod{L_\gamma}.$$

Hier können aber in $\psi(x)$ alle Glieder weggelassen werden, welche oberhalb L_γ liegen, man kann also voraussetzen, dass $\psi(x)$ nur Glieder auf L_γ enthält. Ebenso kann man in $h^{(\gamma-1)}(x)$ und $g^{(\gamma-1)}(x)$ alle Glieder weglassen, welche oberhalb L_0 liegen. Die Kongruenz geht dann über in

$$G(x) \,.\, \varphi(x)^j + H(x) \,.\, f_1(x) \equiv \psi(x) \pmod{L_\gamma}. \tag{28}$$

Dies ist aber keine Kongruenz von der Form (22), ausser wenn j ein Multiplum von λ ist. Denn es war z. B.

$$f(x) \equiv \varphi(x)^{l+j} + B_1(x) \,.\, p^{\varkappa} \,.\, \varphi(x)^{l+j-1} + \cdots + B_e(x) \,.\, \varphi(x)^j \pmod{L_0},$$

und hier sind nicht die Exponenten der Potenzen von $\varphi(x)$ Multipla von λ wie früher. Durch Multiplikation mit $\varphi(x)^\varepsilon$ $(j = t \,.\, \lambda - \varepsilon)$ geht diese Kongruenz in eine Kongruenz der gewöhnlichen Art über. Um die Möglichkeit der Kongruenz (28) zu untersuchen, multipliziere man diese mit $\varphi(x)^\varepsilon$ und erhält

$$G(x) \,.\, \varphi(x)^{t \cdot \lambda} + H(x) \,.\, \varphi(x)^\varepsilon \,.\, f_1(x) \equiv \psi(x) \,.\, \varphi(x)^\varepsilon \pmod{L_\gamma}.$$

Hier ist, wie eine einfache Überlegung zeigt, $\psi(x) \,.\, \varphi(x)^\varepsilon$ ein Polynom, das im gewöhnlichen Sinne wie in (22) zu L_γ gehört, und man kann daher solche Polynome $G(x)$ und $H_1(x)$ mit Gliedern auf L_γ bestimmen, dass

$$G(x) \,.\, \varphi(x)^{t \cdot \lambda} + H_1(x) \,.\, f_1(x) \equiv \psi(x) \,.\, \varphi(x)^\varepsilon \pmod{L_\gamma}. \tag{29}$$

Wenn diese Kongruenz erfüllt sein soll, muss aber sicher $H_1(x)$ durch $\varphi(x)^\varepsilon$ teilbar sein, und man kann darum

$$H_1(x) = \varphi(x)^\varepsilon \,.\, H(x)$$

setzen. Man dividiert dann die Kongruenz (29) durch $\varphi(x)^\varepsilon$, und die Kongruenz (28) ist in der gewünschten Weise erfüllt. Nach den ersten Durchführungen folgt daraus die Richtigkeit des Satzes 11.

Nach Satz 11 folgt die Zerlegung eines Polynoms (mod p^a), wenn das Polygon aus mehreren Seiten besteht, und aus Satz 10 folgt dann die Zerlegung der Faktoren mit geradlinigen Polygonen.

§ 7. Der Spezialfall $\varphi(x) = x$.

Es soll jetzt der Spezialfall $\varphi(x) = x$ eingehender untersucht werden. Dann ist einfach

$$f(x) = x^n + p^{a_1} \,.\, A_1 \,.\, x^{n-1} + \cdots + p^{a_n} \,.\, A_n \tag{30}$$

die Entwickelung $(p, \varphi(x))$, wo die Koeffizienten A_i nicht durch p teilbar sind. Das Polygon $S(p, x)$ von $f(x)$ besteht aus dem Newtonschen Polygone zu den Punkten (i, α_i) und für dieses Polygon soll die gewöhnliche Bezeichnung angewandt werden, die in § 2 eingeführt wurde.

Wenn nun das Polygon (p, x) bestimmt worden ist, liefert der Satz 4: *$f(x)$ kann im rationalen Bereiche nur Faktoren von den Graden*

$$m = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \,.\, \lambda_i \tag{31}$$

haben, wo ε_i eine der Zahlen 0, 1, ... e_i *ist.*

Dies ist der früher erwähnte Satz von Dumas.[1]

Aus diesem Satze soll nun ein weiterer Satz bewiesen werden, der für verschiedene Untersuchungen nützlich ist. Sei ϑ eine beliebige, algebraische Zahl und $P(\vartheta)$ der daraus abgeleitete Körper. Sei weiter

$$p = \mathfrak{p}^u \,.\, \mathfrak{p}_1$$

eine Idealzerlegung von p in $P(\vartheta)$, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $\mathfrak{p}_1$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Aus dem Polygone S für $f(x)(p, x)$ soll nun das Polygon $S'(\mathfrak{p}, x)$ für

[1] Dumas, loc. cit. S. 237.

$f(x)$ bestimmt werden. Die Entwickelung $(\mathfrak{p}, x)$ ist wie früher durch (30) angegeben, indem man bemerkt, dass p^{a_i} genau durch $\mathfrak{p}^{u \cdot a_i}$ teilbar ist. Man hat daher das Polygon zu den Punkten $(i, u \cdot \alpha_i)$ zu konstruieren. Die Seitenzahl der beiden Polygone wird daher dieselbe, die Projektionen der Seiten auf die X-achse bleiben ungeändert gleich l_i, während für S' die Projektionen auf die Y-achse gleich $u \cdot h_i$ sind.

Der Satz von Dumas bleibt aber nach § 3 auch in $P(\vartheta)$ richtig, und aus (31) folgt, dass $f(x)$ in diesem Körper nur Faktoren von den Graden

$$m = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \cdot \frac{l_i}{f_i}$$

haben kann, wo f_i der grösste gemeinsame Faktor von l_i und $u \cdot h_i$ ist und ε_i eine der Zahlen $0, 1, \ldots f_i$ bedeutet. Da aber e_i der grösste gemeinsame Faktor von l_i und h_i ist, so hat man

$$f_i = e_i \cdot g_i,$$

wo g_i der grösste gemeinsame Faktor von λ_i und u ist. Folglich ist bewiesen:

Satz 12. $p = \mathfrak{p}^u \cdot \mathfrak{p}_1$ *sei eine Zerlegung von* p *im Körper* $P(\vartheta)$. $f(x)$ *kann dann in diesem Körper nur Faktoren von den Graden*

$$m = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \cdot \frac{\lambda_i}{g_i} \tag{32}$$

haben, wo ε_i *eine der Zahlen* $0, 1, \ldots, e_i \cdot g_i$ *und* g_i *der grösste gemeinsame Faktor von* λ_i *und* u *ist.*

Mittels des Satzes 12 kann man viele interessante Sätze über Gleichungen ableiten, wie ich in der Arbeit: »Gleichungen mit primitiven Gruppen.«[1] gezeigt habe. Aus diesen Untersuchungen folgt z. B. als Spezialfall ein Satz von Furtwängler.[2]

Man kann hier noch eine andere wichtige Bemerkung machen: Wenn $u = 1$ ist, wird $g_i = 1$, und (32) geht in (31) über. Da nach Dedekind u nur dann grösser als 1 sein kann, wenn p ein Teiler der Körperdiskriminante ist, sieht man ein:

Die möglichen Gradzahlen der Faktoren können nur dann geändert werden, wenn p *ein Teiler der Körperdiskriminante von* $P(\vartheta)$ *ist.*

[1] Zeitschrift für Math. 1923.
[2] Furtwängler, Math. Ann. 85, S. 37.

Speziell folgt daraus:

Ein Polynom, das nach den Sätzen von Eisenstein oder Königsberger im rationalen Bereiche irreduzibel ist, bleibt auch in jedem Körper irreduzibel, dessen Diskriminante nicht durch p teilbar ist.

In einer anderen Arbeit[1] habe ich gezeigt, wie man aus dieser Bemerkung ganz einfach die Sätze von KRONECKER[2] über die Reduzibilität von Kreisteilungsgleichungen in algebraischen Körpern ableiten und noch allgemeinere Sätze aufstellen kann.

§ 8. Höhere Kongruenzen. Die Sätze von Hensel.

Die Satze des § 6 gestatten eine einfache Untersuchung der Eigenschaften von höheren Kongruenzen für Primzahlpotenzmoduln p^{α}. $x = x_0$ sei eine Wurzel der Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{33}$$

Nun kann man die Frage aufwerfen, wann man aus x_0 eine Wurzel $x_0^{(\alpha)}$ der Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha}} \tag{34}$$

ableiten kann derart, dass

$$x_0^{(\alpha)} \equiv x_0 \pmod{p}.$$

Man soll also die Lösbarkeit der Kongruenz für beliebig grosse α untersuchen oder nach HENSEL, wann die Gleichung $f(x) = 0$ im p-adischen Bereiche lösbar ist.

Wenn x_0 eine einfache Wurzel von (33) ist, so hat man

$$f'(x_0) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

und in diesem Falle bestimmt man einfach eine und nur eine Wurzel $x_0^{(\alpha)}$ von (34) von der gewünschten Art.[3]

Wenn aber x_0 eine mehrfache Wurzel ist, wird

$$f'(x_0) \equiv 0 \pmod{p},$$

und p ist in diesem Falle ein Teiler der Diskriminante von $f(x)$. In diesem Falle kann es sehr wohl eintreffen, dass, wenn α genügend gross wird, kein

[1] »Irreduzibilität in algebraischen Körpern». Norsk matematisk Forenings skrifter. I, no. 9. Kristiania 1922.

[2] KRONECKER, Journal de math. Sér. I, t. 19, S. 177.

[3] Man sehe z. B. CAHEN: Théorie des nombres. § 168.

solches $x_0^{(\alpha)}$ existiert, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Über diese Kongruenzen hat nun HENSEL[1] ein paar wichtige Sätze bewiesen und darin Bedingungen aufgestellt, unter welchen eine p-adische Wurzel existiert, also wann man immer ein $x_0^{(\alpha)}$ bestimmen kann.

Sei allgemein

$$\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$$

genau durch p^{ϱ_i} teilbar, $f(x_0)$ genau durch p^{ϱ_0}, dann lauten die Sätze von Hensel:

Wenn $\varrho_0 - 2\varrho_1 > 0$ *ist, wird die Kongruenz* (34) *für alle* α *derart lösbar, dass* $x_0^{(\alpha)} \equiv x_0 \pmod{p}$.

Und allgemeiner:

Wenn x_0 *eine derartige Wurzel von* (33) *ist, dass*

$$\varrho_0 > \operatorname{Max}\left(\frac{i\varrho_1 - \varrho_i}{i-1}\right) \quad (i = 2, 3, \ldots \nu)$$

ist, so wird die Kongruenz (34) *für alle* α *in der gewünschten Art lösbar, vorausgesetzt, dass für alle* $x_0^{(\alpha)}$ *die Zahlen* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\nu$ *ungeändert bleiben.*

Dabei bedeutet ν die erste Zahl, wofür $\varrho_\nu = 0$ ist.

Es sollen jetzt diese Sätze als Spezialfälle von allgemeineren Sätzen abgeleitet werden. Wenn $f(x) \pmod{p^\alpha}$ die Wurzel $x_0^{(\alpha)}$ haben soll, so ist

$$f(x) - f(x_0^{(\alpha)}) = (x - x_0^{(\alpha)}) f_1(x)$$

oder

$$f(x) \equiv (x - x_0^{(\alpha)}) f_1(x) \pmod{p^\alpha},$$

d. h. $f(x)$ muss $(\bmod\ p^\alpha)$ einen Linearfaktor $x - x_0^{(\alpha)}$ besitzen und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so hat man eine Lösung der Kongruenz (34). Um die Lösbarkeit der Kongruenz (34) zu untersuchen, braucht man daher nur die Faktorenzerlegung $(\bmod\ p^\alpha)$ von $f(x)$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wird die Entwickelung $(p, x - x_0)$ von $f(x)$ bestimmt, und man hat

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + (x - x_0)^n.$$

Das zugehörige Polygon S wird dann aus dem Newtonschen Polygone zu den Punkten

$$(0, 0),\ (1, \varrho_{n-1}),\ \ldots\ldots (n-1, \varrho_1),\ (n, \varrho_0)$$

bestehen.

[1] HENSEL: Theorie der algebraischen Zahlen. Kap. IV. § 4.

Wenn jetzt $f(x)$ für einen beliebig hohen Modul p^a einen Linearfaktor haben soll, muss es in diesem Polygone wenigstens eine Seite L_i geben, wofür $\lambda_i = 1$ ist. Denn Seiten, wofür $\lambda_i > 1$ ist, können nach § 6 nur Faktoren liefern, in denen höhere Potenzen von $x - x_0$ vorkommen. Weiter müssen die zugehörigen Polynome dieser Seite L_i in der Zerlegung von $f(x)$ (mod S) (§ 4) einen oder mehrere Linearfaktoren (mod L_i) enthalten. Wenn diese Faktoren verschieden sind, ergibt es sich entsprechend viele lineare Faktoren von $f(x)$ (mod p^a) für alle a (§ 6). Wenn mehrere von diesen Linearfaktoren (mod L_i) einander gleich sind, steht die Frage noch dahin.

Es ist also bewiesen:

Damit die Kongruenz (34) *für alle a erfüllt sein soll, ist notwendig, dass es in dem Polygone $(p, x - x_0)$ mindestens eine Seite L_i gibt, wofür $\lambda_i = 1$ ist, und der zu dieser Seite gehörige Faktor $f_i(x)$ in der Zerlegung (mod S) muss mindestens einen Linearfaktor (mod L_i) besitzen. Wenn es einen solchen Linearfaktor gibt, der auch in $f_i(x)$ (mod L_i) einfach vorkommt, so ist diese Bedingung auch hinreichend.*

Wenn aber alle Linearfaktoren für alle solche Seiten L_i mehrfach vorkommen, steht die Frage noch dahin. Wenn für eine Seite $l_i = \lambda_i = 1$ ist, so sind alle Bedingungen des eben bewiesenen Satzes erfüllt, und man hat:

Satz 13. Wenn es in dem Polygone von $f(x)$ $(p, x - x_0)$ eine Seite gibt, wofür $l_i = 1$ ist, so ist die Kongruenz (34) *für alle a lösbar.*

Um jetzt zu den Henselschen Sätzen zu kommen, braucht man nur diesen Satz umzuformen. Die Bedingung, dass das Polygon eine Seite, haben soll, wofür $l_i = 1$ ist, kann auch folgendermassen ausgedrückt werden. Seien nämlich

$$(n - r, \varrho_r), \ (n - r + 1, \varrho_{r-1})$$

die beiden Punkte des Polygons, wodurch diese Seite geht, dann wird die Gleichung der Seite

$$y - \varrho_r = (\varrho_{r-1} - \varrho_r)(x - n + r)$$

oder

$$y - \varrho_r - (\varrho_{r-1} - \varrho_r)(x - n + r) = 0. \tag{35}$$

Da alle Punkte $(n - i, \varrho_i)$ auf derselben Seite dieser Geraden liegen, so müssen sie alle, in die linke Seite von (35) eingesetzt, Werte von gleichen Vorzeichen ergeben. Da aber für den Punkt (0, 0) dieser Wert positiv ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, so ist immer

$$\varrho_i - \varrho_r - (\varrho_{r-1} - \varrho_r)(r - i) > 0$$

und daher

$$\varrho_r < \varrho_i - (\varrho_{r-1} - \varrho_r)(r - i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots r - 2, r + 1, \ldots n).$$

Umgekehrt sieht man leicht ein, dass dies eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass das Polygon eine Seite besitzt, wofür die Projektion $l_s = 1$ ist.

Man kann daher Satz 13 so aussprechen:

Satz 14. Wenn für ein r

$$\varrho_r < \operatorname{Max}\left(\varrho_i - (\varrho_{r-1} - \varrho_r)(r - i)\right) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots r - 2, r + 1, \ldots n)$$

ist, so wird die Kongruenz (34) für alle α lösbar.

Für $r = 1$ folgt

$$\varrho_1 < \varrho_i + (\varrho_0 - \varrho_1)(i - 1)$$

oder

$$\varrho_1 > \frac{i\,\varrho_1 - \varrho_i}{i - 1} \quad (i = 2, 3, \ldots n).$$

Daraus folgt der Satz von Hensel.

Kap. 3. Verallgemeinerung der Dedekindschen Sätze.

§ 1. Die Untersuchungen von Dedekind.

Ich werde in diesem Kapitel die Bestimmung der Primideale eines algebraischen Körpers behandeln. Dabei soll der Einfachkeit wegen der rationale Bereich zu Grunde gelegt werden. Diese Einschränkung ist aber nicht notwendig, und man hätte durch diese Methoden auch ganz allgemein die Primideale eines Relativkörpers bestimmen können.

Es sei wie früher

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

eine ganze, rationale Funktion mit ganzen, rationalen Koeffizienten. Von jetzt an soll aber immer vorausgesetzt werden, dass $f(x)$ im rationalen Bereiche irreduzibel ist und folglich durch die Gleichung

$$f(\vartheta) = 0 \tag{1}$$

ein algebraischer Körper $P(\vartheta)$ n^{ten} Grades definiert wird. Sei D die Diskriminante von $f(x)$ und d die Diskriminante des Zahlenkörpers, dann ist

$$D = k^2 . d,$$

wo der Index k eine ganze, rationale Zahl ist. Im Folgenden soll jede Primzahl p, die in k aufgeht, ein *Indexteiler* heissen.

Weiter sei

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{e_1} \cdot \varphi_2(x)^{e_2} \ldots \varphi_r(x)^{e_r} \pmod{p} \tag{2}$$

die Primfunktionzerlegung von $f(x)$ (mod p), wo die Primfunktionen $\varphi_i(x)$ von den Graden m_i alle verschieden sind.

Wenn nun in (2)

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_r = 1$$

ist, wird p bekanntlich kein Teiler von D, und die Primidealzerlegung von p ist in diesem Falle nach DEDEKIND[1]

$$p = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_r,$$

wo

$$\mathfrak{p}_i = (p, \varphi_i(\vartheta)),$$

und der Grad von $\mathfrak{p}_i$ ist gleich m_i, also $N\,\mathfrak{p}_i = p^{m_i}$.

Wenn aber allgemeiner in (2) einige der Exponenten e_i grösser als 1 sind, p aber kein Indexteiler ist, so ist auch

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{e_r}$$

die Zerlegung von p, wo

$$\mathfrak{p}_i = (p, \varphi_i(\vartheta))$$

und $N\,\mathfrak{p}_i = p^{m_i}$.

Für die Anwendung dieser Untersuchungen muss man natürlich entscheiden können, wann eine gegebene Primzahl ein Teiler des Index ist, und dies liefert das Kriterium von DEDEKIND.[2]

Sei

$$f(x) = \varphi_1(x)^{e_1} \cdot \varphi_2(x)^{e_2} \ldots \varphi_r(x)^{e_r} + p \cdot M(x)$$

und seien z. B. $e_\alpha, e_\beta, \ldots$ *die Exponenten, welche grösser als 1 sind, so ist die Primzahl* p *dann und nur dann ein Teiler des Index, wenn das Polynom* $M(x)$ *(mod* p*) durch eine der Primfunktionen* $\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x), \ldots$ *teilbar ist.*

---

[1] DEDEKIND: Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen. Göttinger Abhandlungen 1878. § 2. Diese Abhandlung wird im Folgenden mit A bezeichnet.

[2] DEDEKIND A § 3.

§ 2. Anwendung der Newtonschen Polygone auf die Bestimmung der Primideale.

Die Untersuchungen von Dedekind enthalten also die Lücke, dass sie für den Fall eines Indexteilers unanwendbar sind. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, könnte man versuchen, anstatt der Gleichung (1) die Gleichung irgend einer anderen Zahl des Körpers zur Bestimmung der Primidealzerlegung von p zu verwenden. Leider aber gibt es, wie DEDEKIND[1] gezeigt hat, Körper, wofür alle Indices k der Zahlen des Körpers einen gemeinsamen Teiler $\Delta > 1$ haben, und für Primzahlen, welche in Δ aufgehen, wird die Dedekindsche Methode ohne Bedeutung. Hensel[2] hat sogar gezeigt »dass das Auftreten solcher gemeinsamen ausserwesentlichen Diskriminantenteiler eigentlich keine Ausnahme, sondern die Regel ist».

Es soll hier gezeigt werden, dass man mit Hilfe der Newtonschen Polygone auch in dem Falle, dass p ein Indexteiler ist, die Primidealzerlegung bestimmen kann.

Für jede der Primfunktionen $\varphi_i(x)$ in (2) soll die zugehörige Entwickelung $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ bestimmt und das zugehörige Polygon gezeichnet werden. Da

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)},$$

so müssen also diese Polygone auch Seiten besitzen, die über die X-achse fallen, d. h. Hauptpolygone besitzen, und für die späteren Untersuchungen spielen nur diese eine Rolle.

Man sieht jetzt einfach ein:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Primzahl p kein Teiler der Diskriminante D ist, besteht darin, dass alle Hauptpolygone für die Entwickelungen $(p, \varphi(x))$ aus einer Geraden bestehen, wofür $l_1 = 1$ ist.

Denn in diesem Falle ist $f(x)$ (mod p) nicht durch das Quadrat einer Primfunktion teilbar. Weiter sieht man mittels des Dedekindschen Kriteriums ein:

Satz 15. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Primzahl p kein Teiler des Index k ist, wird dadurch ausgedrückt, dass alle Hauptpolygone für die Entwickelungen $(p, \varphi(x))$ aus Geraden bestehen, wofür entweder $l_1 = 1$ oder $h_1 = 1$ ist.

Die Untersuchungen von Dedekind behandeln daher nur den Fall, dass die Polygone geradlinig sind und ausserdem entweder die X-achsenprojektionen oder

[1] DEDEKIND A § 5.

[2] HENSEL, loc. cit. S. 273.

die Y-achsenprojektionen gleich 1 sind. In diesem Kapitel werde ich diese Untersuchungen in der Weise verallgemeinern, dass ich zunächst allgemein den Fall behandle, dass sämtliche Polygone geradlinig sind. Im nächsten Kapitel soll dann der Fall eines beliebigen Polygones behandelt werden.

§ 3. Bestimmung der möglichen Exponenten.

Den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und den Newtonschen Polygonen $(p, \varphi(x))$ sieht man deutlich durch den hier zu beweisenden Satz ein.

Es soll eine Beziehung zwischen den gemeinsamen Primidealfaktoren von p und $\varphi(\vartheta)$ bestimmt werden.

Es seien

$$\left.\begin{aligned} p &= \mathfrak{p}_1^{s_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{s_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{s_k} \cdot P \\ \varphi(\vartheta) &= \mathfrak{p}_1^{t_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{t_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{t_k} \cdot \Phi \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

die Primidealzerlegungen von p und $\varphi(\vartheta)$, wo die Ideale P und Φ zu einander relativ prim sind. Es sollen nun die Verhältnisse

$$\frac{s_i}{t_i} \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

untersucht und ihre möglichen Werte bestimmt werden. Zu diesem Zwecke wird ein Primideal $\mathfrak{p}$ ausgewählt, und man setzt

$$p = \mathfrak{p}^s \cdot \mathfrak{p}_1,$$
$$\varphi(\vartheta) = \mathfrak{p}^t \cdot \mathfrak{p}_2,$$

wo $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind. Die Kongruenz (2) soll nun in der Form

$$f(x) \equiv \pi(x) \cdot \varphi(x)^e \pmod{p}$$

geschrieben werden, wo $\pi(x) \pmod{p}$ nicht durch $\varphi(x)$ teilbar ist. Daraus leitet man für alle α eine Kongruenz

$$f(x) \equiv \Pi(x) \cdot \Phi(x) \pmod{p^\alpha}$$

ab, wo

$$\left.\begin{aligned} \Pi(x) &\equiv \pi(x) \\ \Phi(x) &\equiv \varphi(x)^e \end{aligned}\right\} \pmod{p}.$$

Wenn hier α genügend gross gewählt wird, so besteht das Polygon $(p, \varphi(x))$ von $\Phi(x)$ aus dem Hauptpolygone von $f(x)(p, \varphi(x))$.

Die ganze Zahl $\Pi(\vartheta)$ kann nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein, denn man kann immer solche Polynome $A(x)$ und $B(x)$ bestimmen, dass

$$A(x) \,.\, \Pi(x) + B(x) \,.\, \varphi(x) \equiv 1 \pmod{p},$$

woraus für $x = \vartheta$ folgt:

$$A(\vartheta) \,.\, \Pi(\vartheta) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Es soll nun die Zahl $\Phi(\vartheta)$ untersucht werden; man bestimmt die zugehörige Entwickelung $(p, \varphi(x))$ für $\Phi(x)$ und konstruiert das daraus bestimmte Polygon. Es sollen für dieses Polygon die Bezeichnungen des Kap. II angewandt werden.

Ein Glied

$$Q_i(x) \,.\, p^{\alpha_i} \,.\, \varphi(x)^i$$

in dieser Entwickelung wird dann genau durch

$$\mathfrak{p}^{s \,.\, \alpha_i + t \,.\, i}$$

teilbar, wenn $x = \vartheta$ gesetzt wird. $Q_i(\vartheta)$ kann nämlich nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein, denn da $Q_i(x)$ zu $\varphi(x)$ (mod p) relativ prim ist, kann man solche Polynome $A(x)$ und $B(x)$ bestimmen, dass

$$A(x) \,.\, Q(x) + B(x) \,.\, \varphi(x) \equiv 1 \pmod{p}$$

ist und folglich

$$A(\vartheta) \,.\, Q(\vartheta) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Zu jedem Gliede gibt es also einen zugehörigen Exponenten $s \,.\, \alpha_i + t \,.\, i$. Da $f(\vartheta) = 0$ ist, kann es kein einziges Glied geben, wofür dieser Exponent absolut am kleinsten ist, sondern es muss mindestens zwei oder mehrere Glieder geben, wofür der zugehörige Exponent diesen Minimalwert erreicht. Die repräsentierenden Punkte für diese Glieder müssen nun alle auf derselben Geraden liegen. Denn aus

$$s \,.\, \alpha_i + t \,.\, i = s \,.\, \alpha_j + t \,.\, j$$

folgt sofort

$$\frac{i - j}{\alpha_j - \alpha_i} = \frac{s}{t}, \tag{4}$$

und dieses Verhältnis wird für alle solche Punkte (i, α_i) dasselbe. Nach bekannten Eigenschaften der Newtonschen Polygone wird aber für alle Punkte, welche unterhalb dieser Geraden liegen, die Summe $s \,.\, \alpha_i + t \,.\, i$ kleiner als die entsprechenden Summen für Glieder, welche auf oder oberhalb dieser Geraden

liegen. Da aber der Wert der Summe der kleinste mögliche sein soll, bleibt nur die Möglichkeit übrig, dass diese Gerade mit einer der Seiten des Polygones zusammenfällt.

Es sei nun wie in § 4. II

$$\left.\begin{aligned}\psi_i(x) = p^k \,.\, \varphi(x)^l (R_{s,0}(x) \,.\, \varphi(x)^{l_s} + R_{s,1}(x) \,.\, p^{\varkappa_s} \,.\, \varphi(x)^{l_s-\lambda_s} + \\ + R_{s,2}(x) \,.\, p^{2\varkappa_s} \,.\, \varphi(x)^{l_s-2\lambda_s} + \cdots + R_{s,e_s}(x)\, p^{h_s})\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

die Summe der Glieder, deren entsprechende Punkte auf der s^{ten} Seite liegen. Zur Abkürzung ist

$$k = h_1 + h_2 + \cdots + h_{s-1}$$
$$l = e - l_1 - l_2 - \cdots - l_{s-1}$$

gesetzt worden. Für die Glieder von (5) ist aber das Verhältniss (4) konstant, nämlich

$$\frac{s}{t} = \frac{j-i}{\alpha_i - \alpha_j} = \frac{l + l_s - i_1 \,.\, \lambda_s - (l + l_s - i_2 \,.\, \lambda_s)}{k + i_2 \,.\, \varkappa_s - (k + i_1 \,.\, \varkappa_s)} = \frac{\lambda_s}{\varkappa_s},$$

und daher ist bewiesen:

Satz 16. Wenn die Primidealzerlegungen von p und $\varphi(\vartheta)$ durch (3) gegeben sind, werden nur solche Exponenten möglich, wofür das Verhältniss $\frac{t_i}{s_i}$ gleich einer der Neigungszahlen $\frac{\varkappa_s}{\lambda_s}$ des Polygones $(p, \varphi(x))$ ist.

Da nun (5) alle Glieder enthält, wofür der Exponent von $\mathfrak{p}$ den kleinsten Wert erreicht, so werden alle anderen Glieder in der Entwickelung $(p, \varphi(x))$ durch höhere Potenzen von $\mathfrak{p}$ teilbar. Da aber $f(\vartheta) = 0$ ist, folgt daraus, dass die Summe

$$R_{s,0}(\vartheta) \,.\, \varphi(\vartheta)^{l_s} + R_{s,1}(\vartheta) \,.\, p^{\varkappa_s} \,.\, \varphi(\vartheta)^{l_s-\lambda_s} + \cdots + R_{s,e_s}(\vartheta) \,.\, p^{h_s}$$

sicher durch die Potenz $\mathfrak{p}^{h_s s+1} = \mathfrak{p}^{l_s \cdot t+1}$ teilbar wird. Bestimmt man nun ein Polynom $A_s(x)$ derart, dass

$$A_s(x) \,.\, R_{s,0}(x) \equiv 1 \pmod{p, \varphi(x)},$$

so ist $A_s(\vartheta)$ sicher nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Die Summe

$$A_s(x)\,(R_{s,0}(x) \,.\, \varphi(x)^{l_s} + \cdots + R_{s,e_s}(x)\, p^{h_s})$$

wird dann sicher für $x = \vartheta$ durch $\mathfrak{p}^{h_s \cdot s+1}$ teilbar. Daraus folgt aber nach § 4. II:

Satz 17. Sei $\mathfrak{p}$ *ein Primideal, wofür* $\frac{s}{t} = \frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$ *ist. Wenn dann*

$$f_i(x) = \varphi(x)^{l_i} + S_{i,1}(x) \cdot p^{\varkappa_i} \cdot \varphi(x)^{l_i - \lambda_i} + \cdots + S_{i,e_i}(x) \cdot p^{h_i}$$

der Faktor der i^{ten} *Seite in der Zerlegung für das Polygon ist* (§ 4. II), *so ist* $f_i(\vartheta)$ *durch*

$$\mathfrak{p}^{h_i \cdot s + 1} = \mathfrak{p}^{l_i \cdot t + 1}$$

teilbar.

§ 4. Hilfssätze über algebraische Zahlen.

Sei

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

eine Basis von $P(\vartheta)$; dann kann jede ganze Zahl des Körpers in der Form

$$\alpha = A_1 \cdot \omega_1 + A_2 \cdot \omega_2 + \cdots + A_n \cdot \omega_n$$

geschrieben werden, wo die A_i ganze rationale Zahlen sind. Daher hat man auch

$$\left.\begin{array}{r} 1 = a_1^{(1)} \cdot \omega_1 + a_2^{(1)} \cdot \omega_2 + \cdots + a_n^{(1)} \cdot \omega_n \\ \vartheta = a_1^{(2)} \cdot \omega_1 + a_2^{(2)} \cdot \omega_2 + \cdots + a_n^{(2)} \cdot \omega_n \\ \vartheta^2 = a_1^{(3)} \cdot \omega_1 + a_2^{(3)} \cdot \omega_2 + \cdots + a_n^{(3)} \cdot \omega_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta^{n-1} = a_1^{(n)} \cdot \omega_1 + a_2^{(n)} \cdot \omega_2 + \cdots + a_n^{(n)} \cdot \omega_n, \end{array}\right\} \tag{6}$$

wo alle $a_j^{(i)}$ ganze rationale Zahlen sind und bekanntlich

$$k = \left| a_j^{(i)} \right| \tag{7}$$

ist. Aus (6) leitet man mittels (7) ab:

$$k \cdot \omega_i = b_0^{(i)} + b_1^{(i)} \cdot \vartheta + \cdots + b_{n-1}^{(i)} \cdot \vartheta^{n-1}, \tag{8}$$

wo alle $b_j^{(i)}$ auch ganze rationale Zahlen sind.

Wenn daher k *nicht durch* p *teilbar ist*, kann man eine solche Zahl l bestimmen, dass

$$k \cdot l \equiv 1 \pmod{p},$$

und daher folgt aus (8)

$$\omega_i \equiv l\,(b_0^{(i)} + b_1^{(i)} \cdot \vartheta + \cdots + b_{n-1}^{(i)} \cdot \vartheta^{n-1}) \pmod{p},$$

und dies zeigt:

Wenn p kein Indexteiler ist, so wird jede ganze Zahl α des Körpers (mod p) kongruent einer Zahl

$$a_0 + a_1 . \vartheta + \cdots + a_{n-1} . \vartheta^{n-1}, \tag{9}$$

wo alle a_i ganz rational sind.

Weiter folgt einfach, dass in diesem Falle zwei Zahlen $F_1(\vartheta)$ und $F_2(\vartheta)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten einander nur dann (mod p) kongruent sein können, wenn

$$F_1(x) \equiv F_2(x) \pmod{p, f(x)}.$$

Daraus folgt z. B., dass eine Zahl von der Form (9) nur dann durch p teilbar sein kann, wenn

$$a_0 \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_{n-1} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{10}$$

Unter den Zahlen (9) gibt es daher (mod p) p^n inkongruente Zahlen.[1]

Wenn aber k durch p teilbar ist, kann man nach der Theorie der linearen Kongruenzen eine solche ganze Zahl β von der Form (9) bestimmen, dass $\beta \equiv 0$ (mod p) ist, ohne dass (10) erfüllt ist. Umgekehrt ist dies auch eine hinreichende Bedingung dafür, dass p ein Indexteiler ist. Unter den Zahlen (9) gibt es daher in diesem Falle weniger als p^n inkongruente für den Modul p. Im nächsten Paragraphen soll aber eine untere Grenze für die Anzahl der inkongruenten Zahlen gegeben werden.

Sei allgemein k durch genau p^ϱ teilbar, also $k = p^\varrho . k_1$, wo k_1 nicht durch p teilbar ist; dann kann man ein l derart bestimmen, dass

$$k_1 . l \equiv 1 \pmod{p^{\varrho+1}}$$

und folglich nach (8)

$$\omega_i . p^\varrho \equiv l(b_0^{(i)} + b_1^{(i)} . \vartheta + \cdots + b_{n-1}^{(i)} . \vartheta^{n-1}) \pmod{p^{\varrho+1}}.$$

Daraus folgt:

Jede ganze Zahl des Körpers ist einer ganzen Zahl von der Form

$$\frac{1}{p^\varrho}(d_0 + d_1 \vartheta + \cdots + d_{n-1} . \vartheta^{n-1})$$

kongruent.

Dabei ist natürlich nicht gesagt, dass diese Zahlen alle ganz sind.

---

[1] Man sehe auch A, § 1.

Für die späteren Anwendungen soll nun der folgende wichtige Satz bewiesen werden:

Satz 18. Sei α eine ganze Zahl des Körpers, die durch alle verschiedenen Primidealteiler der Primzahl p teilbar ist. Wenn dann α der Gleichung

$$x^n + e_1 \,.\, x^{n-1} + \cdots + e_n = 0 \tag{11}$$

genügt, so ist

$$e_1 \equiv e_2 \equiv \cdots \equiv e_n \equiv 0 \pmod{p}.$$

Falls α durch p teilbar ist, wird der Satz beinahe selbstverständlich, wenn man erstens die Gleichung für die ganze Zahl $\frac{\alpha}{p}$ bildet und dann diese Gleichung mit p^n multipliziert. Wenn aber α nicht durch p teilbar ist, gibt es, da α durch alle Primidealfaktoren von p teilbar ist, einen solchen Exponenten a, dass

$$\alpha^a \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nach einem bekannten Satze ist nun, wenn man die Gleichung

$$x^n + e_1^{(1)} \,.\, x^{n-1} + \cdots + e_n^{(1)} = 0$$

bildet, deren Wurzeln die p^{ten} Potenzen der Wurzeln von (11) sind,

$$e_1 \equiv e_1^{(1)},\ e_2 \equiv e_2^{(1)},\ \ldots\ e_n \equiv e_n^{(1)} \pmod{p}.$$

Daraus folgt aber allgemein, dass, wenn man die Gleichung

$$x^n + e_1^{(m)} \,.\, x^{n-1} + \cdots + e_n^{(m)} = 0 \tag{12}$$

bildet, deren Wurzeln die $p^{m\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln von (11) sind,

$$e_1 \equiv e_1^{(m)},\ e_2 \equiv e_2^{(m)},\ \ldots\ e_n \equiv e_n^{(m)} \pmod{p} \tag{13}$$

ist. Wenn nun m so gross gewählt wird, dass $p^m > a$ ist, so muss α^{p^m} durch p teilbar sein, und folglich werden in (12) alle Koeffizienten durch p teilbar. Aus (13) folgt dann, dass auch in (11) alle Koeffizienten durch p teilbar werden, wodurch der Satz bewiesen ist.

§ 5. Über die Idealteiler der Primzahl p.

Es ist nun möglich, auch im allgemeinsten Falle verschiedene Eigenschaften der Idealteiler von p direkt aus der Primfunktionzerlegung (2) zu bestimmen.

Es soll zunächst untersucht werden, unter welchen Bedingungen eine Zahl α von der Form (9) durch p teilbar sein kann, oder allgemeiner, wann eine solche Zahl α durch alle verschiedenen Primidealteiler von p teilbar ist.

Sei $\alpha = A(\vartheta)$, wo

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{n-1}.$$

und $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal, das in p und daher auch in $A(\vartheta)$ aufgeht, indem vorausgesetzt wird, dass α durch alle Primidealteiler von p teilbar ist. Sei weiter $B(x)$ der grösste gemeinsame Faktor von $A(x)$ und $f(x)$ (mod p). Dann kann man solche Polynome $C(x)$ und $D(x)$ bestimmen, dass

$$C(x) \cdot f(x) + D(x) \cdot A(x) \equiv B(x) \pmod{p},$$

und daraus folgt, wenn $x = \vartheta$ gesetzt wird,

$$B(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

für alle Primidealteiler von p.

Man bildet jetzt die Gleichung

$$B(\vartheta)^n + e_1 \cdot B(\vartheta)^{n-1} + \cdots + e_n = 0 \tag{14}$$

welcher $B(x)$ genügt; dann sind hier nach Satz 17 alle Koeffizienten durch p teilbar. Die Gleichung (14) zeigt wegen der Irreduzibilität von $f(x)$, dass eine Identität

$$B(x)^n + e_1 B(x)^{n-1} + \cdots + e_n = f(x) \cdot F(x)$$

besteht, wo $F(x)$ ein Polynom ist. Daraus folgt aber

$$B(x)^n \equiv 0 \quad (\text{modd } p, f(x)),$$

und weil $B(x)$ ein Teiler von $f(x)$ (mod p) ist, folgt daraus, dass $B(x)$ (mod p) durch alle Primfunktionen teilbar ist, welche in $f(x)$ aufgehen. Man sieht daher ein, dass eine Zahl $A(\vartheta)$ nur dann durch alle verschiedenen Primidealteiler von p teilbar sein kann, wenn

$$A(x) \equiv 0 \quad (\text{modd } p, \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_r(x)).$$

Es folgt leicht, dass diese Bedingung eine hinreichende ist. Speziell ergibt sich aus diesen Untersuchungen das Resultat, dass es unter den Zahlen (9) mindestens

$$p^{m_1+m_2+\cdots+m_r}$$

inkongruente (mod p) gibt.

Es sollen nun ein paar Bemerkungen über die Zerlegung von p gemacht werden. Nach (1) und (2) ist

$$\varphi_1(\vartheta)^{e_1} \cdot \varphi_2(\vartheta)^{e_2} \ldots \varphi_r(\vartheta)^{e_r} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Hier können zwei Zahlen

$$\varphi_i(\vartheta),\ \varphi_j(\vartheta) \qquad i \neq j$$

keinen gemeinsamen Idealfaktor besitzen, der gleichzeitig in p aufgeht. Denn da $\varphi_i(x)$ zu $\varphi_j(x)$ relativ prim ist, kann man solche Polynome $A(x)$ und $B(x)$ bestimmen, dass

$$A(x) \cdot \varphi_i(x) + B(x) \cdot \varphi_j(x) \equiv 1 \pmod{p},$$

und wenn hier $x = \vartheta$ gesetzt wird, folgt leicht die Behauptung. Es ist daher bewiesen:

Wenn die Zerlegung von $f(x)$ (mod p) von der Form (2) ist, so wird

$$p = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_r$$

eine Idealzerlegung von p, wo alle Ideale $\mathfrak{a}_i$ zu einander relativ prim sind und

$$\mathfrak{a}_i = (p,\ \varphi_i(\vartheta)^{e_i}).$$

Diese Ideale $\mathfrak{a}_i$ können nicht Einheitsideale sein, denn wäre z. B. $\varphi_1(\vartheta)$ zu p relativ prim, so wäre schon das Produkt

$$\varphi_2(\vartheta) \ldots \varphi_r(\vartheta)$$

durch alle Primidealteiler von p teilbar, was nach dem eben Bewiesenen unmöglich ist.

Sei nun $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal, das gleichzeitig in p und $\varphi_i(\vartheta)$ aufgeht. Wenn dann eine Zahl $\alpha = A(\vartheta)$ von der Form (9) durch $\mathfrak{p}_i$ teilbar sein soll, so muss

$$A(x) \equiv 0 \ (\text{modd } p,\ \varphi_i(x))$$

sein. Denn wenn dies nicht der Fall wäre, könnte man solche Polynome $B(x)$ und $C(x)$ bestimmen, dass

$$A(x) \cdot B(x) + \varphi_i(x) \cdot C(x) \equiv 1 \pmod{p},$$

woraus sich für $x = \vartheta$ ergibt

$$A(\vartheta) \cdot B(\vartheta) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i},$$

was nicht möglich ist. Auf Grund dieser Bemerkung folgt, dass es mindestens p^{m_i} inkongruente Zahlen (mod $\mathfrak{p}_i$) gibt, und der Grad von $\mathfrak{p}_i$ kann daher nicht kleiner als m_i sein.

Man kann nun zeigen, dass der Grad von $\mathfrak{p}_i$ immer durch m_i teilbar sein muss. Es sei nämlich $\varphi(x)$ eine Primfunktion, welche (mod p) in $f(x)$ aufgeht, und $\mathfrak{p}$ ein Primideal, wofür

$$\varphi(\vartheta) \equiv p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Wenn dann f den Grad von $\mathfrak{p}$ bezeichnet, so ist

$$N\mathfrak{p} = p^f,$$

und alle ganzen Zahlen ω des Körpers genügen der Kongruenz

$$\omega^{p^f} - \omega \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{15}$$

Sei jetzt $\Pi(x)$ das Produkt aller Primfunktionen $F(x)$ (mod p), deren Grade Teiler von f sind; dann ist bekanntlich

$$\Pi(x) \equiv x^{p^f} - x \pmod{p}.$$

Nach (15) ist aber auch

$$\vartheta^{p^f} - \vartheta \equiv 0 \pmod{p},$$

folglich gibt es unter den Primfunktionen $F(x)$ eine derart, dass

$$F(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

und nach den früheren Bemerkungen muss man dann notwendigerweise

$$F(x) \equiv 0 \;(\text{modd } p, \varphi(x))$$

haben. Da aber $F(x)$ selbst eine Primfunktion ist, folgt

$$F(x) \equiv \varphi(x) \pmod{p},$$

und daher ist der Grad m von $\varphi(x)$ ein Teiler von f, also auch

$$N\mathfrak{p} = p^{e \cdot m},$$

wo e eine ganze Zahl ist.

§ 6. Erste Verallgemeinerung der Dedekindschen Untersuchungen.

Die letzten Untersuchungen gestatten schon unter Anwendung des Satzes 16 die Bestimmung der Primideale von p in allgemeineren Fällen als die Dedekindschen Untersuchungen.

Es sei

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{l_1} \cdot \varphi_2(x)^{l_2} \dots \varphi_r(x)^{l_r} \pmod{p} \tag{16}$$

die Primfunktionzerlegung (mod p) von $f(x)$, und es werde vorausgesetzt, dass die Hauptpolygone L_i der Entwickelungen $(p, \varphi_i(x))$ sämtlich geradlinig sind. Die Projektion von L_i auf die X-achse wird dann l_i, und die Projektion auf die Y-achse soll h_i sein, wo weiter vorausgesetzt werden soll, dass h_i zu l_i relativ prim ist. Nach Satz 15 ist offenbar der Fall von Dedekind in diesem allgemeineren enthalten.

Nach § 4 gibt es nun immer mindestens einen gemeinsamen Primidealfaktor $\mathfrak{p}_i$ für p und $\varphi_i(\vartheta)$, und nach Satz 16 muss dieser in einer Potenz in p aufgehen, wo der Exponent ein Multiplum von l_i ist, also etwa in der Potenz $\alpha_i \cdot l_i$. Weiter ist aber nach § 4

$$N \mathfrak{p}_i = p^{\beta_i \cdot m_i},$$

wo β_i eine ganze Zahl ist. Es soll nun gezeigt werden, dass es nur ein einziges solches Primideal $\mathfrak{p}_i$ für alle i gibt. Man hat nämlich

$$p = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1 \cdot l_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{\alpha_2 \cdot l_2} \dots \dots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r \cdot l_r} \cdot P, \tag{17}$$

wo das Ideal P durch alle Primideale von p teilbar ist, welche von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_r$ verschieden sind. Es soll aber nun gezeigt werden, dass P in der Tat das Einheitsideal ist, also $NP = 1$. Denn nimmt man auf den beiden Seiten von (17) die Norm, so kommt

$$p^n = p^{\Sigma \gamma_i \cdot m_i \cdot l_i} \cdot NP, \tag{18}$$

wo der Kürze wegen

$$\gamma_i = \alpha_i \cdot \beta_i \geqq 1$$

gesetzt worden ist. Dies zeigt aber, dass man immer $\gamma_i = 1$ haben muss, denn es ist doch

$$n = \sum_{i=1}^{r} m_i \cdot l_i,$$

und wenn daher einige der γ_i grösser als 1 wären, so würde in (18) die rechte Seite durch eine höhere Potenz von p als die linke teilbar. Weiter folgt aus (18), dass $NP = 1$ ist.

Es ist folglich bewiesen, dass

$$p = \mathfrak{p}_1^{l_1} . \mathfrak{p}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r}, \tag{19}$$

die Primidealzerlegung von p ist. Es bleibt also nur übrig, die Primideale $\mathfrak{p}_i$ als grösste gemeinsame Faktoren von Hauptidealen darzustellen. Nach Satz 16 folgt aus (19)

$$\varphi_i(\vartheta) = \mathfrak{p}_i^{h_i} . \Phi,$$

wo Φ zu p relativ prim ist. Es soll nun die Bezeichnung

$$\Pi_i(x) = \varphi_1(x)^{l_1} \ldots \varphi_{i-1}(x)^{l_{i-1}} . \varphi_{i+1}(x)^{l_{i+1}} \ldots \varphi_r(x)^{l_r}$$

eingeführt werden. Weiter kann man, da l_i zu h_i relativ prim ist, solche ganze rationale positive Zahlen x_i und y_i bestimmen, dass

$$h_i . x_i - l_i . y_i = 1. \tag{20}$$

Dann ist

$$T = \Pi_i(\vartheta)^{y_i} . \frac{\varphi_i(\vartheta)^{x_i}}{p^{y_i}}$$

eine ganze Zahl. Denn $\Pi_i(\vartheta)$ ist nach § 4 durch alle Idealteiler von p teilbar, welche zu $\varphi_i(\vartheta)$ relativ prim sind. Das Primideal $\mathfrak{p}_i$ dagegen geht in p^{y_i} in der Potenz $\mathfrak{p}_i^{l_i \cdot y_i}$ auf, während $\varphi_i(\vartheta)^{x_i}$ genau durch $\mathfrak{p}_i^{h_i \cdot x_i}$ teilbar ist. T ist daher nach (20) eine ganze Zahl, welche genau durch $\mathfrak{p}_i$ in der ersten Potenz teilbar ist.

Man hat daher

$$\mathfrak{p}_i = (p, \varphi_i(\vartheta), T)$$

und kann den Satz aussprechen:

Satz 19. Es sei

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{l_1} \ldots\ldots \varphi_r(x)^{l_r} \pmod{p}$$

und die Hauptpolygone der Entwickelungen $(p, \varphi_i(x))$ seien sämtlich Geraden mit den Neigungen $\frac{h_i}{l_i}$, wo h_i zu l_i relativ prim ist. Man bestimme x_i und y_i derart, dass

$$x_i . h_i - y_i . l_i = 1,$$

und setze

$$\Pi_i(x) = \varphi_1^{l_1} \ldots \varphi_{i-1}^{l_{i-1}} \cdot \varphi_{i+1}^{l_{i+1}} \ldots \varphi_r^{l_r}.$$

Dann ist

$$p = \mathfrak{p}_1^{l_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r},$$

wo das Primideal $\mathfrak{p}_i$ *den Grad* m_i *hat und*

$$\mathfrak{p}_i = \left(p,\, \varphi_i(\vartheta),\, \Pi_i(\vartheta)^{y_i} \cdot \frac{\varphi_i(\vartheta)^{x_i}}{p^{y_i}}\right)$$

ist.

Wenn hier für alle i entweder $l_i = 1$ oder $h_i = 1$ ist, kommt man zu dem Falle von Dedekind, und man leitet aus Satz 18 ohne Schwierigkeiten die Dedekindschen Ergebnisse ab. Denn wenn in diesem Falle $\mathfrak{p}_i$ ein gemeinsamer Primidealteiler von p und $\varphi_i(\vartheta)$ ist, so geht dieser entweder in p oder in $\varphi_i(\vartheta)$ in genau der ersten Potenz auf, und man hat daher

$$\mathfrak{p}_i = (p,\, \varphi_i(\vartheta)).$$

§ 7. Ein geradliniges Polygon.

Es soll nun allgemein der Fall behandelt werden, dass alle Hauptpolygone in den Entwickelungen $(p, \varphi_i(x))$ Geraden sind. Um aber diese Verhältnisse ganz klar zu machen, werde ich zunächst den einfachsten Fall behandeln, dass $f(x)$ (mod p) nur durch eine einzige Primfunktion $\varphi(x)$ teilbar ist, also

$$f(x) \equiv \varphi(x)^l \pmod{p} \tag{21}$$

und das Polygon $(p, \varphi(x))$ eine Gerade L ist.

Sei

$$\frac{h}{l} = \frac{e \cdot \varkappa}{e \cdot \lambda} = \frac{\varkappa}{\lambda}$$

die Neigungszahl für L. Nach § 5. II kann man

$$f(x) = \varphi(x)^l + A_1(x) \cdot p^{\overline{\frac{h}{l}}} \cdot \varphi(x)^{l-1} + A_2(x) \cdot p^{\overline{\frac{2h}{l}}} \cdot \varphi(x)^{l-2} + \cdots + A_l(x) \cdot p^h$$

annehmen, und man hat dann mit den früheren Bezeichnungen

$$f(x) \equiv \varphi(x)^l + B_1(x) \cdot p^{\varkappa} \cdot \varphi(x)^{l-\lambda} + \cdots + B_e(x)\, p^h \pmod{L}$$

$$B_i(x) = A_{i\lambda}(x) \qquad B_e(x) \not\equiv 0 \pmod{p,\, \varphi(x)}.$$

Weiter sei

$$f(x) \equiv f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_s(x) \pmod{L} \tag{22}$$

die Primfunktionzerlegung von $f(x)$ (mod L), wo

$$f_i(x) = \varphi(x)^{\varepsilon_i \cdot \lambda} + C_1^{(i)}(x) \cdot p^{\varkappa} \cdot \varphi(x)^{(\varepsilon_i - 1)\lambda} + \cdots + C_{\varepsilon_i}^{(i)}(x) \cdot p^{\varepsilon_i \cdot \varkappa} \tag{23}$$

und daher

$$n = m \cdot \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_s).$$

Es soll nun die Voraussetzung gemacht werden, dass in (22) alle Primfunktionen (mod L) verschieden sind.

Nach (21) ist

$$\varphi(\vartheta)^l \equiv 0 \pmod{p},$$

und alle Primidealteiler von p gehen also in $\varphi(\vartheta)$ auf. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von p, so ist

$$\left.\begin{aligned} p &= \mathfrak{p}^s \cdot \mathfrak{p}_1 \\ \varphi(\vartheta) &= \mathfrak{p}^t \cdot \mathfrak{p}_2 \end{aligned}\right\}, \tag{24}$$

wo die Ideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind. Nach Satz 16 ist dann

$$\frac{s}{t} = \frac{\lambda}{\varkappa}$$

oder

$$s \cdot \varkappa = t \cdot \lambda.$$

Aus dieser Gleichheit folgt, dass die Zahlen $p^{\varkappa}$ und $\varphi(\vartheta)^{\lambda}$ durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar sind. Daher ist, weil dies für alle Primidealteiler von p richtig ist,

$$\theta(\vartheta) = \frac{\varphi(\vartheta)^{\lambda}}{p^{\varkappa}}, \quad \theta(\vartheta)^e = \frac{\varphi(\vartheta)^l}{p^h}$$

eine ganze Zahl des Körpers, und diese Zahl ist ausserdem zu p relativ prim.

Wenn man (24) in die Gleichung $f(\vartheta) = 0$ einsetzt, so sieht man ein, dass alle Glieder in $f(x)$, deren repräsentierende Punkte auf L liegen, genau durch

$$\mathfrak{p}^{s \cdot h} = \mathfrak{p}^{t \cdot l}$$

teilbar werden müssen. Alle übrigen Glieder in $f(x)$ werden gewiss durch höhere Potenzen von $\mathfrak{p}$ teilbar.

Es soll nun $f(\vartheta)$ durch p^h dividiert werden, und man erhält

$$\frac{f(\vartheta)}{p^h} = \psi_1(\vartheta, \theta(\vartheta)) \,.\, \psi_2(\vartheta, \theta(\vartheta)) \ldots \psi_s(\vartheta, \theta(\vartheta)) + M(\vartheta), \tag{25}$$

wo

$$\psi_i(x, y) = y^{\varepsilon_i} + C_1^{(i)}(x) \,.\, y^{\varepsilon_i - 1} + \cdots + C_{\varepsilon_i}^{(i)}(x)$$

und daher

$$\psi_i(\vartheta, \theta(\vartheta)) = \frac{f_i(\vartheta)}{p^{\varepsilon_i \cdot \varkappa}} = \theta(\vartheta)^{\varepsilon_i} + C_1^{(i)}(\vartheta) \,.\, \theta(\vartheta)^{\varepsilon_i - 1} + \cdots + C_{\varepsilon_i}^{(i)}(\vartheta). \tag{26}$$

In (25) ist weiter

$$M(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

für alle Primidealteiler von p und daraus folgt weiter aus (25), dass das Produkt

$$F(\vartheta, \theta(\vartheta)) = \psi_1(\vartheta, \theta(\vartheta)) \ldots \psi_s(\vartheta, \theta(\vartheta))$$

durch alle Primidealteiler von p teilbar sein muss, eine Tatsache, die man auch einfach aus dem Satze 17 ableitet. Der Kürze wegen ist hier

$$F(x, y) = \psi_1(x, y) \ldots \psi_s(x, y)$$

gesetzt worden.

Es soll nun das Ideal

$$\mathfrak{a}_i = [p, \psi_i(\vartheta, \theta(\vartheta))]$$

untersucht werden und zwar erstens gezeigt werden, dass $\mathfrak{a}_i$ kein Einheitsideal ist.

Anstatt der natürlichen Ordnung

$$[1, \vartheta, \ldots \vartheta^{n-1}],$$

welche in § 4 untersucht worden ist, sollen hier alle ganzen Zahlen von der Form

$$A(\vartheta, \theta(\vartheta)) = A_1(\vartheta) \,.\, \theta(\vartheta)^{e-1} + A_2(\vartheta) \,.\, \theta(\vartheta)^{e-2} + \cdots + A_e(\vartheta), \tag{27}$$

untersucht werden, wo die $A_i(\vartheta)$ beliebige Polynome in ϑ sind.

Es soll nun erstens untersucht werden, wann eine solche Zahl durch alle Primidealteiler von p teilbar sein kann. Es sei jetzt $A(\vartheta, \theta(\vartheta))$ eine gegebene Zahl von dieser Eigenschaft. Man kann dann den grössten gemeinsamen Faktor

$B(x, y)$ von $A(x, y)$ und $F(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) bilden und nach § 1. I ist es immer möglich solche Funktionen $C(x, y)$ und $D(x, y)$ zu bestimmen, dass

$$C(x, y) \cdot F(x, y) + D(x, y) \cdot A(x, y) \equiv B(x, y) \pmod{p, \varphi(x)}.$$

Daraus folgt sofort, wenn $x = \vartheta$, $y = \theta(\vartheta)$ gesetzt wird, dass auch $B(\vartheta, \theta(\vartheta))$ durch alle Primidealfaktoren von p teilbar sein muss. Ohne der Allgemeinheit zu schaden, kann man nun annehmen, dass in $B(\vartheta, \theta(\vartheta))$ der höchste Koeffizient für $\theta(\vartheta)$ gleich 1 ist. Denn wäre er etwa $B_0(\vartheta)$, so kann man immer ein $C_0(x)$ derart finden, dass

$$C_0(x) \cdot B_0(x) \equiv 1 \pmod{p, \varphi(x)}$$

ist, und die obige Kongruenz mit $C_0(x)$ multiplizieren. Man kann also

$$B(x, y) = y^{\varepsilon} + C_1(x) \cdot y^{\varepsilon-1} + \cdots + C_{\varepsilon}(x)$$

annehmen, und daher ist

$$p^{\varepsilon \cdot \varkappa} \cdot B(x, \theta(x)) = B'(x) = \varphi(x)^{\varepsilon \cdot \lambda} + C_1(x) \cdot p^{\varkappa} \varphi(x)^{(\varepsilon-1)\lambda} + \cdots + C_{\varepsilon}(x) \cdot p^{\varepsilon \cdot \varkappa}.$$

Es wird jetzt die Gleichung

$$B^n + e_1 \cdot B^{n-1} + \cdots + e_n = 0$$

gebildet, welcher die Zahl $B(\vartheta, \theta(\vartheta))$ genügt, wo nach Satz 18 alle e_i durch p teilbar sind. Diese Gleichung zeigt aber wegen der Irreduzibilität von $f(x)$, dass eine Identität

$$B(x, \theta(x))^n + e_1 \cdot B(x, \theta(x))^{n-1} + \cdots + e_n = f(x) \cdot g(x) \tag{28}$$

besteht. Wenn diese Identität mit $p^{\varepsilon \cdot \varkappa \cdot n}$ multipliziert wird, geht sie in die ganzzahlige Gleichheit

$$B'(x)^n + e_1 \cdot p^{\varepsilon \cdot \varkappa} \cdot B'(x)^{n-1} + \cdots + e_n \cdot e^{\varepsilon \cdot \varkappa \cdot n} = f(x) \cdot g_1(x)$$

über, und hier hat die linke Seite $(p, \varphi(x))$ das Polygon L und ist (mod L) kongruent

$$B'(x)^n.$$

Daher hat auch die rechte Seite das Polygon L, und wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung (mod L) sieht man ein, dass $B'(x)$ (mod L) durch $f(x)$ teilbar ist. Daraus folgt aber weiter, dass $B(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch $F(x, y)$ teilbar sein

muss, und da $A(x, y)$ nach (27) höchstens vom Grade $e-1$ in y ist, muss man

$$A_1(x) \equiv A_2(x) \equiv \cdots \equiv A_e(x) \equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)} \tag{29}$$

haben.

Daraus folgt leicht, dass ein Ideal $\mathfrak{a}_i$ nicht das Einheitsideal sein kann. Denn wenn $\mathfrak{a}_i$ ein Einheitsideal wäre, müsste schon das Produkt

$$\psi_1(\vartheta, \theta(\vartheta)) \ldots \psi_{i-1}(\vartheta, \theta(\vartheta)) \psi_{i+1}(\vartheta, \theta(\vartheta)) \ldots \psi_s(\vartheta, \theta(\vartheta))$$

durch alle Primidealteiler von p teilbar sein, was nach dem eben Bewiesenen nicht möglich ist.

Es sei daher $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal, das in $\mathfrak{a}_i$ aufgeht. Wenn eine Zahl von der Form (27) durch $\mathfrak{p}_i$ teilbar sein soll, muss die Funktion $A(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch $\psi_i(x, y)$ teilbar sein. Denn wenn dies nicht der Fall wäre, könnte man solche Funktionen $B(x, y)$ und $C(x, y)$ bestimmen, dass

$$A(x, y) \,.\, B(x, y) + \psi_i(x, y) \,.\, C(x, y) \equiv 1 \pmod{p, \varphi(x)}$$

und folglich

$$A(\vartheta, \theta(\vartheta)) \,.\, B(\vartheta, \theta(\vartheta)) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i}$$

wäre, was offenbar nicht möglich ist.

Dies zeigt, dass es unter den Zahlen (27) immer mindestens $p^{\varepsilon_i \cdot m}$ inkongruente für das Ideal $\mathfrak{p}_i$ gibt, und daher ist der Grad f_i von $\mathfrak{p}_i$ sicher nicht kleiner als $\varepsilon_i \,.\, m$.

f_i ist nach § 4 immer durch m teilbar, also etwa $f_i = e_i \,.\, m$. Man kann aber weiter zeigen, dass e_i immer durch ε_i teilbar sein muss. Denn da jede ganze Zahl des Körpers der Kongruenz

$$\omega^{p^{e_i \cdot m}} - \omega \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i}$$

genügt, so ist auch

$$\theta(\vartheta)^{p^{e_i \cdot m}} - \theta(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i}.$$

Nach Satz 2. I ist aber

$$y^{p^{e_i \cdot m}} - y$$

kongruent dem Produkt aller Primfunktionen $H(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$), deren Grade Teiler von e_i sind. Es muss daher eine solche Primfunktion $H(x, y)$ geben, dass

$$H(\vartheta, \theta(\vartheta)) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i},$$

und daraus folgt nach den, früheren Bemerkungen, dass $H(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch $\psi_i(x, y)$ teilbar und, da diese Funktionen beide Primfunktionen sind,

$$H(x, y) \equiv \psi_i(x, y) \pmod{p, \varphi(x)}$$

sein muss, also beide von demselben Grade sein müssen, und daraus folgt sofort, dass ε_i ein Teiler von e_i ist.

Man hat daher

$$N\mathfrak{p}_i = p^{\alpha_i \cdot \varepsilon_i \cdot m},$$

wo α_i eine ganze Zahl ≥ 1 ist. Weiter geht $\mathfrak{p}_i$ in p in einer Potenz auf, deren Exponent ein Multiplum von λ ist, und folglich wird das Ideal

$$p' = (\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_s)^\lambda$$

sicher ein Teiler von p. Hier ist

$$Np' = p^{m \cdot \lambda \cdot \sum\limits_1^s \alpha_i \cdot \varepsilon_i}, \quad Np = p^n,$$

und es muss

$$n \geqq m \cdot \lambda \cdot (\alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2 + \cdots + \alpha_s \cdot \varepsilon_s)$$

sein. Da aber

$$n = m \cdot \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_s)$$

ist, muss notwendigerweise

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 1$$

sein, und da dann $Np' = p^n$ wird, muss auch

$$p = (\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_s)^\lambda$$

die Primidealzerlegung von p sein.

Daraus folgt nach Satz 16, dass auch

$$\varphi(\vartheta) = (\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_s)^\varkappa \cdot \Phi,$$

wo das Ideal Φ zu p relativ prim ist.

Es soll nun das Primideal $\mathfrak{p}_i$ bestimmt werden. $\mathfrak{p}_i$ war ein Teiler des Ideals $\mathfrak{a}_i$; dieses Ideal kann aber nicht durch andere Primideale teilbar sein, denn sonst würde man nach den obigen Schlüssen $Np > p^n$ erhalten, was offenbar nicht möglich ist. Es muss daher $\mathfrak{a}_i$ eine Potenz von $\mathfrak{p}_i$ sein.

Man bestimme nun die positiven Zahlen x und y derart, dass

$$x \cdot \varkappa - y \cdot \lambda = 1$$

ist, was immer möglich ist, da $\varkappa$ zu λ relativ prim ist. Dann wird die Zahl

$$\frac{\varphi(\vartheta)^x}{p^y}$$

ganz und durch jedes Primideal $\mathfrak{p}_i$ genau in der ersten Potenz teilbar. Denn $\mathfrak{p}_i$ geht im Zähler genau in der Potenz $x \cdot \varkappa$ und im Nenner in der Potenz $y \cdot \lambda$ auf, und da $x \cdot \varkappa > y \cdot \lambda$, ist die Zahl ganz und, wie man leicht sieht, durch $\mathfrak{p}_i$ genau in der ersten Potenz teilbar. Man erhält daher für $\mathfrak{p}_i$ die Darstellung:

$$\mathfrak{p}_i = \left(p, \frac{\varphi(\vartheta)^x}{p^y}, \psi_i(\vartheta, \theta(\vartheta))\right).$$

Man kann die Resultate folgendermassen in einem Satze zusammenfassen:

Satz 20. Sei

$$f(x) \equiv \varphi(x)^l \pmod{p}$$

und das Polygon $(p, \varphi(x))$ *eine Gerade* L *von der Neigung* $\frac{\varkappa}{\lambda}$ *und*

$$f(x) \equiv f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_s(x) \pmod{L},$$

wo alle Primfunktionen $f_i(x)$ *verschieden sind und* $f_i(x)$ *vom Grade* $\varepsilon_i \cdot m$ *in* x *ist. Dann hat man für* p *die Primidealzerlegung*

$$p = (\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_s)^\lambda.$$

Das Primideal $\mathfrak{p}_i$ *ist vom Grade* $\varepsilon_i \cdot m$ *und durch*

$$\mathfrak{p}_i = \left(p, \frac{\varphi(\vartheta)^x}{p^y}, \frac{f_i(\vartheta)}{p^{\varepsilon_i \cdot \varkappa}}\right)$$

bestimmt, wo die positiven, ganzen rationalen Zahlen x *und* y *die Gleichung* $x \cdot \varkappa - y \cdot \lambda = 1$ *erfüllen.*

Dadurch ist der einfachste Fall erledigt, und man sieht ein, dass es für diese Seite gewisse Primideale gibt, deren Produkt in der λ^{ten} Potenz in p aufgeht. Ein ganz analoges Verhältnis hat man, wenn das betrachtete Polygon mehrere Seiten besitzt und wenn gleichzeitig mehrere Polygone vorkommen. Die Untersuchungen in diesem Paragraphen beruhen hauptsächlich darauf, dass die Zahlen $\theta(\vartheta)^i$ ganz sind. Bei allgemeineren Polygonen kommt die Schwierigkeit hinzu,

dass die für jede Seite entsprechend gebildeten Zahlen nicht mehr ganz werden und daher das hier angewandte Schlussverfahren modifiziert werden muss. Unter den Voraussetzungen des nächsten Paragraphen kann diese Schwierigkeit ziemlich einfach überwunden werden, erst im nächsten Kapitel wird gezeigt, wie man unter den allgemeinsten Voraussetzungen vorgehen kann.

§ 8. Geradlinige Polygone im Allgemeinen.

Nachdem der Fall behandelt worden ist, dass $f(x)$ (mod p) nur durch eine Primfunktion teilbar und das Polygon $(p, \varphi(x))$ eine Gerade ist, überführt man dieses Resultat ziemlich analog auf den Fall, dass

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{l_1} \cdot \varphi_2(x)^{l_2} \ldots \varphi_s(x)^{l_s} \pmod{p}$$

und das Hauptpolygon $(p, \varphi_i(x))$ für alle i eine Gerade L_i ist. $\frac{\varkappa_i}{\lambda_i} = \frac{h_i}{l_i}$ sei die Neigungszahl für L_i. Man bestimmt die Primfunktionzerlegung von $f(x)$ (mod L_i), und es soll angenommen werden, dass die Primfunktionen

$$f_1^{(i)}(x), \; f_2^{(i)}(x), \ldots f_{t_i}^{(i)}(x)$$

alle (mod L_i) verschieden sind und der Grad von $f_j^{(i)}(x)$ in $\varphi_i(x)^{\lambda_i}$ gleich $\varepsilon_j^{(i)}$ ist.

Es sei nun der Kürze wegen $\varphi_i(x) = \varphi(x)$ gesetzt und

$$f(x) \equiv \pi(x) \cdot \varphi(x)^l \pmod{p}, \tag{30}$$

wo $\pi(x)$ zu $\varphi(x)$ (mod p) relativ prim und das Hauptpolygon L zu $f(x)$ $(p, \varphi(x))$ geradlinig und von der Neigungszahl $\frac{h}{l}$ ist. Aus (30) folgt

$$f(x) \equiv \Pi(x) \cdot \Phi(x) \pmod{p^{h+1}}, \tag{31}$$

wo $\Phi(x) \equiv \varphi(x)^l$ (mod p). Die Zahl $\Pi(\vartheta)$ ist daher durch alle Idealteiler von p^{h+1} teilbar, welche zu $\varphi(\vartheta)$ relativ prim sind. Es soll nun

$$\theta(\vartheta) = \frac{\varphi(\vartheta)^\lambda}{p^\varkappa}$$

gesetzt werden, aber diese Zahl ist nicht wie in § 7 ganz. Die Zahlen

$$\Pi(\vartheta) \cdot \theta(\vartheta)^\varepsilon = \Pi(\vartheta) \cdot \left(\frac{\varphi(\vartheta)^\lambda}{p^\varkappa}\right)^\varepsilon \quad (\varepsilon = 1, 2, \ldots e) \tag{32}$$

sind dagegen alle ganz. Denn wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, wofür

$$p = \mathfrak{p}^s . \mathfrak{p}_1, \ \varphi(\vartheta) = \mathfrak{p}^t . \mathfrak{p}_2,$$

so ist $\frac{s}{t} = \frac{\lambda}{\varkappa}$, und daraus folgt, dass die Zahlen (32) alle ganz und nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind.

Sei nun

$$\Phi(x) \equiv f_1(x) \dots f_t(x) \pmod{L},$$

wo

$$f_j(x) = \varphi(x)^{\varepsilon_j \cdot \lambda} + C_1^{(j)}(x) . p^{\varkappa} . \varphi(x)^{(\varepsilon_j - 1)\lambda} + \dots + C_{\varepsilon_j}^{(j)}(x) . p^{\varepsilon_j \cdot \varkappa}.$$

Wenn man dann die Kongruenz (31) durch p^h dividiert, erhält man

$$\frac{f(\vartheta)}{p^h} = \psi_1(\vartheta, \theta(\vartheta)) \dots \psi_i(\vartheta, \theta(\vartheta)) . \Pi(\vartheta) + M(\vartheta),$$

wo $M(\vartheta)$ durch alle Primidealteiler von p teilbar wird, und daher hat auch die Zahl

$$\Pi(\vartheta)\, \psi_1(\vartheta, \theta(\vartheta)) \dots \psi_t(\vartheta, \theta(\vartheta))$$

diese Eigenschaft. Dabei bedeutet

$$\psi_j(x, y) = y^{\varepsilon_j} + C_1^{(j)}(x) . y^{\varepsilon_j - 1} + \dots + C_{\varepsilon_j}^{(j)}(x),$$

und weiter soll

$$F(x, y) = \psi_1(x, y) \dots \psi_t(x, y)$$

gesetzt werden.

Es sollen nun alle Zahlen von der Form

$$\Pi(\vartheta) . A(\vartheta, \theta(\vartheta)) = \Pi(\vartheta)\,(A_0(\vartheta) + A_1(\vartheta) . \theta(\vartheta) + \dots + A_{e-1}(\vartheta) . \theta(\vartheta)^{e-1}) \tag{33}$$

untersucht werden, wo die $A_i(\vartheta)$ Polynome in ϑ bedeuten. Diese Zahlen spielen für diese Untersuchungen eine ganz analoge Rolle wie früher die Zahlen (27). Speziell soll untersucht werden, wann eine Zahl $\Pi(\vartheta) A(\vartheta, \theta(\vartheta))$ durch alle Primidealteiler von p teilbar sein kann, und da diese Zahl immer durch alle Primideale von p teilbar ist, welche nicht in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen, bleibt nur übrig zu untersuchen, wann eine solche Zahl durch alle Primidealteiler von $(p, \varphi(\vartheta))$ teilbar ist.

Die Zahl (33) sei nun durch alle Primidealfaktoren von p teilbar. Man bildet dann den grössten gemeinsamen Faktor $B(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) von $A(x, y)$ und $F(x, y)$ und hat

$$A(x, y) . C(x, y) + F(x, y) . D(x, y) \equiv B(x, y) \ (\text{modd } p, \varphi(x)),$$

wo die Funktionen $C(x, y)$ und $D(x, y)$ immer bestimmt werden können. Wenn diese Kongruenz mit $\Pi(x)^2$ multipliziert und $x = \vartheta$ gesetzt wird, folgt, dass auch

$$\Pi^2(\vartheta) \,.\, B(\vartheta, \theta(\vartheta))$$

durch alle Primideale von p teilbar ist, und daraus folgt ohne Weiteres, dass

$$b = \Pi(\vartheta) \,.\, B(\vartheta, \theta(\vartheta))$$

diese Eigenschaft besitzt. Man kann hier wie früher annehmen, dass $B(x, y)$ von der Form

$$B(x, y) = y^{\varepsilon} + C_1(x) \,.\, y^{\varepsilon - 1} + \cdots + C_{\varepsilon}(x)$$

und daher

$$p^{\varepsilon \cdot \varkappa} \,.\, B(x, \theta(x)) = B'(x) = \varphi(x)^{\varepsilon \cdot \lambda} + C_1(x) \,.\, p^{\varkappa} \,.\, \varphi(x)^{(\varepsilon - 1)\lambda} + \cdots + C_{\varepsilon}(x) \,.\, p^{\varepsilon \cdot \varkappa}$$

ein Polynom mit dem Polygone $L(p, \varphi(x))$ ist.

Man bildet nun die Gleichung

$$b^n + b^{n-1} \,.\, e_1 + \cdots + e_n = 0,$$

welcher b genügt und welche besagt, dass eine Identität

$$\Pi(x)^n \,.\, B(x, \theta(x))^n + \cdots + e_n = f(x) \,.\, g(x)$$

besteht, wo nach Satz 18 alle e_i durch p teilbar sind. Wenn diese Identität mit $p^{\varepsilon \cdot \varkappa \cdot n}$ multipliziert wird, geht sie in

$$\Pi(x)^n \,.\, B'(x)^n + e_1 \,.\, p^{\varepsilon \cdot \varkappa} \,.\, \Pi(x)^{n-1} \,.\, B'(x)^{n-1} + \cdots + p^{\varepsilon \cdot \varkappa \cdot n} = f(x) \,.\, g_1(x)$$

über, und wie man leicht einsieht, hat hier die linke Seite das geradlinige Hauptpolygon L und ist kongruent $B'(x)^n \pmod{L}$. Für die rechte Seite muss das Hauptpolygon $(p, \varphi(x))$ daher auch gleich L sein, und es folgt, dass $B'(x) \pmod{L}$ durch das Produkt $f_1(x) \,.\, f_2(x) \ldots f_t(x)$ teilbar sein muss. Dies ist aber nur möglich, wenn $B(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch $F(x, y)$ teilbar ist, und dies zeigt natürlich, dass in $A(x, y)$ alle Koeffizienten kongruent Null (modd p, $\varphi(x)$) sind. Eine Zahl von der Form (33) kann also nicht durch alle Primidealfaktoren von p teilbar sein, ausser wenn

$$A_0(x) \equiv A_1(x) \equiv \cdots \equiv A_{e-1}(x) \equiv 0 \text{ (modd } p, \varphi(x)).$$

Es sollen nun die Ideale

$$\mathfrak{a}_j = (p, \varphi(\vartheta), \, \Pi(\vartheta) \, . \, \psi_j(\vartheta, \theta(\vartheta))$$

untersucht werden und zwar soll erstens gezeigt werden, dass $\mathfrak{a}_j$ nicht das Einheitsideal sein kann. Denn wäre $\psi_j(\vartheta, \theta(\vartheta)) \, . \, \Pi(\vartheta)$ zu $(p, \varphi(\vartheta))$ relativ prim, so wäre schon

$$\Pi(\vartheta) \, \psi_1 \ldots \psi_{j-1} \, . \, \psi_{j+1} \ldots \psi_t$$

durch alle Primideale von p teilbar, was nach dem Bewiesenen nicht möglich ist.

Es sei daher $\mathfrak{p}_j$ ein Primideal, das in $\mathfrak{a}_j$ aufgeht. Eine Zahl

$$\Pi(\vartheta) \, . \, A(\vartheta, \theta(\vartheta))$$

kann dann nicht durch $\mathfrak{p}_j$ teilbar sein, ausser wenn $A(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch $\psi_j(x, y)$ teilbar ist. Denn wenn dies nicht der Fall wäre, könnte man solche Funktionen $C(x, y)$ und $D(x, y)$ bestimmen, dass

$$A(x, y) \, . \, C(x, y) + \psi_j(x, y) \, . \, D(x, y) \equiv 1 \pmod{p, \varphi(x)},$$

woraus durch Multiplikation mit $\Pi(x)^2$ und für $x = \vartheta$, $y = \theta(\vartheta)$ folgt:

$$\Pi(\vartheta) \, . \, A(\vartheta, \theta(\vartheta)) \, . \, \Pi(\vartheta) \, . \, C(\vartheta, \theta(\vartheta)) \equiv \Pi(\vartheta)^2 \pmod{\mathfrak{p}_i},$$

was offenbar nicht möglich ist, da $\Pi(\vartheta)$ nicht durch $\mathfrak{p}_j$ teilbar ist. Dies zeigt, dass es (mod $\mathfrak{p}_j$) mindestens $p^{\varepsilon_j \cdot m}$ verschiedene inkongruente Zahlen gibt und dass daher der Grad von $\mathfrak{p}_j$ nicht kleiner als $\varepsilon_j \, . \, m$ sein kann, also etwa $f_j = \varepsilon_j \, . \, m + \varrho_j$ ist, wo $\varrho_j \geqq 0$ ist.

Nun geht $\mathfrak{p}_j$ in p in mindestens einer Potenz λ auf, und daher ist das Ideal

$$P = \mathfrak{p}_1^\lambda \, . \, \mathfrak{p}_2^\lambda \ldots \mathfrak{p}_t^\lambda$$

gewiss ein Teiler von p. Hier ist

$$N P = p^{\lambda \Sigma(\varepsilon_j \, . \, m + \varrho_j)} = p^{n'},$$

und da

$$m \, . \, \lambda \, . \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j = m \, . \, l$$

ist, muss man $n' \geqq m \, . \, l$ haben, wo das Gleichheitszeichen nur dann vorkommen kann, wenn alle ϱ_j verschwinden.

Wenn nun diese Untersuchungen für alle Primfunktionen $\varphi_i(x)$ richtig sind, kann man für alle i solche Ideale P_i bestimmen, die Teiler von p sind, und da diese P_i alle zu einander relativ prim sind, so ist auch

$$p' = P_1 . P_2 \ldots P_s$$

ein Teiler von p, und es ist

$$N p' = p^{\Sigma n'_i}.$$

Da aber für alle i $n'_i \geqq m_i . l_i$, so wird auch

$$\sum_{i=1}^{s} n'_i > \sum_{i=1}^{s} m_i . l_i = n,$$

während man doch immer, weil p' ein Idealteiler von p ist,

$$\sum_{i=1}^{s} n'_i \geqq n$$

haben muss. Es bleibt daher nur die Möglichkeit übrig, dass

$$\sum_{i=1}^{s} n'_i = n \tag{34}$$

ist, und daraus folgt, dass die Ideale p und p' gleich sein müssen, und folglich ist die Primidealzerlegung von p durch

$$\left.\begin{aligned} p &= P_1 . P_2 \ldots P_s \\ P_i &= \left(\mathfrak{p}_1^{(i)} . \mathfrak{p}_2^{(i)} \ldots \mathfrak{p}_{t_i}^{(i)}\right)^{\lambda_i} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

bestimmt.

Die Gleichung (34) kann nur dann erfüllt sein, wenn immer $n' = m . l$ für alle Primfunktionen $\varphi_i(x)$ ist, und daraus folgt, dass alle ϱ_j verschwinden müssen, und es ist folglich

$$N \mathfrak{p}_j^{(i)} = p^{\varepsilon_j^{(j)} . m_i},$$

wodurch der Grad von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ bestimmt ist.

Man kommt jetzt zu der Aufgabe, das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ zu bestimmen. Das Ideal

$$\mathfrak{a}_j^{(i)} = [p, \varphi_i(\vartheta), \Pi_i(\vartheta) . \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta))]$$

war durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar, und aus den obigen Schlüssen folgt, dass $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ nicht durch andere Primidealteiler von p teilbar sein kann. $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ muss daher eine Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ sein.

Man kann den Ausdruck dieses Ideals etwas umformen, indem man berücksichtigt, dass in dem Ausdrucke

$$\Pi_i(\vartheta) \,.\, \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = \Pi_i(\vartheta) \,.\, \frac{f_j^{(i)}(\vartheta)}{p^{\varepsilon_j^{(i)} . \varkappa_i}}$$

der Faktor $\Pi_i(\vartheta)$ nur zugesetzt worden ist, um eine ganze Zahl zu erhalten. Man kann daher anstatt $\Pi_i(\vartheta)$ jede andere ganze Zahl α anwenden, wenn nur α zu $\varphi_i(\vartheta)$ relativ prim und durch alle Idealteiler von $p^{\varepsilon_j^{(i)} . \varkappa_i}$ teilbar ist, welche zu $\varphi_i(\vartheta)$ relativ prim sind. Wenn daher wie in (30)

$$f(x) \equiv \pi_i(x) \,.\, \varphi_i(x)^{l_i} \pmod p$$

ist, wird die Zahl $\pi_i(\vartheta)$ zu $\varphi_i(\vartheta)$ relativ prim und durch alle Idealteiler von p teilbar, welche zu $\varphi_i(\vartheta)$ relativ prim sind. Mann kann daher die Zahl $\pi^i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)} . \varkappa_i}$ als eine Zahl α anwenden und erhält für $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ die Darstellung

$$\mathfrak{a}_j^{(i)} = \left(p, \varphi_i(\vartheta), \; \pi_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)} . \varkappa_i} \,.\, \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta))\right).$$

Es soll nun eine Zahl bestimmt werden, welche genau durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in der ersten Potenz teilbar ist. Aus der Primidealzerlegung von p folgt, dass man nach Satz 16 auch

$$\varphi_i(\vartheta) = \left(\mathfrak{p}_1^{(i)} \,.\, \mathfrak{p}_2^{(i)} \ldots \mathfrak{p}_{t_i}^{(i)}\right)^{\varkappa_i} . \,\Phi_i$$

hat, wo das Ideal Φ_i zu p relativ prim ist. Man kann nun immer zwei positive, ganze rationale Zahlen x_i und y_i derart bestimmen, dass

$$x_i \,.\, \varkappa_i - y_i \,.\, \lambda_i = 1$$

ist. Dann ist die Zahl

$$\pi_i(\vartheta)^{y_i} \,.\, \frac{\varphi_i(\vartheta)^{x_i}}{p^{y_i}}$$

eine ganze Zahl, welche genau durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in der ersten Potenz teilbar ist. Denn ein Primidealteiler von p, der nicht in $\varphi(\vartheta)$ aufgeht, wird sicher in $\pi_i(\vartheta)$ auf-

gehen. Ein Primidealteiler $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots t_i)$ geht im Zähler genau in der Potenz $x_i . \varkappa_i$ und im Nenner genau in der Potenz $x_i . \varkappa_i$ auf, also in der Zahl überhaupt genau in der ersten Potenz. Daraus folgt, weil $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ eine Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ ist, dass

$$\mathfrak{p}_j^{(i)} = \left(p,\ \varphi_i(\vartheta),\ \pi_i(\vartheta)^{y_i} . \frac{\varphi_i(\vartheta)^{x_i}}{p^{y_i}},\ \pi_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)} . \varkappa_i} . \psi_j(\vartheta, \theta_i(\vartheta))\right)$$

wird.

Man kann dann den folgenden Satz aussprechen:

Satz 21. Es sei

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{l_1} . \varphi_2(x)^{l_2} \ldots \varphi_s(x)^{l_s} \pmod p$$

und die Hauptpolygone $(p, \varphi_i(x))$ *seien alle Geraden* L_i *mit den Neigungen* $\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$. $f_1^{(i)}(x), f_2^{(i)}(x) \ldots f_{t_i}^{(i)}(x)$ *seien die sämtlichen Primfunktionen von* $f(x)$ (*mod* L_i); *diese sollen alle verschieden vorausgesetzt werden und der Grad von* $f_j^{(i)}(x)$ *in* $\varphi(x)^{\lambda_i}$ *soll gleich* $\varepsilon_j^{(i)}$ *sein. Weiter soll*

$$\pi_i(x) = \varphi_1(x)^{l_2} \ldots \varphi_{i-1}(x)^{l_{i-1}} \varphi_{i+1}^{l_{i+1}}(x) \ldots \varphi_s(x)^{l_s}$$

gesetzt werden. Dann ist

$$p = P_1 . P_2 \ldots P_s,$$

wo das Ideal P_i *die Primidealzerlegung*

$$P_i = \left(\mathfrak{p}_1^{(i)} \mathfrak{p}_2^{(i)} \ldots \mathfrak{p}_{t_i}^{(i)}\right)^{\lambda_i}$$

hat. Das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ *ist vom Grade* $\varepsilon_j^{(i)} . m_i$ *und durch*

$$\mathfrak{p}_j^{(i)} = \left(p,\ \varphi_i(\vartheta),\ \pi_i(\vartheta)^{y_i} . \frac{\varphi_i(\vartheta)^{x_i}}{p^{y_i}},\ \pi_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)} . \varkappa_i} . \frac{f_j(\vartheta)}{p^{\varepsilon_j^{(i)} . \varkappa_i}}\right)$$

bestimmt, wo die positiven, ganzen rationalen Zahlen x_i *und* y_i *durch* $x_i . \varkappa_i - y_i . \lambda_i = 1$ *bestimmt sind.*

Durch diesen Satz ist allgemein der Fall erledigt, dass die Polygone Geraden sind. Man hätte natürlich diesen Satz aus den folgenden allgemeineren Sätzen ableiten können, aber ich habe hier den Satz besonders abgeleitet, weil er in so engem Zusammenhange mit den Dedekindschen Untersuchungen steht, und auch, um an diesem einfacheren Falle die folgenden Untersuchungen klarer zu machen.

Kap. 4. **Willkürliche Polygone.**

§ 1. Bezeichnungen und Hilfsgrössen.

Ich gehe jetzt dazu über, den allgemeinen Fall zu behandeln, dass alle Polygone $(p, \varphi(x))$ aus einer beliebigen Anzahl von Seiten bestehen. Es sei

$$f(x) \equiv \pi(x) \cdot \varphi(x)^l \pmod{p}, \tag{1}$$

und es sollen die gemeinsamen Idealteiler von p und $\varphi(\vartheta)$ untersucht werden. Für das Polygon $S\ (p, \varphi(x))$ sollen die Bezeichnungen des Kap. 2 angewandt werden. Die Neigungszahlen dieses Polygones sind dann

$$\frac{h_i}{l_i} = \frac{e_i \cdot \varkappa_i}{e_i \cdot \lambda_i} = \frac{\varkappa_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \ldots k),$$

wo $\varkappa_i$ zu λ_i relativ prim ist und k die Anzahl der Seiten bedeutet. Hier ist

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_k = l,$$

und für die Neigungszahlen hat man

$$\frac{\varkappa_1}{\lambda_1} < \frac{\varkappa_2}{\lambda_2} < \cdots < \frac{\varkappa_k}{\lambda_k}. \tag{2}$$

Es sollen nun die folgenden Bezeichnungen eingeführt werden:

$$f_i(x) = \varphi(x)^{l_i} + S_{i,1}(x) \cdot p^{\varkappa_i} \cdot \varphi(x)^{l_i - \lambda_i} + \cdots + S_{i, e_i}(x) \cdot p^{h_i} \quad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{3}$$

sei der Faktor, welcher der i^{ten} Seite L_i in der Zerlegung von $f(x)$ (mod S) entspricht. Weiter sei

$$f_i(x) \equiv f_1^{(i)}(x)^{e_1^{(i)}} \cdot f_2^{(i)}(x)^{e_2^{(i)}} \cdots f_{t_i}^{(i)}(x)^{e_{t_i}^{(i)}} \pmod{L_i} \tag{4}$$

die Primfunktionzerlegung von $f_i(x)$ (mod L_i), wo

$$f_j^{(i)}(x) = \varphi(x)^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \lambda_i} + S_{j,1}^{(i)}(x) \cdot p^{\varkappa_i} \cdot \varphi(x)^{\left(\varepsilon_j^{(i)} - 1\right)\lambda_i} + \cdots + S_{j, \varepsilon_j^{(i)}}^{(i)}(x) \cdot p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \varkappa_i} \tag{5}$$

ist und die Primfunktionen $f_j^{(i)}(x)$ alle verschieden sind. Weiter soll

$$F_i(x, y) = y^{e_i} + S_{i,1}(x) \cdot y^{e_i - 1} + \cdots + S_{i, e_i}(x) \tag{6}$$

gesetzt werden, und aus (4) folgt dann, dass man auch

$$F_i(x, y) \equiv \psi_1^{(i)}(x, y)^{e_1^{(i)}} \ldots \psi_{t_i}^{(i)}(x, y)^{e_{t_i}^{(i)}} \pmod{p, \varphi(x)} \tag{7}$$

hat, wo

$$\psi_j^{(i)}(x, y) = y^{\varepsilon_j^{(i)}} + S_{j,1}(x) \cdot y^{\varepsilon_j^{(i)}-1} + \cdots + S_{j, \varepsilon_j^{(i)}}^{(i)}(x) \tag{8}$$

ist.

Wird hier auch

$$\theta_i(x) = \frac{\varphi(x)^{\lambda_i}}{p^{\varkappa_i}}$$

eingeführt, dann leitet man aus (3) und (6) ab

$$\frac{f_i(x)}{p^{h_i}} = F_i(x, \theta_i(x)) = \theta_i(x)^{e_i} + S_{i,1}(x) \cdot \theta_i(x)^{e_i-1} + \cdots + S_{i, e_i}(x)$$

und ebenso aus (5) und (8)

$$\frac{f_j^{(i)}(x)}{p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \varkappa_i}} = \psi_j^{(i)}(x, \theta_i(x)) = \theta_i(x)^{\varepsilon_j^{(i)}} + S_{j,1}^{(i)}(x) \cdot \theta_i(x)^{\varepsilon_j^{(i)}-1} + \cdots + S_{j, \varepsilon_j^{(i)}}^{(i)}(x).$$

Für die folgenden Untersuchungen sind nun verschiedene Hilfsgrössen wichtig, die hier bestimmt werden sollen. Nach (1) ist

$$\varphi(\vartheta)^l \cdot \pi(\vartheta) \equiv 0 \pmod{p},$$

und die Zahl $\pi(\vartheta)$ ist daher durch alle Idealteiler von p teilbar, welche zu $\varphi(\vartheta)$ relativ prim sind. Wenn aber $\mathfrak{p}$ ein gemeinsamer Primidealteiler von p und $\varphi(\vartheta)$ ist und p genau durch $\mathfrak{p}^s$, $\varphi(\vartheta)$ genau durch $\mathfrak{p}^t$ teilbar ist, so ist nach Satz 16

$$s \cdot \varkappa_i = t \cdot \lambda_i, \tag{9}$$

wo i eine der Zahlen $1, 2, \ldots k$ ist. Wenn nun für $\mathfrak{p}$ die Gleichung (9) erfüllt ist, soll $\mathfrak{p}$ ein *Primideal der* i^{ten} *Seite des Polygones* $(p, \varphi(x))$ genannt werden.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass die Zahlen

$$\pi(\vartheta)^{i \cdot \varkappa_1} \cdot \theta_1(\vartheta)^i = \pi(\vartheta)^{i \cdot \varkappa_1} \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^{i \cdot \lambda_1}}{p^{i \cdot \varkappa_1}} \tag{10}$$

alle ganz sind. Dies folgt einfach indem man zeigt, dass alle Idealteiler des Nenners $p^{i \cdot \varkappa_1}$ auch im Zähler aufgehen. Nach der früheren Bemerkung geht ein

Primideal $\mathfrak{p}$, das gleichzeitig in p und $\pi(\vartheta)$ aufgeht, gewiss ebenso oft im Zähler wie im Nenner auf. Ist dagegen $\mathfrak{p}$ ein Primideal, das gleichzeitig in p und $\varphi(\vartheta)$ aufgeht und das zur ersten Seite gehört, wofür also

$$s \,.\, \varkappa_1 = t \,.\, \lambda_1$$

ist, dann wird ein solches Primideal genau so oft im Zähler wie im Nenner aufgehen, und wenn die Zahlen (10) ganz sind, können sie also nicht durch ein Primideal der ersten Seite teilbar sein. Ist zuletzt $\mathfrak{p}$ ein Primideal der i^{ten} Seite, $i \geqq 2$, so hat man nach (2)

$$t = s \cdot \frac{\varkappa_i}{\lambda_i} > s \cdot \frac{\varkappa_1}{\lambda_1}$$

oder

$$i \,.\, t \,.\, \lambda_1 > i \,.\, s \,.\, \varkappa_1 ,$$

d. h. $\mathfrak{p}$ geht im Zähler in einer höheren Potenz als im Nenner auf. Aus diesen Eigenschaften der Zahlen (10) leitet man einfach ab:

Die Zahlen

$$\pi(\vartheta)^{h_1+\varkappa_1+1} \,.\, \theta_1(\vartheta)^i \quad (i = 1, 2, \ldots e_1 + 1)$$

sind alle ganz und durch alle Primidealteiler von p teilbar ausser solchen, welche in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zur ersten Seite gehören.

Daraus folgt weiter, dass die Zahl

$$\pi(\vartheta)^{h_1+\varkappa_1+1} \,.\, \frac{f_1(\vartheta)}{p^{h_1}} = \pi(\vartheta)^{h_1+\varkappa_1+1}(\theta_1(\vartheta)^{e_1} + S_{1,1}(\vartheta) \,.\, \theta_1(\vartheta)^{e_1-1} + \cdots + S_{1,e_1}(\vartheta)) \qquad (11)$$

auch ganz ist, und nach Satz 17, dass diese Zahl durch alle Primidealteiler von p teilbar ist, welche in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zur ersten Seite gehören. Wenn $\mathfrak{p}$ ein gemeinsames Primideal von p und $\varphi(\vartheta)$ ist, das zur i^{ten} Seite gehört, $i \geqq 2$, so kann diese Zahl (11) nicht durch ein solches Primideal teilbar sein, denn in (11) sind alle Glieder ausser dem letzten durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Es ist daher bewiesen:

Die Zahl

$$T_1(\vartheta) = \pi(\vartheta)^{h_1+\varkappa_1+1} \,.\, \frac{f_1(\vartheta)}{p^{h_1}}$$

ist ganz und durch alle Primideale von p teilbar, welche nicht in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen oder in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zur ersten Seite gehören, aber durch keine anderen Primidealteiler von p.

Diese Untersuchungen sollen nun durch den folgenden Satz verallgemeinert werden:

Satz 22. Man kann eine solche Reihe von ganzen Zahlen des Körpers

$$T_0(\vartheta) = \pi(\vartheta),\ T_1(\vartheta),\ T_2(\vartheta), \ldots T_k(\vartheta)$$

von der Eigenschaft bestimmen, dass $T_i(\vartheta)$ durch alle Primideale von p teilbar ist ausser solchen, welche in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zu den Seiten $S_{i+1}, S_{i+2}, \ldots S_k$ gehören.

Der Satz soll durch vollständige Induktion bewiesen werden, indem man beachtet, dass die Zahlen $T_0(\vartheta)$ und $T_1(\vartheta)$ von den gewünschten Eigenschaften schon bestimmt sind.

Es sei daher eine Zahl $T_{i-1}(\vartheta)$ derart bestimmt, dass sie erstens ganz und zweitens durch alle Primidealteiler von p, welche nicht in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen, und durch alle Primidealteiler von $(p, \varphi(\vartheta))$, wofür

$$s \,.\, \varkappa_j = t \,.\, \lambda_j \quad (j = 1, 2, \ldots i-1),$$

aber durch keine anderen Primideale von p teilbar ist. Man kann dann die ganze rationale, positive Zahl x_{i-1} so bestimmen, dass die Zahlen

$$T_{i-1}(\vartheta)^{x_{i-1}} \,.\, \theta_i(\vartheta)^u = T_{i-1}(\vartheta)^{x_{i-1}} \,.\, \frac{\varphi(\vartheta)^{u \cdot \lambda_i}}{p^{u \cdot \varkappa_i}} \quad (u = 1, 2, \ldots e_i + 1) \tag{12}$$

alle ganz sind. Denn man kann x_{i-1} so gross wählen, dass alle Primideale, welche gleichzeitig in p und $T_{i-1}(\vartheta)$ aufgehen, in $T_{i-1}(\vartheta)^{x_{i-1}}$ in einer höheren Potenz als in $p^{u \cdot \varkappa_i}$ aufgehen. Ein Primideal, das in $\varphi(\vartheta)$ aufgeht und wofür $s \,.\, \varkappa_i = t \,.\, \lambda_i$ ist, geht genau ebenso oft im Zähler wie im Nenner auf, und wenn daher die Zahlen (12) ganz sind, können sie sicher nicht durch solche Primideale teilbar sein. Wenn zuletzt $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, das in $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht und zur j^{ten} Seite gehört, $j > i$, so folgt aus (2)

$$t = s \cdot \frac{\varkappa_j}{\lambda_j} > s \cdot \frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$$

oder

$$u \,.\, t \,.\, \lambda_i > s \,.\, \varkappa_i \,.\, u,$$

und $\mathfrak{p}$ geht daher im Zähler in einer höheren Potenz als im Nenner auf. Die Zahlen (12) sind also alle ganz und durch alle Primidealteiler von p teilbar, ausser solchen, welche in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zur i^{ten} Seite gehören.

Daraus folgt, dass die Zahl

$$\begin{aligned} T_{i-1}(\vartheta)^{x_{i-1}} . F_i(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = T_{i-1}(\vartheta)^{x_{i-1}}(\theta_i(\vartheta)^{e_i} + \\ + S_{i,1}(\vartheta) . \theta_i(\vartheta)^{e_i-1} + \cdots + S_{i,e_i}(\vartheta)) \end{aligned} \tag{13}$$

ganz sein muss, und diese Zahl ist durch alle Primideale von p teilbar, welche in $T_{i-1}(\vartheta)$ aufgehen, also solche, welche nicht in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen oder in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zu den Seiten $S_1, S_2, \ldots S_{i-1}$ gehören. Aus

$$F_i(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = \frac{f_i(\vartheta)}{p^{h_i}}$$

folgt nach Satz 17, dass die Zahl (13) auch durch solche Primideale teilbar wird, welche zur i^{ten} Seite gehören. Wenn zuletzt $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $(p, \varphi(\vartheta))$ ist, der zur j^{ten} Seite gehört, $j > i$, so geht dieser in allen Gliedern ausser dem letzten von (13) auf, und folglich ist diese Zahl nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

Man kann daher

$$T_i(\vartheta) = T_{i-1}(\vartheta)^{x_{i-1}} . F_i(\vartheta, \theta_i(\vartheta))$$

setzen, womit der Beweis des Satzes 22 durchgeführt ist.

Aus dem Beweise sieht man auch die Richtigkeit des folgenden Satzes ein:

Satz 23. Die Zahlen

$$N_i(\vartheta) = T_{i-1}(\vartheta)^{x_{i-1}} . \theta_i(\vartheta) \quad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{14}$$

sind alle ganz, und $N_i(\vartheta)$ ist durch alle Primidealteiler von p teilbar ausser solchen, welche in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zur i^{ten} Seite gehören.

Man kann leicht die Zahlen $T_i(\vartheta)$ explicite darstellen, denn es ist

$$\begin{aligned} &T_0(\vartheta) = \pi(\vartheta), \\ &T_1(\vartheta) = \pi(\vartheta)^{x_0} . F_1(\vartheta, \theta_1(\vartheta)) \quad x_0 = h_1 + \varkappa_1 + 1, \\ &T_2(\vartheta) = \pi(\vartheta)^{x_0 \cdot x_1} . F_1(\vartheta, \theta_1(\vartheta))^{x_1} . F_2(\vartheta, \theta_2(\vartheta)), \end{aligned}$$

und daraus folgt im Allgemeinen

$$T_i(\vartheta) = \pi(\vartheta)^{x_0 \cdot x_1 \cdots x_{i-1}} . F_1(\vartheta, \theta_1(\vartheta))^{x_1 \cdots x_{i-1}} F_2(\vartheta, \theta_2(\vartheta))^{x_2 \cdots x_{i-1}} \ldots F_i(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) \tag{15}$$

Dieser Formel zeigt, dass es eine solche Potenz p^a von p gibt, dass man, wenn man $T_i(x)$ mit p^a multipliziert, ein Polynom erhält, dessen Hauptpolygon

$(p, \varphi(x))$ aus i Seiten besteht, die zu den i ersten Seiten des Polygones S von $f(x)$ parallel sind, aber eine andere Länge besitzen. Aus (15) folgt, dass man

$$\alpha = x_1 . x_2 \ldots x_{i-1} . h_1 + x_2 \ldots x_{i-1} . h_2 + \cdots + x_{i-1} . h_{i-1} + h_i$$

setzen kann.

§ 2. Weitere Untersuchungen.

Es ist schon gezeigt worden, dass die Zahl

$$T_i(\vartheta) = T_{i-1}(\vartheta)^{x_{i-1}} . F_i(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = K_i(\vartheta) . (\theta_i(\vartheta)^{e_i} + S_{i,1}(\vartheta) . \theta_i(\vartheta)^{e_i - 1} + \cdots + S_{i, e_i}(\vartheta)), \quad (16)$$

wo

$$T_{i-1}(x)^{x_{i-1}} = K_i(x), \quad (17)$$

ganz und durch alle Primideale von p teilbar ist, welche in $\pi(\vartheta)$ aufgehen oder in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und wofür gleichzeitig $s . \varkappa_j = t . \lambda_j$ ist, wo j eine der Zahlen $1, 2, \ldots i$ bedeutet. Ebenso folgt aus Satz 23, dass die Zahl

$$K_i(\vartheta) . \theta_i(\vartheta)$$

ganz und durch alle Primidealteiler von p teilbar ist ausser solchen, welche in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und wofür $s . \varkappa_i = t . \lambda_i$. Die Zahl

$$K_i(\vartheta)^2 . \theta_i(\vartheta) . F_i(\vartheta, \theta_i(\vartheta))$$

und folglich auch die Zahl

$$K_i(\vartheta) . \theta_i(\vartheta) . F_i(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) \quad (18)$$

werden daher ebenfalls ganz und durch alle Primidealteiler von p teilbar. Hier ist zu bemerken, dass, wenn $i = k$ ist, schon die Zahl (16) durch alle Primidealteiler von p teilbar wird.

Von jetzt an soll vorausgesetzt werden, dass in (4) alle Exponenten $e_j^{(i)} = 1$ sind, also $f^{(i)}(x)$ für alle i nur verschiedene Primfaktoren (mod L_i) enthalten soll. Man hat dann

$$f_i(x) \equiv f_1^{(i)}(x) . f_2^{(i)}(x) \ldots f_{t_i}^{(i)}(x) \pmod{L_i},$$

und durch Vergleichung der Gradzahlen erhält man die Relation

$$\lambda_i . \sum_{j=1}^{t_i} \varepsilon_j^{(i)} = l_i \quad (19)$$

Es sollen nun alle Zahlen von der Form

$$K_i(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta) \,.\, A(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) =$$
$$K_i(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)\,(A_1(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{e_i - 1} + A_2(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{e_i - 2} + \cdots + A_{e_i}(\vartheta)) \qquad (20)$$

untersucht werden, wo die Koeffizienten $A_i(\vartheta)$ Polynome in ϑ sind. Es wird hier $i \leq k - 1$ vorausgesetzt, der Fall $i = k$ soll später erwähnt werden.

Man soll nun erstens bestimmen, unter welchen Bedingungen eine Zahl von der Form (20) durch alle Primidealteiler von p teilbar sein kann. Aus § 1 folgt, dass eine Zahl (20) immer durch alle Primidealteiler von p teilbar sein muss ausser solchen, welche in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zur i^{ten} Seite gehören.

Wenn in (20) alle Koeffizienten $A_i(x)$ (mod p) durch $\varphi(x)$ teilbar sind, also

$$A_1(x) \equiv A_2(x) \equiv \cdots \equiv A_{e_i}(x) \equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)}, \qquad (21)$$

so ist diese Zahl sicher durch alle Primidealteiler von p teilbar. Man kann daher voraussetzen, dass in (20) der erste Koeffizient, der nicht durch $\varphi(x)$ (mod p) teilbar ist, gleich $A_{e_i - \varepsilon}(x)$ ist. Man kann dann ein Polynom $C(x)$ derart bestimmen, dass

$$C(x) \,.\, A_{e_i - \varepsilon}(x) \equiv 1 \pmod{p, \varphi(x)},$$

und wenn

$$C(x) \,.\, A_{e_i - \varepsilon + j}(x) \equiv B_i(x) \pmod{p, \varphi(x)}$$

gesetzt wird, so folgt, dass auch die ganze Zahl

$$b = K_i(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta) \,.\, B(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = K_i(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)\,(\theta_i(\vartheta)^{\varepsilon} + B_1(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon - 1} + \cdots + B_\varepsilon(\vartheta))$$

durch alle Primidealteiler von p teilbar sein muss. Hier kann offenbar auch

$$B_\varepsilon(x) \not\equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)}$$

vorausgesetzt werden.

Dabei bedeutet

$$B(x, y) = y^{\varepsilon} + B_1(x) \,.\, y^{\varepsilon - 1} + \cdots + B_\varepsilon(x) \,.\, p^{\varepsilon \cdot \varkappa_i},$$

und folglich ist

$$B'(x) = p^{\varepsilon \cdot \lambda_i} \,.\, B(x, \theta_i(x)) = \varphi(x)^{\varepsilon \cdot \lambda_i} + B_1(x) \,.\, p^{\varkappa_i} \,.\, \varphi(x)^{(\varepsilon - 1)\lambda_i} + \cdots + B_\varepsilon(x) \,.\, p^{\varepsilon \cdot \varkappa_i}$$

ein Polynom mit dem geradlinigen Polygone $L_i\,(p, \varphi(x))$. Möglicherweise könnte $B(x, y)$ sich auf die Einheit reduzieren, indem es dann keine Primideale der i^{ten} Seite gäbe.

Man kann jetzt immer eine solche Potenz p^β bestimmen, dass

$$p^\beta \,.\, K_i(x) \,.\, B(x, \theta_i(x)) = C(x) \tag{22}$$

ein Polynom wird mit einem Hauptpolygone $(p, \varphi(x))$, das aus i Seiten besteht, welche zu den i ersten Seiten des Polygones S von $f(x)$ $(p, \varphi(x))$ parallel sind. A priori ist es jedoch möglich, dass in $C(x)$ die i^{te} Seite fehlt.

Man bildet nun die Gleichung

$$b^n + e_1 \,.\, b^{n-1} + \cdots + e_n = 0,$$

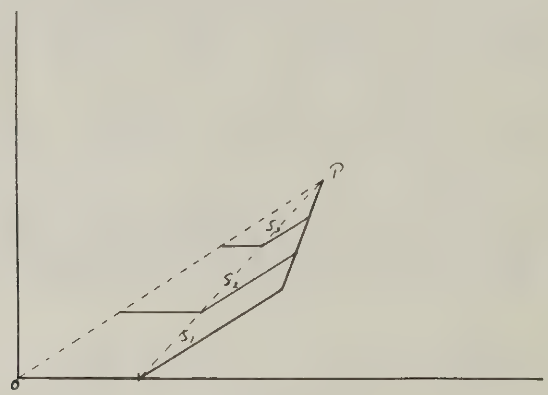


Fig. 3.

welcher die Zahl b genügt, und hier sind nach Satz 18 alle Koeffizienten e_i durch p teilbar. Diese Gleichung zeigt, dass eine Identität

$$K_i(x)^n \,.\, \theta_i(x)^n \,.\, B(x, \theta_i(x))^n +$$
$$+ e_1 \,.\, K_i(x)^{n-1} \,.\, \theta_i(x)^{n-1} \,.\, B(x, \theta_i(x))^{n-1} + \cdots + e_n = f(x) \,.\, g(x)$$

besteht. Wenn diese Identität mit $p^{n \cdot \beta + n \cdot \varkappa_i}$ multipliziert wird, folgt nach (22)

$$C(x)^n \,.\, \varphi(x)^{\lambda_i \cdot n} + e_1 \,.\, C(x)^{n-1} \,.\, \varphi(x)^{\lambda_i(n-1)} \,.\, p^{\beta+\varkappa_i} + \cdots + e_n \,.\, p^{n(\beta+\varkappa_i)} = f(x) \,.\, g_1(x), \tag{23}$$

wo beide Seiten ganzzahlig sind. Das Hauptpolygon $(p, \varphi(x))$ der linken Seite von (23) soll jetzt bestimmt werden. Zu diesem Zwecke beachte man, dass die Polynome

$$C(x)^n,\ p^\beta \,.\, C(x)^{n-1},\ \ldots\ p^{(n-1)\beta} \,.\, C(x),\ p^{n \cdot \beta} \tag{24}$$

alle Polygone besitzen, die einander ähnlich sind, und nach (22) bestehen diese Polygone aus i Seiten, welche zu den i ersten Seiten des Hauptpolygones von

$f(x)$ parallel sind. Dazu kommt noch eine Seite, die zu der X-Achse parallel ist. Wenn man diese Polygone aufzeichnet, werden sie etwa so liegen, wie es in Fig. 3 abgebildet worden ist, wo das Ähnlichkeitszentrum der repräsentierende Punkt von $p^{n \cdot \beta}$ ist.

Nun kommen aber in (23) nicht die Polynome (24) vor, sondern die Glieder

$$C(x)^n \,.\, \varphi(x)^{\lambda_i \cdot n},$$
$$p^{\beta+\varkappa_i} \,.\, C(x)^{n-1} \,.\, \varphi(x)^{\lambda_i(n-1)}, \ldots p^{(n-1)(\beta+\varkappa_i)} \,.\, C(x) \,.\, \varphi(x)^{\lambda_i}, \;\; p^{n(\beta+\varkappa_i)}. \qquad (25)$$

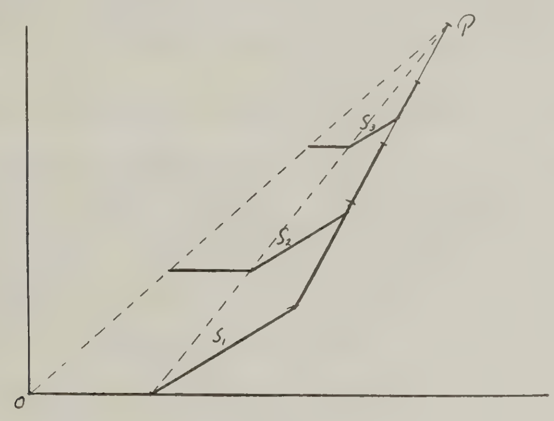


Fig. 4.

Die Lage der Polygone dieser Polynome erhält man aber leicht aus den Polygonen von (24) und aus Fig. 3, indem man beachtet, dass, wenn ein Glied mit $\varphi(x)^a$ multipliziert wird, dies eine Verschiebung der repräsentierenden Punkte parallel der X-Achse nach links um eine Strecke α bedeutet. Ebenso bedeutet die Multiplikation mit p^γ eine Verschiebung parallel der Y-Achse um eine Strecke γ nach oben. Wenn daher $(t, n\beta)$ die Koordinaten des Ähnlichkeitszentrums in Fig. 3, also des gemeinsamen Endpunktes der Polygone von den Polynomen (24) sind, so wird der Endpunkt des Polygones von einem der Polynome (25)

$$p^{s(\beta+\varkappa_i)} \,.\, C(x)^{n-s} \,.\, \varphi(x)^{\lambda_i(n-s)}$$

in den Punkt P fallen, der die Koordinaten

$$(t + \lambda_i \,.\, s, \;\; n\beta + s \,.\, \varkappa_i))$$

besitzt, also auf eine Gerade von der Neigung $\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$, welche durch den Punkt $(t, n \,.\, \beta)$

geht. Die Polygone von den Polynomen (25) müssen also wie in Fig. 4 liegen, wo das Ähnlichkeitszentrum die Koordinaten

$$(t + \lambda_i \,.\, n,\; n(\beta + \varkappa_i))$$

hat.

Man sieht daraus, dass ein Polynom, das aus einer Summe von den mit gewissen Zahlenkoeffizienten versehenen Gliedern (25) besteht, ein Hauptpolygon $(p, \varphi(x))$ besitzen wird, das erstens aus den i Seiten von $C(x)^n$ besteht und dann für den Rest entweder mit der Geraden von der Neigung $\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$ von dem Endpunkte dieses Polygones bis zum Punkte P ganz oder teilweise zusammenfällt oder oberhalb dieser Geraden fällt.

In diesem Falle, wo das Polygon der linken Seite von (23) bestimmt werden soll, sind aber alle Koeffizienten e_i durch p teilbar, und daraus folgt leicht, dass das Polygon $(p, \varphi(x))$ der linken Seite von (23) aus den i Seiten von $C(x)^n$ bestehen muss und dazu noch einigen Seiten, die gewiss von grösseren Neigungen sind. Weiter sieht man ein, dass von den Gliedern in (23) nur $C(x)^n$ solche Glieder in der Entwickelung $(p, \varphi(x))$ liefern kann, welche auf den i ersten Seiten dieses Polygones liegen. Durch diese Bemerkung folgt nach (22), dass der Faktor, welcher der i^{ten} Seite entspricht, gleich $B'(x)^n$ sein muss.

Da die rechte Seite von (23) $f(x)$ als Faktor enthält, muss diese Seite ein Polygon besitzen, worin das Polygon S von $f(x)$ in der Weise eingehen muss, dass jede Seite von S darin vorkommt. Es muss folglich auch in dem Polygone für die linke Seite von (23) eine Seite von der Neigung $\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$ vorkommen. Da weiter $f_i(x)$ ein Faktor der i^{ten} Seite in dem Polygone rechts ist, so folgt dass $B'(x)^n$ (mod L_i) durch $f_i(x)$ teilbar sein muss.

Da aber $f_i(x)$ nach den Voraussetzungen nur verschiedene Primfaktoren (mod L_i) besitzt, folgt, dass auch $B'(x)$ (mod L_i) durch $f_i(x)$ teilbar sein muss. Nun ist aber $f_i(x)$ von einem höheren Grade als $B'(x)$, und $B'(x)$ kann daher nicht (mod L_i) durch $f_i(x)$ teilbar sein.

Durch diesen Widerspruch ist bewiesen, *dass eine Zahl von der Form* (20) *nicht durch alle Primidealteiler von p teilbar sein kann, ausser wenn* (21) *erfüllt ist.*

Bei diesen Untersuchungen ist $i \leq k - 1$ vorausgesetzt worden. Wenn $i = k$ ist, wird schon die Zahl

$$K_k(\vartheta) \,.\, F_k(\vartheta, \theta_k(\vartheta)) = K_k(\vartheta) \,.\, (\theta_k(\beta)^{e_k} + S_{k,1}(\vartheta) \,.\, \theta_k^{e_k - 1} + \cdots + S_{k,e_k}(\vartheta))$$

durch alle Primidealteiler von p teilbar, und man untersucht in diesem Falle ganz analog, wann eine Zahl von der Form

$$K_k(\vartheta) \, . \, A(\vartheta, \theta_k(\vartheta)) = K_k(\vartheta)\,(A_1(\vartheta) \, . \, \theta_k(\vartheta)^{e_k-1} + \cdots + A_{e_k}(\vartheta)) \tag{26}$$

durch alle Primidealteiler von p teilbar sein kann. Wenn eine Zahl (26) durch alle Primidealteiler von p teilbar ist, wird es wie früher möglich, eine Zahl von der Form

$$b = K_k(\vartheta)\,(B(\vartheta, \theta_k(\vartheta)) = K_k(\vartheta)\,(\theta_k(\vartheta)^{\varepsilon} + B_1(\vartheta) \, . \, \theta_k(\vartheta)^{\varepsilon-1} + \cdots + B_{\varepsilon}(\vartheta))$$

derart zu bestimmen, dass auch b durch alle Primidealteiler von p teilbar ist. Weiter kann man hier immer einen solchen Exponenten α von p bestimmen, dass

$$p^{\alpha} \, . \, K_k(x) \, . \, B(x, \theta_k(x)) = K'_k(x) \, . \, B'(x)$$

ein Polynom mit einem Hauptpolygone $(p, \varphi(x))$ wird, das aus k Seiten besteht, die zu den Seiten des Polygones $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ parallel sind, und der Faktor, welcher der k^{ten} Seite dieses Polygones entspricht, gleich $B'(x)$ wird.

Man bildet wie früher die Gleichung

$$b^n + e_1 \, . \, b^{n-1} + \cdots + e_n = 0,$$

welcher b genügt und wo alle Koeffizienten nach Satz 18 durch p teilbar werden. Daraus folgt weiter das Bestehen einer Identität

$$K'_k(x)^n \, . \, B'(x)^n + e_1 \, . \, p^{\alpha} \, . \, K'_k(x)^{n-1} \, . \, B'(x)^{n-1} + \cdots + e_n \, . \, p^{n \cdot \alpha} = f(x) \, . \, g(x). \tag{27}$$

Die Polygone der Glieder

$$K'(x)^n \, . \, B'(x)^n, \; K'_k(x)^{n-1} \, . \, B'(x)^{n-1} \, . \, p^{\alpha}, \; \ldots \; K'_k(x) \, . \, B'(x) \, . \, p^{(n-1)\alpha}, \; p^{n \cdot \alpha}$$

liegen alle so, wie es in Fig. 3 abgebildet worden ist, und daraus folgt leicht, dass die linke Seite von (27) ein Polygon besitzt, das mit dem Polygone von $K'_k(x)^n \, . \, B'(x)^n$ identisch ist, und dass alle anderen Polynome $e_i \, . \, p^{i \cdot \alpha} \, . \, K'_k(x)^{n-i} \, . \, B'(x)^{n-i}$ nur solche Glieder liefern können, welche oberhalb dieses Polygones liegen. Daraus folgt wie früher, dass $B'(x)^n \pmod{L_k}$ durch $f_k(x)$ und daher auch $B'(x) \pmod{L_k}$ durch $f_k(x)$ teilbar sein muss. Dies ist aber offenbar nicht möglich, und daraus folgt, dass eine Zahl von der Form (26) nur durch alle Primidealteiler von p teilbar sein kann, wenn

$$A_1(x) \equiv A_2(x) \equiv \cdots \equiv A_{e_k}(x) \equiv 0 \;(\text{modd } p, \varphi(x)).$$

§ 3. Die Primidealzerlegung von p.

Es folgt nun sofort aus § 2, dass es für jede Seite Primideale gibt. Denn wäre für eine Seite L_i, $i<k$, dies nicht der Fall, so müsste schon die Zahl

$$K_i(\vartheta)\,.\,\theta_i(\vartheta)$$

durch alle Primidealteiler von p teilbar sein, was nicht möglich ist. Wenn $i=k$ ist, würde schon die Zahl $K_k(\vartheta)$ durch alle Primidealteiler von p teilbar sein, was auch nicht möglich ist.

Um eine einheitliche Darstellung der folgenden Untersuchungen zu erhalten, soll die Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned} K_i(\vartheta)\,.\,\theta_i(\vartheta) &= M_i(\vartheta) \quad (i=1,2,\ldots k-1)\\ K_k(\vartheta) \qquad &= M_k(\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

eingeführt werden. Die ganze Zahl $M_i(\vartheta)$ ist dann nach § 1 durch alle Primideale von p teilbar ausser solchen, welche in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zur i^{ten} Seite gehören.

Man kann daher die Resultate des § 2 folgendermassen zusammenfassen: *Eine Zahl*

$$M_i(\vartheta)\,.\,A(\vartheta,\theta_i(\vartheta)) = M_i(\vartheta)\left(A_1(\vartheta)\,.\,\theta_i(\vartheta)^{e_i-1}+\cdots+A_{e_i}(\vartheta)\right) \tag{29}$$

kann nur dann durch alle Primidealteiler von p teilbar sein, wenn

$$A_1(x)\equiv A_2(x)\equiv\cdots\equiv A_{e_i}(x)\equiv 0 \pmod{p,\varphi(x)}.$$

Es sollen nun die Primideale der i^{ten} Seite untersucht werden. Die ganze Zahl

$$M_i(\vartheta)\,.\,\psi_j^{(i)}(\vartheta,\theta_i(\vartheta)) \quad (j=1,2,\ldots t_i) \tag{30}$$

muss für alle j durch ein Primideal der i^{ten} Seite teilbar sein, denn wäre dies nicht der Fall, müsste schon, da $M_i(\vartheta)\,.\,F_i(\vartheta,\theta_i(\vartheta))$ durch alle Primideale der i^{ten} Seite teilbar ist,

$$M_i(\vartheta)^{t_i-1}\,.\,\psi_1^{(i)}\ldots\psi_{j-1}^{(i)}\,.\,\psi_{j+1}^{(i)}\ldots\psi_{t_i}^{(i)}$$
$$[\psi_j^{(i)}=\psi_j^{(i)}(\vartheta,\theta_i(\vartheta))]$$

durch alle Primideale der i^{ten} Seite und folglich auch

$$M_i(\vartheta) \,.\, \psi_1^{(i)} \ldots \psi_{j-1}^{(i)} \,.\, \psi_{j+1}^{(i)} \ldots \psi_{t_i}^{(i)}$$

durch alle Primidealteiler von p teilbar sein, was nicht möglich ist.

Weiter können zwei von den Zahlen (30) nicht durch dasselbe Primideal der i^{ten} Seite teilbar sein, denn man kann immer solche Funktionen $C(x, y)$ und $D(x, y)$ bestimmen, dass

$$\psi_{j_1}^{(i)}(x, y) \,.\, C(x, y) + \psi_{j_2}^{(i)}(x, y) \,.\, D(x, y) \equiv 1 \pmod{p, \varphi(x)}$$

ist, und wenn diese Kongruenz mit $M_i(\vartheta)^2$ multipliziert und $x = \vartheta$, $y = \theta_i(\vartheta)$ gesetzt wird, folgt, dass auch $M_i(\vartheta)^2$ durch einen gemeinsamen Primidealteiler der i^{ten} Seite teilbar sein muss, was aber nach den Eigenschaften von $M_i(\vartheta)$ nicht möglich ist. Es gibt daher sicher mindestens t_i verschiedene Primideale der i^{ten} Seite.

Sei nun $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ ein Primideal der i^{ten} Seite, das in einer Zahl (30) aufgeht. Wenn dann eine Zahl von der Form (29) durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar sein soll, so muss $A(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch $\psi_j^{(i)}(x, y)$ teilbar sein. Denn wäre dies nicht der Fall, könnte man solche Funktionen $C(x, y)$ und $D(x, y)$ bestimmen, dass

$$\psi_j^{(i)}(x, y) \,.\, C(x, y) + A(x, y) \,.\, D(x, y) \equiv 1 \pmod{p, \varphi(x)},$$

und durch Multiplikation mit $M_i(\vartheta)^2$ würde wie früher folgen, wenn $x = \vartheta$, $y = \theta_i(\vartheta)$ gesetzt wird, dass $M_i(\vartheta)$ durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar wäre, was nicht möglich ist.

Aus dieser Bemerkung folgt, dass es unter den Zahlen (29) mindestens $p^{\varepsilon_j^{(i)} . m}$ inkongruente Zahlen für den Modul $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ gibt, und daher ist der Grad $f_j^{(i)}$ von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ sicher nicht kleiner als $\varepsilon_j^{(i)} . m$. Indem man berücksichtigt, dass nach § 5. III $f_j^{(i)}$ immer durch m teilbar sein muss, kann man daher

$$f_j^{(i)} = (\varepsilon_j^{(i)} + \alpha_j^{(i)}) \,.\, m$$

setzen, wo $\alpha_j^{(i)} \geqq 0$ ist. Es soll gezeigt werden, dass in der Tat $\alpha_j^{(i)} = 0$ ist.

Das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ geht nach Satz 16 mindestens in einer Potenz λ_i in p auf, und daher ist gewiss $\mathfrak{p}_j^{(i)^{\lambda_i}}$ ein Teiler von p. Das Ideal

$$P_i = \left(\mathfrak{p}_1^{(i)} \,.\, \mathfrak{p}_2^{(i)} \ldots \mathfrak{p}_{t_i}^{(i)}\right)^{\lambda_i}$$

ist daher auch ein Teiler von p und enthält nur Primideale der i^{ten} Seite. Man hat hier

$$N P_i = p^{\lambda_i \sum\limits_{j=1}^{t_i} f_j^{(i)}},$$

und setzt man

$$f_i = \lambda_i \sum_{j=1}^{t_i} f_j^{(i)} = m \,.\, \lambda_i \,.\, \sum_{j=1}^{t_i} (\varepsilon_j^{(i)} + \alpha_j^{(i)}),$$

so ergibt sich nach (19)

$$f_i = m \,.\, l_i + m \,.\, \sum_{j=1}^{t_i} \alpha_j^{(i)} = m \,.\, l_i + \beta_i.$$

Daher ist also

$$N P_i = p^{f_i},$$

wo $f_i \geqq m \,.\, l_i$, und es kann nur dann $f_i = m \,.\, l_i$ sein, wenn alle $\alpha_j^{(i)}$ verschwinden.

Für alle Seiten des Polygones $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ kann man nun entsprechende Idealfaktoren P_i von p bestimmen, und es wird dann auch

$$P = P_1 \,.\, P_2 \ldots P_k$$

ein Teiler von p und nach § 4. III auch ein Teiler des Ideals $\mathfrak{a} = (p, \varphi(\vartheta)^l)$. Hier wird

$$N P = p^{\Sigma f_i},$$

und da

$$\Sigma f_i = \Sigma m \,.\, l_i + \Sigma \beta_i = m \,.\, l + \Sigma \beta_i,$$

kann man

$$N P = p^{m \,.\, l + \beta},$$

setzen, wo $\beta \geqq 0$ ist.

Diese Untersuchungen beziehen sich alle auf die Bestimmung der gemeinsamen Primfaktoren von p und $\varphi(\vartheta)$. Wenn aber die Voraussetzung gilt, dass für alle Primfunktionenentwickelungen $(p, \varphi_s(x))$ von $f(x)$ die Faktoren in der Zerlegung für das Polygon $(p, \varphi_s(x))$ verschieden sind, so kann man für alle diese Primfunktionen $\varphi_s(x)$ die ähnlichen Untersuchungen über die Primideale vornehmen, und man erhält in dieser Weise für alle Primfunktionen $\varphi_s(x)$ die entsprechenden Ideale P, die alle zu einander relativ prim sind und auch alle in p aufgehen. Nennt man daher p' das Produkt dieser Ideale P, so ist p' auch ein Idealteiler von p. Es ist aber

$$N p' = p^{\Sigma (m l + \beta)},$$

wo die Summe über die Werte für alle verschiedenen Primfunktionen $\varphi_s(x)$ auszudehnen ist. Da aber

$$\Sigma(ml+\beta) = n + \Sigma\beta$$

und $Np = p^n$, folgt, dass $\Sigma\beta = 0$ sein muss, und es wird $p = p'$, wodurch also die Primidealzerlegung von p vollständig bestimmt ist.

Aus der Bedingung $\Sigma\beta = 0$ folgt, dass auch alle β verschwinden müssen, und da $\beta = \Sigma\beta_i$ war, wo alle β_i positiv oder Null waren, so müssen auch alle $\beta_i = 0$ sein, und folglich $f_i = m \cdot l_i$. Dies war aber nur dann möglich, wenn alle $\alpha_j^{(i)}$ verschwinden. Daher ist also

$$N\mathfrak{p}_j^{(i)} = p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot m}.$$

Man kann diese Resultate in dem folgenden Hauptsatze zusammenfassen:

Satz 24. Sei

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{e_1} \cdot \varphi_2(x)^{e_2} \ldots \varphi_s(x)^{e_s} \pmod{p}$$

die Primfunktionzerlegung von $f(x)$. Dann ist

$$p = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s,$$

wo

$$\mathfrak{a}_t = (p,\, \varphi_t(\vartheta)^{e_t}).$$

Um die Primidealzerlegung eines Ideals

$$\mathfrak{a} = (p,\, \varphi(\vartheta)^e)$$

zu bestimmen, konstruiert man das Newtonsche Polygon $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ und bestimmt die Primfunktionen

$$f_1^{(i)}(x),\ f_2^{(i)}(x),\ \ldots f_{t_i}^{(i)}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

für alle Seiten L_i des Polygones. Wenn bei dieser Zerlegung für die Seiten nur verschiedene Primfaktoren vorkommen und dies für alle Primfunktionen $\varphi(x)$ gilt, so ist

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{p}_1^{(1)} \cdot \mathfrak{p}_2^{(1)} \ldots \mathfrak{p}_{t_1}^{(1)})^{\lambda_1} \cdot (\mathfrak{p}_1^{(2)} \ldots \mathfrak{p}_{t_2}^{(2)})^{\lambda_2} \ldots (\mathfrak{p}_1^{(k)} \ldots \mathfrak{p}_{t_k}^{(k)})^{\lambda_k}.$$

Hier ist das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ vom Grade $\varepsilon_j^{(i)} \cdot m$, wenn $\varepsilon_j^{(i)} \cdot m$ den Grad von $f_j^{(i)}(x)$ bedeutet.

Es bleibt nun nur übrig, die Primideale $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ zu bestimmen.

§ 4. Bestimmung der Primideale.

Um ein Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ als grösste gemeinsame Faktor von Hauptidealen zu bestimmen, beachte man, dass $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ immer in

$$M_i(\vartheta) \, . \, \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) \tag{31}$$

aufgeht. Diese Zahl kann aber durch keine anderen Primideale der i^{ten} Seite teilbar sein, denn sonst würde man nach der Schlussweise in § 3 folgern können, dass $N\mathfrak{p} > p^n$ wäre. Daher ist (31) durch eine Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ und übrigens durch keine anderen Primideale der i^{ten} Seite teilbar.

Wenn $i = k$ ist, hat man nach (28)

$$M_k(\vartheta) \, . \, \psi_j^{(k)}(\vartheta, \theta_k(\vartheta)) = K_k(\vartheta) \, . \, \psi_j^{(k)}(\vartheta, \theta_k(\vartheta)).$$

Wenn aber $i < k$ ist, wird

$$M_i(\vartheta) \, . \, \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = K_i(\vartheta) \, . \, \theta_i(\vartheta) \, . \, \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta)),$$

und nach der Definition der Zahl $K_i(\vartheta)$ (17) ist auch die Zahl

$$K_i(\vartheta)^2 \, . \, \theta_i(\vartheta) \, . \, \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta))$$

durch keine anderen Primideale der i^{ten} Seite als $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar. Aus Satz 25 folgt aber, dass

$$N_i(\vartheta) = K_i(\vartheta) \, . \, \theta_i(\vartheta)$$

nicht durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar sein kann, und folglich ist also für alle i

$$K_i(\vartheta) \, . \, \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta))$$

durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$, aber durch keine anderen Primideale der i^{ten} Seite teilbar. Diese Zahl kann weiter nur durch solche Primideale von $(p, \varphi(\vartheta))$ teilbar sein, welche zu den $i - 1$ ersten Seiten gehören. Denn in der Summe

$$K_i(\vartheta) \, . \, \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = K_i(\vartheta) \left(\theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)}} + S_{j,1}^{(i)}(\vartheta) \, . \, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)} - 1} + \cdots + S_{j, \varepsilon_j^{(i)}}^{(i)}(\vartheta)\right)$$

sind alle Glieder ausser dem letzten nach Satz 23 durch alle Primideale der Seiten $L_{i+1}, \ldots L_k$ teilbar.

Daraus sieht man leicht ein, dass das Ideal

$$I = [p, \varphi(\vartheta), N_1(\vartheta), \ldots, N_{i-1}(\vartheta), K_i(\vartheta) \,.\, \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta))]$$

eine Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ ist. Denn ein Primideal $\mathfrak{p}_j^{(s)}$ geht nicht in $K_i(\vartheta) \,.\, \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta))$ auf, wenn $s > i$ ist, wenn aber $s < i$ ist, geht dieses Ideal nicht in der Zahl $N_s(\vartheta)$ auf, wie aus dem Satze 23 folgt. Das Ideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ geht dagegen in allen Zahlen des Ideals auf, während kein anderes Primideal der i^{ten} Seite diese Eigenschaft besitzt.

Es kommt jetzt nur darauf an, eine Zahl so zu bestimmen, dass sie durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ genau in der ersten Potenz teilbar ist.

Wenn die Primidealzerlegung von p durch Satz 24 gegeben ist, folgt aus Satz 16, dass man auch

$$\varphi(\vartheta) = (\mathfrak{p}_1^{(i)} \,.\, \mathfrak{p}_2^{(i)} \ldots \mathfrak{p}_{t_i}^{(i)})^{\varkappa_i} \,.\, \Phi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{32}$$

hat, wo das Ideal Φ_i durch kein Primideal der i^{ten} Seite teilbar ist. Man kann nun, da $\varkappa_i$ zu λ_i relativ prim ist, zwei ganze, rationale positive Zahlen z_i und y_i derart bestimmen, dass

$$z_i \,.\, \varkappa_i - y_i \,.\, \lambda_i = 1, \tag{33}$$

wo $y_i < \varkappa_i$ vorausgesetzt werden kann. Die Zahl

$$T_{i-1}(\vartheta)^{x_i - 1} \,.\, \frac{\varphi(\vartheta)^{z_i}}{p^{y_i}} \tag{34}$$

ist dann ganz und durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ genau in der ersten Potenz teilbar. Denn alle Primideale von p, welche nicht in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen oder in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zu den Seiten $L_1, L_2, \ldots L_{i-1}$ gehören, gehen in $T_{i-1}(\vartheta)^{x_i-1}$ in einer höheren Potenz als in p^{y_i} auf. Ein Primideal der i^{ten} Seite geht im Nenner in der Potenz $y_i \,.\, \lambda_i$, im Zähler nach (32) in der Potenz $z_i \,.\, \varkappa_i$ auf, folglich nach (33) im Zähler genau ein Mal mehr als im Nenner. Ein Primideal der s^{ten} Seite, $s > i$, geht im Nenner in der Potenz $y_i \,.\, \lambda_s$, im Zähler in der Potenz $z_i \,.\, \varkappa_s$ auf, und es ist nach (2) und (33)

$$z_i \,.\, \varkappa_s - y_i \,.\, \lambda_s = \left(\frac{\varkappa_s}{\lambda_s} - \frac{y_i}{z_i}\right) z_i \,.\, \lambda_s > \left(\frac{\varkappa_i}{\lambda_i} - \frac{y_i}{z_i}\right) z_i \,.\, \lambda_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_i}$$

und folglich

$$z_i \,.\, \varkappa_s > y_i \,.\, \lambda_s \,.$$

Die Zahl (34) ist also ganz und durch alle Primideale der i^{ten} Seite genau in der ersten Potenz teilbar.

Aus den Eigenschaften des Ideals I folgt nun leicht die Richtigkeit des Satzes:

Satz 25. Sei $N_1, N_2, \ldots N_k$ *eine Reihe von Zahlen des Körpers, welche den Bedingungen des Satzes 23 genügen, d. h.*

$$N_s = T_{s-1}(\vartheta)^{x_{s-1}} \cdot \theta_s(\vartheta) = K_s(\vartheta) \cdot \theta_s(\vartheta),$$

wo also

$$\theta_s(\vartheta) = \frac{\varphi(\vartheta)^{\lambda_s}}{p^{\varkappa_s}}$$

$$K_s(\vartheta) = T_{s-1}(\vartheta)^{x_{s-1}}.$$

Dann sind die Primideale $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ *des Satzes 24 durch*

$$\mathfrak{p}_j^{(i)} = \left(p, \varphi(\vartheta), N_1, N_2, \ldots N_{i-1}, K_i(\vartheta) \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^{z_i}}{p^{y_i}}, K_i(\vartheta) \cdot \frac{f_j^{(i)}(\vartheta)}{p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \varkappa_i}}\right)$$

bestimmt, wo die positiven, ganzen rationalen Zahlen y_i *und* z_i *durch*

$$z_i \cdot \varkappa_i - y_i \cdot \lambda_i = 1, \quad y_i < \varkappa_i$$

verbunden sind.

In dieser Darstellung des Ideals kommen noch die Zahlen

$$T_s(\vartheta) = T_{s-1}(\vartheta)^{x_{s-1}} \cdot F_s(\vartheta, \theta_s(\vartheta))$$

vor, worin die noch unbestimmten Grössen x_s auftreten. Durch Satz 25 wird allgemein die Darstellung von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ gegeben, wenn nur vorausgesetzt wird, dass N_s durch alle Primideale von p teilbar ist ausser solchen, welche in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zur s^{ten} Seite gehören. In der Bestimmung der Zahlen $T_s(\vartheta)$, § 1, war es aber notwendig die Zahl x_{s-1} so gross zu wählen, dass die Zahl

$$T_{s-1}(\vartheta)^{x_{s-1}} \cdot \theta_s(\vartheta)^{e_s+1} = T_{s-1}(\vartheta)^{x_{s-1}} \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^{\lambda_s(e_s+1)}}{p^{\varkappa_s(e_s+1)}}$$

ganz und durch alle Primidealteiler von p ausser den Primidealen der i^{ten} Seite teilbar wurde, weil dies in den späteren Untersuchungen angewandt werden sollte. Es ist aber klar, dass man, um eine Reihe von Zahlen zu erhalten, welche den Satz 22 erfüllen, nur x_{s-1} so gross zu wählen braucht, dass

$$T_{s-1}(\vartheta)^{x_{s-1}} \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^{e_s \cdot \lambda_s}}{p^{e_s \cdot x_s}} = T_{s-1}(\vartheta)^{x_{s-1}} \cdot \theta_s(\vartheta)^{e_s} \tag{35}$$

ganz und durch alle Primidealteiler von p ausser den Primidealen der i^{ten} Seite teilbar wird. Denn dann wird auch die Zahl

$$T_{s-1}(\vartheta)^{x_{s-1}} \cdot F_s(\vartheta, \theta_s(\vartheta)) = T_{s-1}(\vartheta)^{x_{s-1}}(\theta_s(\vartheta)^{e_s} + S_{s,1}(\vartheta) \cdot \theta_s(\vartheta)^{e_s-1} + \cdots + S_{s,e_s}(\vartheta))$$

ganz und kann folglich gleich $T_s(\vartheta)$ gesetzt werden, weil darin alle Primideale von p aufgehen ausser solchen, welche in $\varphi(\vartheta)$ aufgehen und zu den Seiten $L_{s+1}, \ldots L_k$ gehören.

Aus (35) folgt dann, dass ein Primideal der r^{ten} Seite im Nenner in einer Potenz $e_s \cdot x_s \cdot \lambda_r$ aufgeht, und es genügt daher sicher, wenn man $x_{s-1} > h_s \cdot \lambda$ wählt, wo λ die grösste der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{s-1}$ bedeutet. Dadurch wird es also immer möglich, die Zahlen $T_i(\vartheta)$ zu bestimmen. Für die Anwendungen ist es oft zweckmässig, die Exponenten x_s einzeln zu bestimmen, nachdem nach Satz 24 die Primidealzerlegung von p und dadurch auch von $\varphi(\vartheta)$ bestimmt ist und folglich ausgerechnet werden kann, in welchen Potenzen die Primideale im Nenner und Zähler von (35) aufgehen.

Wenn für eine Primzahl die Bedingungen des Satzes 24 erfüllt sind, rechnet man auch leicht eine untere Grenze für die Potenz der Primzahl p aus, in welcher sie in der Körperdiskriminante d aufgeht. Ein Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ geht nämlich nach DEDEKIND[1], wenn λ_i nicht durch p teilbar ist, genau in der Potenz $\mathfrak{p}_j^{(i)\lambda_i-1}$ in der Körperdifferente $\mathfrak{d}$ auf. Wenn aber λ_i durch p teilbar ist, geht dieses Ideal mindestens in der Potenz $\mathfrak{p}_j^{(i)\lambda_i}$ in $\mathfrak{d}$ auf.

Da nun

$$N\mathfrak{d} = d$$

ist, wird d mindestens durch $p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot m(\lambda_i-1)}$ teilbar, und da diese Überlegungen für alle Primideale der i^{ten} Seite richtig sind, so wird d auch durch

$$p^{m(\lambda_i-1)\sum\limits_{j=1}^{l_i} \varepsilon_j^{(i)}} = p^{m(\lambda_i-1)e_i} = p^{m \cdot l_i - m \cdot e_i}$$

teilbar. Wenn man zuletzt die Primideale aller Seiten beachtet, folgt weiter, dass d durch

[1] DEDEKIND, (B): Über die Discriminanten endlicher Körper, Göttinger Abh. 1882. § 13.

$$p^{\sum\limits_{i=1}^{k}(m\,.\,l_i - m\,.\,e_i)} = p^{m\,.\,l - m\,.\,\sum\limits_{i=1}^{k} e_i}$$

teilbar ist.

Der Summe $\sum\limits_{i=1}^{k} e_i$ kann man aber eine geometrische Deutung geben, indem man beachtet, dass e_i die Anzahl der Gitterpunkte ist, welche auf der i^{ten} Seite liegen, wenn man den Anfangspunkt nicht mitrechnet. Nennt man daher ν die Anzahl der Gitterpunkte, welche auf dem Hauptpolygone $S(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ liegen, indem man jedoch den Anfangspunkt nicht mitrechnet, so ist

$$\nu = \sum_{i=1}^{k} e_i\,.$$

Es folgt daher, dass d überhaupt durch

$$p^{\Sigma(m\,l - m\,\nu)} = p^{n - \Sigma m\,.\,\nu}$$

teilbar ist, wo die Summe über alle verschiedenen Primfunktionen zu erstrecken ist. Man kann daher sagen:

Wenn für die Primzahl p die Bedingungen des Satzes 24 erfüllt sind und keine der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ durch p teilbar ist, so ist die Körperdiskriminante genau durch

$$p^{n - \Sigma m\,.\,\nu}$$

teilbar, wo ν die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Hauptpolygone $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ bedeutet, wobei jedoch der Anfangspunkt des Polygones nicht mitgerechnet wird.

Wenn eine oder mehrere der Zahlen λ_i durch p teilbar sind, wird d durch eine höhere Potenz von p teilbar.

§ 5. Beispiele.

In vielen Fällen kann man die vorstehenden allgemeinen Resultate in verschiedenen Richtungen vereinfachen. Wenn z. B. die Bedingungen des Satzes 24 erfüllt sind, und eine Primfunktion $\varphi(x)$ in $f(x)$ nur in der ersten Potenz aufgeht, so gibt es nur ein gemeinsames Primideal für p und $\varphi(\vartheta)$, und da p durch $\mathfrak{p}$ genau in der ersten Potenz teilbar sein muss, kann man $\mathfrak{p} = (p, \varphi(\vartheta))$ setzen, und $\mathfrak{p}$ wird vom Grade m sein.

Wenn für eine Seite L_i des Polygones der Faktor $f_i(x)$ (mod L_i) irreduzibel ist, so ist das entsprechende Primideal $\mathfrak{p}_i$ dieser Seite durch

$$\mathfrak{p}_i = \left(p, \varphi(\vartheta), N_1, \ldots N_{i-1}, K_i(\vartheta) \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^{y_i}}{p^{z_i}}, N_{i+1}, \ldots, N_k\right)$$

bestimmt. Denn in diesem Ideale gehen nach Satz 23 nur Primideale der i^{ten} Seite auf, und $\mathfrak{p}_i$ geht in $K_i(\vartheta) \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^{y_i}}{p^{z_i}}$ genau in der ersten Potenz auf, wenn $y_i \cdot \varkappa_i - z_i \cdot \lambda_i = 1$ ist. Dieser Fall trifft z. B. immer ein, wenn h_i zu l_i relativ prim ist.

Es sollen nun einige Zahlenbeispiele für die früheren Untersuchungen gegeben werden. Ich wähle als erstes das bekannte Beispiel von Dedekind, wo zum

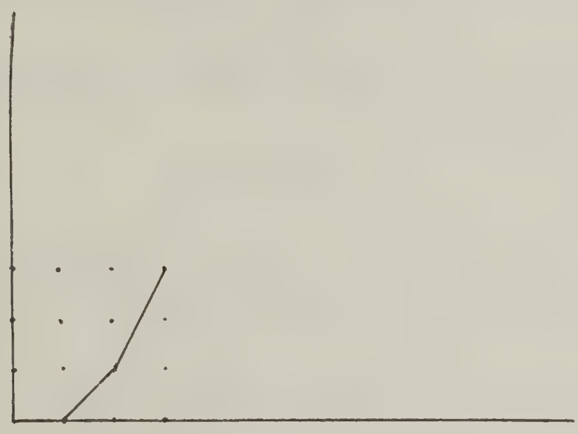


Fig. 5.

ersten Male die Existenz eines gemeinsamen, ausserwesentlichen Diskriminantenteilers eines Körpers nachgewiesen wurde.[1]

Es sei ϑ eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Diese Gleichung ist irreduzibel, da sie keine rationale Wurzel besitzt, und wie eine einfache Rechnung zeigt, ist ihre Diskriminante gleich $-2^2 . 503$. Folglich kann nur die Primzahl 2 ein Indexteiler sein. Man hat nun

$$f(x) \equiv (x+1)x^2 \pmod 2,$$

und das Polygon von $f(x)(2, x)$ hat, wie man sofort sieht, die in Fig. 5. wiedergegebene Form. Daraus folgt aber, dass

$$2 = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3$$

[1] Dedekind A. § 5.

das Produkt von 3 verschiedenen Primidealen ersten Grades sein muss, wo $\mathfrak{p}_1$ in $\vartheta + 1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ in ϑ aufgehen. Dies zeigt auch, dass 2 ein gemeinsamer, ausserwesentlicher Diskriminantenteiler des Körpers sein muss, weil es (mod 2) nur zwei verschiedene Primfunktionen ersten Grades gibt, nämlich x und $x + 1$.[1]

Nach der ersten Bemerkung dieses Paragraphen kann man hier

$$\mathfrak{p}_1 = (2, \vartheta + 1)$$

setzen. Um die Ideale $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ zu bestimmen, beachte man, dass hier $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 2$ und daher die Zahl

$$N = (\vartheta + 1) \cdot \frac{\vartheta}{2}$$

ganz und durch $\mathfrak{p}_3$ aber nicht durch $\mathfrak{p}_2$ teilbar ist. Weiter ist $x + 2$ der Faktor der ersten Seite, und folglich

$$F = (\vartheta + 1) \cdot \frac{\vartheta + 2}{2}$$

ganz und durch $\mathfrak{p}_2$ aber nicht durch $\mathfrak{p}_3$ teilbar. Daher kann man

$$\mathfrak{p}_2 = \left(2, \vartheta, \frac{(\vartheta + 1)(\vartheta + 2)}{2}\right)$$

$$\mathfrak{p}_3 = \left(2, \vartheta, \frac{\vartheta(\vartheta + 1)}{2}\right)$$

setzen. Durch eine einfache Rechnung überzeugt man sich, dass

$$\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 = (2, \vartheta),$$

und daraus wieder, dass wirklich

$$\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 = (2)$$

ist.

Als ein anderes Beispiel soll der Körper $P(\vartheta)$ gewählt werden, der durch

$$f(\vartheta) = \vartheta^3 - 8\,\vartheta + 4 = 0$$

bestimmt ist. Die Diskriminante dieser Gleichung ist $2^4 \cdot 101$, und folglich kann nur die Primzahl 2 ein Indexteiler sein. Das Polygon $(2, x)$ ist eine Gerade, wofür $\lambda = 3$, $\varkappa = 2$ ist. Dies zeigt erstens, dass $f(x)$ irreduzibel ist, und zweitens, dass

$$2 = \mathfrak{p}^3$$

[1] Dedekind A. § 4.

sein muss, wo das Primideal $\mathfrak{p}$ vom ersten Grade ist. Um $\mathfrak{p}$ zu bestimmen, beachte man, dass

$$\vartheta = \mathfrak{p}^2 \cdot \Theta$$

sein muss, wo Φ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Die Zahl $\frac{\vartheta^2}{2}$ ist dann durch $\mathfrak{p}$ in genau der ersten Potenz teilbar, weil $2 \cdot \varkappa - 1 \cdot \lambda = 1$ ist. Man kann daher

$$\mathfrak{p} = \left(2, \frac{\vartheta^2}{2}\right)$$

setzen. In diesem Falle kann aber ϑ durch kein anderes Primideal als $\mathfrak{p}$ teilbar sein, was aus

$$4 = 8\,\vartheta - \vartheta^3$$

folgt, und daher ist

$$\mathfrak{p} = \left(\frac{\vartheta^2}{2}\right)$$

ein Hauptideal.

§ 6. Gemeinsame ausserwesentliche Diskriminantenteiler eines Körpers.

Mit Hilfe des Satzes 24 kann man nun in allen Fällen die folgende Aufgabe lösen:

Es seien die ganzen rationalen, positiven Zahlen

$$m_1, m_2, \ldots m_r$$

$$l_1, l_2, \ldots l_r$$

so gegeben, dass

$$m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_2 + \cdots + m_r \cdot l_r = n \tag{36}$$

ist. Man soll einen algebraischen Körper $P(\vartheta)$ n^{ten} Grades so bestimmen, dass eine beliebig gegebene Primzahl p die Zerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{l_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r}$$

besitzt, wo das Primideal $\mathfrak{p}_i$ vom Grade m_i ist.

Die Summe (36) kann in der Form

$$m^{(1)} \cdot (l_1^{(1)} + l_2^{(1)} + \cdots + l_{r_1}^{(1)}) + m^{(2)}(l_1^{(2)} + \cdots + l_{r_2}^{(2)}) + \cdots + m^{(s)}(l_1^{(s)} + \cdots + l_{r_s}^{(s)}) \tag{37}$$

geschrieben werden, wo die Zahlen $m^{(i)}$ alle von einander verschieden sind. Setzt man dann

$$l_1^{(i)} + l_2^{(i)} + \cdots + l_{r_i}^{(i)} = L^i,$$

so ist also

$$m^{(1)} . L_1 + m^{(2)} . L_2 + \cdots + m^{(s)} . L_s = n.$$

Da es bekanntlich für einen Primzahlmodul p für alle Grade m Primfunktionen gibt, kann man eine Reihe von Primfunktionen (mod p)

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_s(x)$$

aufstellen, wo $\varphi_i(x)$ vom Grade $m^{(i)}$ in x ist. Weiter bestimmt man zu den Zahlen

$$l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots l_{r_i}^{(i)} \tag{38}$$

eine andere Reihe von Zahlen

$$h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \ldots h_{r_i}^{(i)} \tag{39}$$

derart, dass $h_j^{(i)}$ zu $l_j^{(i)}$ relativ prim ist, und

$$\frac{h_1^{(i)}}{l_1^{(i)}} < \frac{h_2^{(i)}}{l_2^{(i)}} < \cdots < \frac{h_{r_i}^{(i)}}{l_{r_i}^{(i)}}.$$

Es ist dann möglich, ein Polygon S_i zu konstruieren, wo die Projektionen auf die Y-Achse gleich den Zahlen (39) sind, während die Projektionen auf die X-Achse gleich den Zahlen (38) sind, also die Projektion des ganzen Polygones auf die X-Achse gleich L_i ist. Man bestimmt nun, was auf unendlich viele Weisen geschehen kann, ein Polynom $F_i(x)$ so, dass

$$F_i(x) \equiv \varphi_i(x)^{L_i}$$

und das Polygon $(p, \varphi_i(x))$ gleich S_i wird.

Setzt man nun

$$h_1^{(i)} + h_2^{(i)} + \cdots + h_{r_i}^{(i)} = H_i$$

und ist h eine ganze Zahl grösser als alle H_i, so werden in dem Polynome vom n^{ten} Grade

$$f(x) = F_1(x) . F_2(x) \ldots F_s(x) + p^h . M(x)$$

die Hauptpolygone $(p, \varphi_i(x))$ gleich den Polygonen S_i. Dabei bedeutet $M(x)$ ein beliebiges Polynom von höchstens $(n-1)^{\text{tem}}$ Grade. Wenn daher nur nach-

gewiesen wäre, dass man $M(x)$ so wählen könnte, dass $f(x)$ irreduzibel wäre, würde man nach Satz 24 die gestellte Aufgabe schon gelöst haben.

Sei daher

$$F_1(x) \,.\, F_2(x) \ldots F_s(x) = x^n + a_1 \,.\, x^{n-1} + \cdots + a_n$$

und

$$M(x) = b_1 \,.\, x^{n-1} + b_2 \,.\, x^{n-2} + \cdots + b_n,$$

so wird

$$f(x) = x^n + (a_1 + p^h \,.\, b_1)\, x^{n-1} + (a_2 + p^h \,.\, b_2)\, x^{n-2} + \cdots + a_n + p^h \,.\, b_n,$$

wo die b_i nach Belieben gewählt werden können. Wenn nun q eine beliebige von p verschiedene Primzahl bedeutet, so kann man immer die Zahlen b_i derart bestimmen, dass

$$a_i + p^h \,.\, b_i \equiv 0 \pmod{q} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

aber

$$a_n + p^h \,.\, b_n \not\equiv 0 \pmod{q^2}.$$

Wenn die Zahlen b_i auf diese Weise gewählt werden, ist also $f(x)$ nach dem Satze von Eisenstein irreduzibel, und daher die vorliegende Aufgabe gelöst. Es ist auch klar, dass sich durch diese Methode unendlich viele verschiedene Körper der gewünschten Art aufstellen lassen.

Auf Grund dieser Untersuchung kann man verschiedene wichtige Resultate über die Existenz der gemeinsamen, ausserwesentlichen Diskriminantenteiler ableiten.

Nach (37) bedeutet r_i die Anzahl der verschiedenen Primideale von p, welche vom Grade $m^{(i)}$ sind. Man kann nun in jedem einzelnen Falle entscheiden, ob diese Primzahl ein gemeinsamer, ausserwesentlicher Teiler der Gattungsdiskriminante ist oder nicht, indem man nach Dedekind[1] das folgende einfache Kriterium anwendet:

Damit eine Primzahl $p = \mathfrak{p}_1^{l_1} \,.\, \mathfrak{p}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r}$, wo das Primideal $\mathfrak{p}_i$ vom Grade m_i ist, ein gemeinsamer, ausserwesentlicher Diskriminantenteiler sei, ist notwendig und hinreichend, dass von den Ungleichheiten

$$r_i > n(m^{(i)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots s) \tag{40}$$

wenigstens eine erfüllt ist. Dabei bedeutet $n(m^{(i)})$ die Anzahl der Primfunktionen (mod p) vom Grade $m^{(i)}$.

---

[1] Dedekind A. § 4.

Wenn $m = a^\alpha . b^\beta \ldots$ die Primzahlzerlegung einer Zahl m ist, hat man bekanntlich

$$n(m) = \frac{1}{m}\left(p^m - \sum p^{\frac{m}{a}} + \sum p^{\frac{m}{ab}} - \cdots\right).$$

Da weiter immer $p \leq \frac{n(n-1)}{2}$ sein muss, wenn p ein gemeinsamer, ausserwesentlicher Diskriminantenteiler ist, ist man im Stande, für ein gegebenes n alle Primzahlen p zu berechnen, welche in einem Körper n^{ten} Grades gemeinsame, ausserwesentliche Teiler sein können. Mittels (40) kann man nun auch für ein gegebenes p dieser Art alle verschiedene Wertesysteme

$$\left.\begin{matrix} m_1, m_2, \ldots m_r \\ l_1, l_2, \ldots l_r \end{matrix}\right\} \tag{41}$$

bestimmen, wofür

$$p = \mathfrak{p}_1^{l_1} . \mathfrak{p}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r}, \; N\mathfrak{p}_i = p^{m_i} \tag{42}$$

ein gemeinsamer, ausserwesentlicher Teiler in einem Körper sein muss, wo p diese Zerlegung in Primideale besitzt. Aus der Lösung der Aufgabe dieses Paragraphen folgt nun immer wirklich die Existenz solcher Körper:

Für jedes System (41) *und jede Primzahl p, wofür eine der Ungleichheiten* (40) *erfüllt ist, lassen sich, und zwar auf unendlich viele Weisen, solche Körper n^{ten} Grades bestimmen, dass p ein gemeinsamer, ausserwesentlicher Diskriminantenteiler mit der Primidealzerlegung* (42) *wird.*

Speziell folgt daraus: Wenn $p < n$ und $n \geq 3$ ist, so gibt es nur p Primfunktionen ersten Grades (mod p). Wenn daher $p = \mathfrak{p}_1 . \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n$ sein soll, muss p ein gemeinsamer, ausserwesentlicher Teiler sein. Wenn $n \geq 3$, gibt es also für jeden Grad unendlich viele Körper, worin gemeinsame, ausserwesentliche Diskriminantenteiler vorkommen.

§ 7. Behandlung der Ausnahmefälle.

In dem Satze 24 ist vorausgesetzt worden, dass $f(x)$ für alle Seiten der Polygone $(p, \varphi(x))$ in verschiedene Primfunktionen zerfallen soll. Nun ist es aber allgemein möglich, dass für gewisse Indexteiler auch mehrfache Primfunktionen für einige der Seiten vorkommen. Diesen allgemeinsten Fall werde ich jetzt behandeln.

Es sei also die Primfunktionzerlegung von $f_i(x)$ (mod L_i) durch (4) gegeben. Man untersucht dann wie früher, wann eine Zahl von der Form (20), $i \leq k-1$, durch alle Primidealteiler von p teilbar sein kann. Wenn (20) durch alle Primidealteiler von p teilbar ist, dann ist es möglich auch eine Zahl b von der Form

$$b = K_i(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta) \,.\, (\theta_i(\vartheta)^\varepsilon + B_1(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon-1} + \cdots + B_\varepsilon(\vartheta)) \quad \varepsilon < e_i$$

so zu bestimmen, dass auch b durch alle Primideale von p teilbar ist. Hier soll wie früher

$$B(x, y) = y^\varepsilon + B_1(x) \,.\, y^{\varepsilon-1} + \cdots + B_\varepsilon(x)$$

und

$$B'(x) = p^{\varepsilon \cdot \varkappa_i} \,.\, B(x, \theta_i(x)) = \varphi(x)^{\varepsilon \cdot \lambda_i} + B_1(x) \,.\, p^{\varkappa_i} \,.\, \varphi(x)^{(\varepsilon-1)\lambda_i} + \cdots + B_\varepsilon(x) \,.\, p^{\varepsilon \cdot \varkappa_i}$$

gesetzt werden.

Man bildet nun die Gleichung, welcher b genügt und wo alle Koeffizienten nach Satz 18 durch p teilbar sind. Durch dieselbe Schlussweise wie in § 2 folgt daraus, dass $B'(x)^n$ (mod L_i) durch $f_i(x)$ teilbar sein muss. Daraus kann man aber jetzt nicht mehr schliessen, dass $B'(x)$ (mod L_i) durch $f_i(x)$ teilbar sein muss, sondern nur, dass $B'(x)$ (mod L_i) durch das Produkt aller verschiedenen Primfunktionen von $f_i(x)$ (mod L_i), also durch

$$f_1^{(i)}(x) \,.\, f_2^{(i)}(x) \,.\,.\,.\, f_{t_i}^{(i)}(x)$$

teilbar ist. Folglich muss $B(x, y)$ und daher auch $A(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch

$$\psi_1^{(i)}(x, y) \,.\, \psi_2^{(i)}(x, y) \,.\,.\,.\, \psi_{t_i}^{(i)}(x, y)$$

teilbar sein.

Für $i = k$ untersucht man die Zahlen (26), und es folgt hier in derselben Weise, dass auch eine solche Zahl nicht durch alle Primidealteiler von p teilbar sein kann, ausser wenn $A(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch

$$\psi_1^{(k)}(x, y) \,.\, \psi_2^{(k)}(x, y) \,.\,.\,.\, \psi_{t_k}^{(k)}(x, y)$$

teilbar ist. Mit den Bezeichnungen (28) kann man diese Resultate folgendermassen zusammenfassen:

Eine Zahl

$$M_i(\vartheta) \,.\, A(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = M_i(\vartheta)\,(A_1(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{e_i-1} + \cdots + A_{e_i}(\vartheta)) \tag{43}$$

kann nur dann durch alle Primideale von p teilbar sein, wenn $A(x, y)$ (*modd* $p, \varphi(x)$) *durch das Produkt*

$$f_1^{(i)}(x, y) \cdot f_2^{(i)}(x, y) \ldots f_{t_i}^{(i)}(x, y)$$

teilbar ist.

Aus dieser Bemerkung folgt sofort, dass es für jede Seite Primideale gibt. Denn wenn es für die i^{te} Seite keine Primideale gäbe, so wäre schon $M_i(\vartheta)$ durch alle Primideale von p teilbar, was ja nicht möglich ist. Daher kann man mit Hilfe des Satzes 16 den folgenden Satz aussprechen:

Satz 26. Es sei $\varphi(x)$ *eine Primfunktion, welche* (*mod* p) *in* $f(x)$ *aufgeht, und* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal, das gleichzeitig in* p *und* $\varphi(\vartheta)$ *aufgeht. Wenn dann* p *genau durch* $\mathfrak{p}^s$, $\varphi(\vartheta)$ *genau durch* $\mathfrak{p}^t$ *teilbar ist, so hat man*

$$\frac{t}{s} = \frac{\varkappa_i}{\lambda_i}, \tag{44}$$

wo $\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$ *eine der Neigungszahlen des Polygones* ($p, \varphi(x)$) *von* $f(x)$ *ist. Umgekehrt gibt es aber auch für alle Neigungszahlen des Polygones solche Primideale von* ($p, \varphi(\vartheta)$), *dass die Exponenten die Gleichung* (44) *erfüllen.*

Ganz analog wie in § 2 folgt nun, dass die Zahl $M_i(\vartheta) \cdot F_i(\vartheta, \theta_i(\vartheta))$ und daher auch die Zahl

$$M_i(\vartheta) \cdot f_1^{(i)}(\vartheta)^{e_1^{(i)}} \ldots f_{t_i}^{(i)}(\vartheta)^{e_{t_i}^{(i)}}$$

durch alle Primideale von p teilbar ist. Dadurch beweist man aber, dass die Zahlen $M_i(\vartheta) \cdot f_j^{(i)}(\vartheta)$ sicher alle durch mindestens ein Primideal der i^{ten} Seite teilbar sein müssen. Denn wäre dies nicht der Fall, müsste schon

$$M_i(\vartheta)^{t_i-1} \cdot f_1^{(i)}(\vartheta)^{e_1^{(i)}} \ldots f_{j-1}^{(i)}(\vartheta)^{e_{j-1}^{(i)}} \cdot f_{j+1}^{(i)}(\vartheta)^{e_{j+1}^{(i)}} \ldots f_{t_i}^{(i)}(\vartheta)^{e_{t_i}^{(i)}}$$

und daher auch

$$M_i(\vartheta) \cdot f_1^{(i)}(\vartheta)^{e_1^{(i)}} \ldots f_{j-1}^{(i)}(\vartheta)^{e_{j-1}^{(i)}} \cdot f_{j+1}^{(i)}(\vartheta)^{e_{j+1}^{(i)}} \ldots f_{t_i}^{(i)}(\vartheta)^{e_{t_i}^{(i)}}$$

durch alle Idealteiler von p teilbar sein, was jedoch nach dem Bewiesenen unmöglich ist.

Weiter folgt, dass zwei Zahlen

$$M_i(\vartheta) \cdot f_{j_1}^{(i)}(\vartheta), \; M_i(\vartheta) \cdot f_{j_2}^{(i)}(\vartheta)$$

nicht durch dieselben Primideale der i^{ten} Seite teilbar sein können. Denn man kann immer zwei solche Funktionen $A(x, y)$ und $B(x, y)$ bestimmen, dass

$$A(x, y) \cdot f_{j_1}^{(i)}(x, y) + B(x, y) \cdot f_{j_2}^{(i)}(x, y) \equiv 1 \pmod{p, \varphi(x)},$$

und wenn diese Kongruenz mit $M_i(\vartheta)^2$ multipliziert und $x = \vartheta$, $y = \theta_i(\vartheta)$ gesetzt wird, so folgt, dass auch $M_i(\vartheta)$ durch ein gemeinsames Primideal der i^{ten} Seite teilbar sein muss, was nach den Eigenschaften von $M_i(\vartheta)$ nicht möglich ist.

Aus diesen Bemerkungen folgert man, indem man sich erinnert, dass ein Primideal der i^{ten} Seite immer in p in einer Potenz aufgeht, die ein Multiplum von λ_i ist:

Satz 27. Sei

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{e_1} \cdot \varphi_2(x)^{e_2} \ldots \varphi_s(x)^{e_s} \pmod{p}$$

die Primfunktionzerlegung von $f(x)$. *Dann ist*

$$p = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s,$$

wo die Ideale $\mathfrak{a}_t$ *zu einander relativ prim sind und* $\mathfrak{a}_t = (p, \varphi_t(\vartheta)^{e_t})$. *Um ein Ideal* $\mathfrak{a} = (p, \varphi(\vartheta)^e)$ *weiter zu zerlegen, konstruiert man das Newtonsche Polygon* $(p, \varphi(x))$ *von* $f(x)$ *und bestimmt die Primfunktionzerlegung*

$$f_i(x) \equiv f_1^{(i)}(x)^{e_1^{(i)}} \ldots f_{t_i}^{(i)}(x)^{e_{t_i}^{(i)}} \pmod{L_i}$$

für jede Seite des Polygones. Dann ist

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1^{(1)} \cdot \mathfrak{a}_2^{(1)} \ldots \mathfrak{a}_{t_1}^{(1)})^{\lambda_1} \ldots \left(\mathfrak{a}_1^{(k)} \ldots \mathfrak{a}_{t_k}^{(k)}\right)^{\lambda_k},$$

wo die Ideale $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ *alle zu einander relativ prim sind.*

Man findet auch leicht, dass ein Ideal $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ durch

$$\mathfrak{a}_j^{(i)} = \left(p, \varphi(\vartheta), N_1, \ldots N_{i-1}, K_i(\vartheta) \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^{z_i}}{p^{y_i}}, K_i(\vartheta) \cdot \frac{f_j^{(i)}(\vartheta)^{e_j^{(i)}}}{p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot e_j^{(i)} \cdot \varkappa_i}}\right)$$

bestimmt ist.

Die Ideale des Satzes 27 brauchen also nicht Primideale zu sein. Man kann aber verschiedene Eigenschaften der Primideale ableiten, welche in $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ aufgehen. Denn sei $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ ein Primideal, das in $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ und folglich auch in $M_i(\vartheta) \cdot \psi_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta))$ aufgeht, dann kann eine Zahl von der Form (43) nicht durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar sein,

ausser wenn $A(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch $\psi_j^{(i)}(x, y)$ teilbar ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man solche Funktionen $C(x, y)$ und $D(x, y)$ finden, dass

$$C(x, y) \,.\, \psi_j^{(i)}(x, y) + D(x, y) \,.\, A(x, y) \equiv 1 \quad (\text{modd } p, \varphi(x))$$

und folglich, wenn diese Kongruenz mit $M_i(\vartheta)^2$ multipliziert und $x = \vartheta, y = \theta_i(\vartheta)$ gesetzt würde, $M_i(\vartheta)^2$ durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar wäre.

Daher folgt, dass der Grad von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ nicht kleiner als $\varepsilon_j^{(i)} \,.\, m$ sein kann, und man kann sogar mit Hilfe des Satzes 8 beweisen, dass der Grad von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ immer durch $\varepsilon_j^{(i)} \,.\, m$ teilbar sein muss.

Ich will in diesem Zusammenhange noch eine andere Bemerkung machen, die ganz einfach aus Satz 27 folgt. Durch den Satz 15 ist ein Kriterium gegeben, wann eine Primzahl in der Körperdiskriminante, aber nicht in dem Index aufgeht. Man kann nun auch fragen: Wann geht p in dem Index, aber nicht in der Körperdiskriminante auf? Da p in diesem Falle nur verschiedene Primidealteiler haben kann, folgt aus Satz 27:

Wenn p in dem Index, aber nicht in der Körperdiskriminante aufgehen soll, muss man

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 1$$

haben, d. h. alle Neigungszahlen der Polygone müssen ganz sein.

Wenn dann für keine Primfunktionen und keine Seiten mehrfache Faktoren auftreten, so ist auch p wirklich ein Teiler des Index, aber kein Teiler der Körperdiskriminante. Wenn aber mehrfache Primfunktionen für die Seiten auftreten, bleibt die Frage noch unentschieden.

§ 8. Polygone höherer Stufen.

Durch den Satz 27 und folgende Bemerkungen ist man zu einem ganz analogen Verhältniss gekommen, wie früher durch die Untersuchungen des § 5. III, nur mit dem Unterschiede, dass man jetzt auf einer höheren Stufe steht, indem es sich da um die Zerlegung der Ideale $\mathfrak{a} = (p, \varphi(\vartheta)^e)$ handelte, die durch den Satz 27 in die Ideale $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ zerlegt wurden, während jetzt eine weitere Zerlegung der Ideale $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ bestimmt werden soll.

Dies geschieht nun in einer ganz analogen Weise. Ich werde mich aber der Einfachheit wegen auf einen speziellen Fall beschränken, nämlich den, dass das Polygon $(p, \varphi(x))$ eine Gerade ist. Durch die Verhältnisse in diesem Falle ge-

winnt man aber, ebenso wie früher, eine Übersicht über die Verhältnisse im allgemeinsten Falle.

Wie in § 7, III sei

$$f(x) \equiv \varphi(x)^l \pmod{p},$$

das Polygon $(p, \varphi(x))$ eine Gerade L und

$$f(x) \equiv f_1(x)^{e_1} \dots f_s(x)^{e_s} \pmod{L}.$$

Man bildet nun eine Entwickelung $(L, f_i(x))$ ebenso wie früher die Entwickelung $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$

$$f(x) = \sum_s Q_s(x) \cdot f_i(x)^s, \tag{45}$$

wo die $Q_s(x)$ Polynome von höchstens $(\varepsilon_i \cdot m - 1)^{\text{tem}}$ Grade in x sind. Wenn man hier ein jedes Glied $Q_s(x) \cdot f_i(x)^s$ ausrechnet, wird man nur solche Glieder in der Entwickelung $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ erhalten, welche durch Punkte auf oder oberhalb L abgebildet werden. Man zeichnet nun die mit L parallelen Geraden $L_1, L_2, \dots$ und untersucht wie in § 6, II, zu welcher von diesen Geraden das Polynom $Q_s(x) \cdot f_i(x)^s$ gehört. Nimmt man allgemein an, dass dieses Polynom zur Geraden L_{α_s} gehört, so repräsentiert man das Polynom in einem Koordinatensystem durch den Punkt (s, α_s). Zu jedem Gliede in der Entwickelung (45) gibt es dann einen Punkt, zu diesen Gitterpunkten konstruiert man ein Newtonsches Polygon, und dadurch kann man in analoger Weise die Idealzerlegungen der Ideale $\mathfrak{a}_j^{(i)}$ bestimmen. Wenn man durch die Ideale dieses Polygones nicht zu der Primidealzerlegung von p gelangt, muss man in gleicher Weise die Polygone der dritten Stufe konstruieren usw. Man sieht ein, dass eine gewisse Analogie zwischen der Primidealzerlegung und der Bestimmung der Reihenentwickelung einer algebraischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle besteht.

Ich gehe auf die Beweise dieser Sätze nicht ein, weil die Verhältnisse hier ziemlich verwickelt werden. Dies ist insofern vielleicht nicht notwendig, weil es möglich ist, dass man in jedem Körper solche Zahlen θ bestimmen kann, dass diese einer Gleichung $f(\theta) = 0$ genügen, wo $f(x)$ die Forderungen des Satzes 24 erfüllt.

Dedekind[1] versuchte vor der Entdeckung der Existenz von gemeinsamen, ausserwesentlichen Diskriminantenteilern nachzuweisen, dass es in jedem Körper

[1] Dedekind A. § 4.

solche Zahlen gäbe, dass der Index nicht durch p teilbar wäre, »und mit deren Hülfe es folglich gelingen würde, die Bestimmung der Idealfaktoren von p auf die Theorie der höheren Congruenzen zurückzuführen».

Wenn aber

$$p = \mathfrak{p}_1^{l_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r}, \quad N\mathfrak{p}_i = p^{m_i}$$

ist und unter den Zahlen m_i mehr gleiche vorkommen, als es verschiedene Primfunktionen vom Grade m_i (mod p) gibt, so ist es klar, dass der Satz von Dedekind nicht ausreichen kann. Es ist nun von Wichtigkeit zu bemerken, dass, wenn man mit Polygonen operiert, ein analoges Verhältniss nicht besteht, weil es nach § 6 immer möglich ist, wenn ein System von Zahlen (41) vorgelegt ist, die Primidealzerlegung von p nach Satz 24 zu bestimmen.

Zu diesen Untersuchungen werde ich in einer späteren Arbeit zurückkehren. Sie sind in der Weise von der grössten Wichtigkeit, als es durch die hier zwar noch fragliche Existenz einer Zahl θ immer möglich wurde, die Theorie der Ideale nicht auf höhere Kongruenzen, sondern auf die Theorie der Kongruenzen für Polygone aufzubauen. Es ist mir aber in der Tat gelungen nachzuweisen, dass es in jedem Körper solche Zahlen θ gibt.

ÜBER BOLZANOS NICHTDIFFERENZIERBARE STETIGE FUNKTION.

Von

GERHARD KOWALEWSKI

in Dresden.

In der Sitzung wom 16. Dezember 1921 ist der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften eine höchst interessante Mitteilung des Herrn Jašek über Bolzanos wissenschaftlichen Nachlass vorgelegt worden. Daraus geht u. a. hervor, dass Bolzano schon vor dem Jahre 1834, also mehr als drei Jahrzehnte vor Weierstrass im Besitze eines ziemlich einfachen Verfahrens war, eine nirgends differenzierbare stetige Funktion zu konstruieren. In dem von Herrn Jašek ans Licht gezogenen Manuskript über Funktionenlehre sind die Beweise allerdings nicht mit aller Schärfe durchgeführt. Auch hat sich Bolzano damit begnügt, das Fehlen der Ableitung für eine zwar überall dichte, jedoch nur abzählbare Menge von Stellen wirklich zu konstatieren. Herr Rychlík hat aber in einer an derselben Stelle erschienenen Arbeit (3. Februar 1922) gezeigt, wie man diese Lücken ausfüllen kann. Ich selbst habe in einer kurzen Note in den Leipziger Berichten (12 Juni 1922) ebenfalls zu Bolzanos bewundernswürdiger Leistung Stellung genommen und sein Verfahren geometrisch eingekleidet.

Bolzano benutzt eine besondere Grundoperation, durch die eine Strecke PQ in einen vierteiligen Streckenzug verwandelt wird. Er teilt PQ zunächst in die beiden Hälften PM und MQ und diese weiter in vier gleiche Teile PP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3M bezw. MQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q. Nun wird Q_3 durch Spiegelung an der Horizontalen des Punktes Q in Q'_3 und P_3 durch Spiegelung an der Horizontalen des Punktes M in P'_3 übergeführt und der Streckenzug $PP'_3MQ'_3Q$ gezeichnet. Im Übergange von der Strecke PQ zu dem Streckenzuge $PP'_3MQ'_3Q$ besteht Bolzanos Grundoperation. Indem er auf die vier Strecken des aus PQ hergeleiteten Streckenzuges wieder die Grundoperation anwendet, erhält er einen 4^2-teiligen Streckenzug, dessen einzelne Strecken von Neuem der Grundoperation unterworfen

werden, und so fort. Die so entstehenden Streckenzüge konvergieren nach einer Kurve, die auf eine horizontale x-Achse und eine vertikale y-Achse bezogen eine nirgends differenzierbare stetige Funktion darstellt.

Auffallend und durch nichts zu erklären ist es, warum Bolzano bei seiner Grundoperation gerade die *Vier*teilung der beiden Streckenhälften bevorzugt. Seine Konstruktion einer nirgends differenzierbaren stetigen Funktion gelingt nämlich ebenso gut, wenn man die beiden Streckenhälften PM und MQ nicht vierteilt, sondern *halbiert*, worauf dann die Halbierungspunkte an den Horizontalen der Punkte M bezw. Q gespiegelt werden. Hat Bolzano nicht gesehen, dass sein Verfahren unnötig kompliziert war? Ich halte es für ausgeschlossen, dass dies dem Scharfblick des genialen Mannes entgangen sein sollte, und habe mir eine andere Erklärung zurechtgelegt, die sich möglicherweise bei der weiteren Durchforschung der noch keineswegs vollständig durchmusterten, ja nicht einmal der Zeit nach geordneten Manuskriptschätze bestätigen wird. Wir wissen durch Herrn Jašek, dass Bolzano gewohnt war denselben Gegenstand auf verschiedene Weisen darzustellen und dass es wegen mangelnder Datierung der Manuskripte nicht selten schwer ist, die definitive Darstellung herauszuerkennen. So möchte ich nun glauben, dass jene Vierteilung der Streckenhälften aus einer andern Bearbeitung der ganzen Frage stammt, bei der sie sich von selbst aufdrängt. Ich möchte in vorliegender Note die Rekonstruktion dieses andern Gedankenganges, wie er mir vorschwebt, versuchen.

Jede Strecke von der Steigung s lässt sich (auf zwei Weisen) als geometrische Summe zweier Strecken von den Steigungen $2s$ bezw. $-2s$ darstellen. Handelt es sich z. B. um die Bildstrecke der komplexen Zahl $x+iy$ oder $x+isx$, so kann man in der Tat x_1 und x_2 derart wählen, dass

$$x + isx = (x_1 + 2isx_1) + (x_2 - 2isx_2)$$

ist, und zwar findet man

$$x_1 = \frac{3x}{4},\ x_2 = \frac{x}{4}.$$

Die gewünschte Zerlegungsformel lautet somit, wenn wir statt sx wieder y schreiben,

$$x + iy = \left(\frac{3x}{4} + \frac{3iy}{2}\right) + \left(\frac{x}{4} - \frac{iy}{2}\right). \tag{1}$$

Man sieht, wie sich hier von selbst die Vierteilung des x einstellt. In Fig. 1 ist diese Zerlegung einer Strecke in zwei, wie ich sagen möchte, *doppelt so steile* Strecken zur Darstellung gebracht. Das eine Mal liegen beide Komponenten

oberhalb, das andre Mal beide unterhalb der betrachteten Strecke. Es gibt also für eine Strecke sozusagen eine *obere* und eine *untere* Zerlegung in zwei doppelt so steile Strecken. Die Ordinaten der Komponentenstrecken sind, wie die Formel (1) zeigt, $\frac{3}{2}$ bezw $-\frac{1}{2}$ der Ordinate der ursprünglichen Strecke. Wenn man also eine gegebene Strecke zuerst halbiert und dann jede Hälfte in zwei doppelt so steile Strecken zerlegt, so werden deren Ordinaten $\frac{3}{4}$ bezw. $-\frac{1}{4}$ von der Ordinate der Ausgangstrecke sein. Der Umstand, dass diese beiden Zahlen ihrem Betrage nach kleiner als 1 sind, ist für das Gelingen des von mir rekonstruierten Bolzanoschen Verfahrens von wesentlicher Bedeutung. Besonders klar übersieht man die Verhältnisse, wenn man jedesmal die Zerlegung der Streckenhälften in zwei *obere* doppelt so steile Komponenten bevorzugt. Der Gang des Verfahrens ist dann folgender:

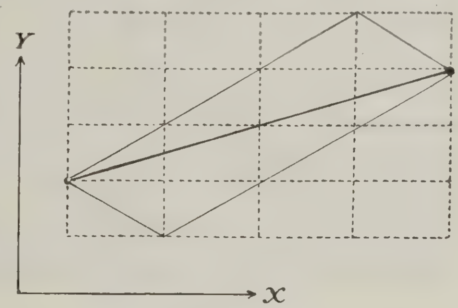


Fig. 1.

Die Strecke PQ wird halbiert und jede Hälfte in zwei obere Strecken von doppelt so grosser Steilheit zerlegt. Dadurch entsteht ein viergliedriger Streckenzug $y = \varphi_1(x)$. Seine Strecken werden in derselben Weise behandelt wie PQ, wodurch man zu einem 4^2-gliedrigen Streckenzug $y = \varphi_2(x)$ gelangt, und so fort. Offenbar werden dann die 4^n Strecken von $y = \varphi_n(x)$ im Vergleich zur Ausgangsstrecke 2^n-mal so steil sein. Ausserdem gilt für das ganze x-Intervall die Beziehung $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, weil wir uns konsequent für die *obere* Zerlegung in zwei doppelt so steile Strecken entschieden haben. Endlich ist aus der Konstruktion die Ungleichung

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) < \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} K$$

zu entnehmen, wobei K den Ordinatenbetrag der Strecke PQ bezeichnet. Dadurch ist die gleichmässige Konvergenz der Reihe

$$\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \cdots$$

gesichert, also auch die Existenz und Stetigkeit der Bolzanoschen Grenzfunktion

$$\Phi(x) = \lim \varphi_n(x).$$

Man sieht nun sofort, dass $\Phi(x)$ an allen Stellen, die Eckpunkte irgend eines der Streckenzüge $y = \varphi_n(x)$ sind, nach rechts die Ableitung $+\infty$, nach

links die Ableitung $-\infty$ hat. Ebenso ist an der Stelle P die rechtsseitige Ableitung $+\infty$, an der Stelle Q die linksseitige Ableitung $-\infty$ vorhanden.

Betrachten wir irgend einen andern Punkt A der Kurve $y = \Phi(x)$, so wird er oberhalb einer bestimmten Strecke $P_n Q_n$ des Streckenzuges $y = \varphi_n(x)$ liegen, deren Länge mit wachsendem n nach Null konvergiert. Es kommt nun daruf an, ob es unter diesen Strecken $P_n Q_n$, die offenbar Sehnen der Bolzanoschen Kurve sind, unendlich viele steigende und zugleich unendlich viele fallende gibt oder nur eine Art von beiden. Je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt, sprechen wir von einem Kurvenpunkt A erster oder zweiter Klasse. Die Punkte jeder Klasse bilden eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums, wie man unschwer erkennt. Ist A ein Punkt erster Klasse und $P_n Q_n$ aufsteigend, so wird, da sich A oberhalb $P_n Q_n$ befindet, $P_n A$ stärker aufsteigen als $P_n Q_n$.

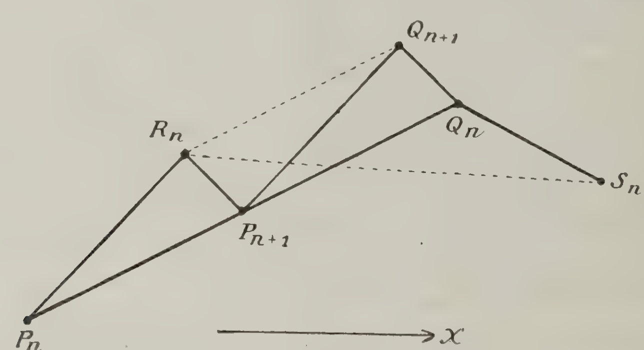


Fig. 2.

Wenn also für unendlich viele Werte von n diese Beziehung stattfindet, so ist damit gesagt, dass es an der Stelle A eine ausgezeichnete Folge linksseitiger Differenzenquotienten mit dem Grenzwert $+\infty$ gibt. Analog lässt sich einsehen, dass dort eine ausgezeichnete Folge von Differenzenquotienten mit dem Grenzwert $-\infty$ vorhanden ist, weil unendlich viele der Sehnen $P_n Q_n$ unterhalb A absteigend laufen. Ist A ein Punkt zweiter Klasse, so werden entweder fast alle zugehörigen Sehnen $P_n Q_n$ aufsteigend oder fast alle absteigend sein. Durch Umkehrung der y-Achse lässt sich der zweite auf den ersten Fall zurückführen, so dass es genügt, diesen allein näher zu betrachten. Zunächst ist wie bei den Punkten erster Klasse eine ausgezeichnete Folge linksseitiger Differenzenquotienten mit dem Grenzwert $+\infty$ vorhanden. Um nun zu erkennen, dass an der Stelle A nicht etwa eine einheitliche Ableitung vom Werte $+\infty$ auftritt, genügt der Anblick der Figur 2.

Sicher trifft sie für unendlich viele Werte von n zu, d. h. es liegt unendlich oft $P_{n+1} Q_{n+1}$ über der rechten Hälfte von $P_n Q_n$. Wäre dem nicht so, dann

hätten die Sehnen $P_n Q_n$, von einem gewissen Index an, einen gemeinsamen Anfangspunkt, mit dem auch A zusammenfiele, während doch A kein Punkt P_n sein soll. In der Figur muss man sich A über der Strecke $P_{n+1} Q_{n+1}$ liegend denken. Werden nun die Koordinaten der Strecke $P_n S_n$ mit h_n, k_n bezeichnet, so hat nach Formel (1) $P_n Q_n$ die Koordinaten $\frac{3h_n}{4}$, $\frac{3k_n}{2}$ und $P_n R_n$ die Koordinaten $\frac{3^2 h_n}{2 \cdot 4^2}$, $\frac{3^2 k_n}{2 \cdot 2^2}$, also $R_n S_n = P_n S_n - P_n R_n$ die Koordinaten $\frac{23}{32} h_n$, $-\frac{1}{8} k_n$. Die Steigung der Sehne $R_n S_n$ wird mithin $-\frac{4}{23}\frac{k_n}{h_n}$ sein und nach $-\infty$ streben. Liegt der Punkt A *unendlich oft* oberhalb $R_n S_n$, so dass $A S_n$ steiler läuft als $R_n S_n$, dann hat man an der Stelle A eine ausgezeichnete Folge rechtsseitiger Differenzenquotienten, die nach $-\infty$ konvergiert. Es bleibt also nur noch zu erwägen, was geschieht, wenn der Punkt A in Figur 2, die für unendlich viele Werte von n zutrifft, *fast immer* unterhalb der Sehne $R_n S_n$ liegt. Dann geht von A aus nach links die Sehne $A R_n$, steiler als $S_n R_n$, und nach rechts die Sehne $A Q_{n+1}$, steiler als $R_n Q_{n+1}$, d. h. steiler als $P_n Q_n$. Wir haben also an der Stelle A eine ausgezeichnete Folge linksseitiger Differenzenquotienten mit dem Grenzwert $-\infty$ und eine ausgezeichnete Folge rechtsseitiger Differenzenquotienten mit dem Grenzwert $+\infty$.

Zusammenfassend wäre zu sagen, dass die Bolzanosche Funktion $\Phi(x)$, so wie wir sie hier rekonstruiert haben, im ganzen Innern des Intervalles nirgends eine Ableitung besitzt, dass sich vielmehr an jeder Stelle auf der einen Seite eine ausgezeichnete Folge von Differenzenquotienten mit dem Grenzwert $+\infty$, auf der anderen Seite eine solche mit dem Grenzwert $-\infty$ nachweisen lässt. An den Grenzen des Intervalles sind einseitige Ableitungen mit den Werten $+\infty$ bezw. $-\infty$ vorhanden. Spiegelt man an der äussersten Ordinate links oder rechts und erweitert dann die Funktion zu einer periodischen, so zeigt sich das im Innern des alten Intervalles konstatierte Verhalten für alle Werte von x.

BIBLIOGRAPHIE.

Félix Alcan.

Paris.

Boutroux, Pierre, L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes. (Nouvelle Collection scientifique. Directeur: Emile Borel.) — 274 pp. 8. 1920. Fr. 8: —.

L'histoire d. sciences et les grands courants de la pensée mathématique. Conception hellénique d. mathématiques. Conception synthétiste d. mathématiques. L'apogée et le déclin de la conception synthétiste. Point de vue de l'analyse moderne. Mission actuelle du mathématicien.

Rougier, Louis, La philosophie géométrique de Henri Poincaré. (Bibliothèque de philosophie contemporaine.) — 203 pp. 8. 1920. Fr. 7: 50.

Préf. Prolégomènes logique et math. Les géométries non-euclidiennes: La géométrie en tant que théorie déductive. Les géométries non-euclidiennes. Le systématisation de la géométrie à l'aide de la théorie d. groupes de transformations. L'isomorphisme d. groupes et l. interprétations euclidiennes des métriques non-euclidiennes. — La théorie conventionaliste des axiomes géométriques: Théorie de la convention. Géométrie et empirisme. Géométrie et kantisme. Conclusion. Bibliographie chronologique d. articles de Poincaré sur les principes de la géométrie.

L. Alvano.

Napoli.

Torelli, Gabriele, Lezioni di calcolo infinitesimale date nella R. Università di Napoli. 2 ed. riveduta ed aumentata di una Raccolta di esercizii. — 471 pp. 8. Lire 30.

Pref. Poche nozioni sugl'insiemi numerici. Concetti fondamentali sulle funzioni di variabile reale. Continuità. Derivata e regole di derivazione. Prime proprietà d. derivata. Infinitesimi. Differenziale d'una funzione di una variabile. La integrazione considerata come operazione inversa della differenziazione. Derivate e differenziali di

ordine superiore al primo delle funzioni di una variab. Funzioni di più variabili. L'integrale definito. Serie di funzioni. Formula di Taylor ed applicaz. Funzioni implicite. Determinanti funzionali. Cambiamento d. variabili. Funzioni omogenee. Forme indeterminate. Mass. e minimi. Primi elementi per discussione d. linee piane. Sulle curvatura d. linee piane. Applicaz. d. calcolo alla geometria d. spazio a tre dimens. Poche nozioni s. equaz. differenziali. Sulla teoria d. forme quadrat. — Conferenze sull'argomento: Complementi relativi alla teoria degl'insiemi ed a quelle della integrazione d. funzioni di una variabile. Di alcuni istrumenti che risolvono graficamente qualche questione di calcolo infinitesimale. Esercizii.

Johann Ambrosius Barth.

Leipzig.

Boltzmann, Ludwig, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. T. 3: Elastizitätstheorie und Hydrodynamik, hrsg. von Hugo Buchholz. Mit 70 Fig. — XIII + 212 pp. 8. 1920. Br. M. 21: 60.

Der Potentialbegriff in d. theoretischen Physik: Allgemeine Grundlagen u. Fundamentalgleichungen d. Mechanik elastisch fester Körper (Elastizitätstheorie). Das elastische Potential. Anwend. — Die verschiedenen Formen d. Fundamentalgleichungen der Hydrodynamik. Das Geschwindigkeitspotential. Anwend.

Christiansen, C, & Müller,, Johs. J. C., Elemente der theoretischen Physik. Mit einem Vorwort und einem Nachruf auf C. Christiansen, von Eilhard Wiedemann. 4. verb. Aufl. Mit 152 Fig. — XXIV + 680 pp. 8. Geb. M. 92; Geh. M. 80.

C. Christiansen †. Einleit. Allgemeine Bewegungslehre. Elastizitätstheorie. Gleichgewicht u. Bewegung flüssiger Körper. Der elektrische Strom u. d. elektromagnetische Feld. Elektrodynamik. Elektromagnetische Wellen. Die optischen Eigenschaften durchsichtiger isotroper Körper u. durchsichtiger Kristalle. Elektronentheorie. Wärmelehre. Wärmeleitung.

Cohen-Kysper, Adolf, Rückläufige Differenzierung und Entwicklung. — 85 pp. 8. 1918. Mark 2: — 20 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Dynamik d. rückläufigen Differenzierung. Entwicklung u. Ausgleich. Dynamik d. Keimzelle.

Mach Ernst, Erkenntnis und Irrtum. Skizzen zur Psychologie der Forschung. 4., mit d. 3. übereinstimmende Aufl. Mit 35 Abb. — XI + 476 pp. 8. 1920. Geb. M. 60; Br. M. 50.

Vorw. Philosophisches u. naturwissenschaftliches Denken. Eine Psycho-physiologische Betrachtung. Gedächtnis. Reproduktion u. Association. Reflex, Instinkt, Wille, Ich. Entwicklung d. Individualität in d. natürl. u. kulturellen Umgebung. Wucherung d. Vorstellungslebens. Erkenntnis u. Irrtum. Der Begriff. Empfindung, Anschauung,

Phantasie. Anpassung d. Gedanken an die Tatsachen u. aneinander. Üb. Gedankenexperimente. Das phys. Experiment u. dessen Leitmotive. Ähnlichkeit u. Analogie als Leitmotive d. Forschung. Die Hypothese. Das Problem. Voraussetzungen d. Forschung. Beispiele v. Forschungswegen. Deduktion u. Induktion in psycholog. Beleuchtung. Zahl u. Mass. Der physiolog. Raum im Gegensatz zum metrischen. Zur Psychologie u. natürlichen Entwicklung d. Geometrie. Raum u. Geometrie vom Standpunkt d. Naturforschung. Physiologische Zeit im Gegensatz zur metrischen. Zeit u. Raum physikalisch betrachtet. Sinn u. Wert d. Naturgesetze. Zusammenstellung d. Verweise v. Zitaten aus ander. Werken des Verfassers in alter u. neuer Aufl. Reg.

Planck, Max, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Mit 6 Abb. 4., abermals umgearb. Aufl. — X + 224 pp. 8. 1921. Geb. M. 44; Br. M. 36.

Grundtatsachen u. Definit.: Allgemeines. Strahlung beim thermodynamischen Gleichgewicht. Kirchhoffsches Gesetz. Schwarze Strahlung. — Maxwellscher Strahlungsdruck. Stefan-Boltzmannsches Strahlungsgesetz. Wiensches Verschiebungsgesetz. Strahlung v. beliebiger spektraler Energieverteilung. Entropie u. Temperatur monochromatischer Strahlung. Elektrodynamische Vorgänge im stationären Strahlungsfelde. — Entropie u. Wahrscheinlichkeit: Grundleg. Definitionen u. Sätze. Ideales einatomiges Gas. Methode zur Bestimmung d. Energieverteilung im Normalspektrum. Oszillatoren. Rotatoren. Einstrahlung. Ausstrahlung. — Energieverteilung im Normalspektrum: Klassische Theorie. Quantentheorie, erste Fassung, zweite Fassung. — Absolute Entropie: Reine Hohlraumstrahlung. Materieller Körper.

Hermann Beyer & Söhne.

Langensalza.

Fink, E., Die Regeldetri das Hauptziel des Rechenunterrichts, zugleich ein Mittel zur Ausbildung und Prüfung der Intelligenz. (Pädagogisches Magazin, H. 826.) — 79 pp. 8. 1921. M. 3: —; 100 % Teuerungszuschlag.

Erörterung d. Begriffs »Intelligenz». Ausbildung d. Intelligenz. Gestaltung d. Unterrichtsverfahrens in Sexta, Quinta, Quarta, im Lyzeum. Begabungsprüfung.

Siebert, Otto, Einsteins Relativitätstheorie und ihre kosmologischen Konsequenzen. 2., unveränd. Aufl. (Pädagogisches Magazin, Heft 823.) — 44 pp. 8. 1921. M. 2: —; 100 % Teuerungszuschlag.

Vorwort. Einleit. Relativitätsprinzip. Lichtausbreitungsgesetz im Widerspruch m. d. Relativitätsprinzip. Lösung d. Widerspruchs durch d. spezielle Relativitätstheorie. Folgerungen d. spez. Relativitätstheorie. — Grundgedanke d. allgem. Relativitätsprinzips. Gravitation als Argument f. d. allgem. Relativitätsprinzip. Einige Schlüsse aus d. allgem. Relativitätsprinzip. — Unmöglichkeit einer räumlich u. zeitlich unendlichen Welt. Möglichkeit einer endlichen u. doch nicht begrenzten Welt. Struktur d. Raumes nach d. allgem. Relativitätstheorie. Erkenntnistheoretische Folgerungen d. Relativitätstheorie. Metaphysische Folgerungen d. Relativitätstheorie. Schlussw.

University of Calcutta.

Calcutta.

Bhattacharyya, Durgaprasanna, Vector Calculus. (Griffith Prize Thesis, 1918.) (University Studies Series.) — 90 pp. 8. 1920.

Introduct. Continuity: Differentiation of a vector function of a scalar variable. Integrals. Gradiant of a scalar funct. Linear vector funct. Differential calculus of vector functions. Integration theorems. Steady motion of a solid under no forces in liquid extending to infinity.

Cambrigde University Press.

Fetter Lane, London, E. C.

Mordell, L. J., Three lectures on Fermat's last theorem. — 31 pp. 8. 1921. 4 sh.

Neville, E. H., The fourth dimension. — 55 pp. 8. 1921. 5 sh.

Introdct. Points: Steps a. vectors. Veclines, vecplanes, a. vecspaces. Determination of vecspaces by equations. Measurement. Directions a. angles. Lines, planes a. spaces. Translation, reflection, a. rotation. Appendix. Index of terms defined.

Whittaker, E. T., & Watson, G. N., A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic function; with an account of the principal transcendental functions. 3:rd ed. — 608 pp. 8. 1920. Bd 40 sh.

Processes of analysis: Complex numbers. Theory of convergence. Continuous functions a. uniform convergence. Theory of Riemann integration. Fundamental properties of analytic functions; Taylor's, Laurent's, a. Liouville's theorems. Theory of residues; applicat. to the evaluation of def. integrals. Expansion of functions in infinite series. Asymptotic expansions a. summable series. Fourier series a. trigonom. series. Lin. diff. equations. Integral equations. — Transcendental functions: Gamma function. Zeta func. of Riemann. Hypergeometr. function. Legendre funct. Confluent hypergeometr. funct. Bessel funct. Equations of mathemat. physics. Mathieu funct. Elliptic funct. Gen. theorems a. Weierstrass funct. Theta funct. Jacobian elliptic funct. Ellipsoidal harmonics a. Lamé's equation.

Clarendon Press.

Oxford.

Hardy, G. H., Some famous problems of the theory of numbers and in particular Waring's problem. An inaugural lecture delivered before the University of Oxford. — 34 pp. 8. 1920. 1 sh. 6 d.

Columbia University Press.

New York.

MITCHELL, S. A., Parallaxes of 260 stars, derived from photographs made at the Leander McCormick Observatory. Assist. by C. P. OLIVIER, H. L. ALDEN, and others. (Publication 9. of the Ernest Kempton Adams Fund for Physical Research, Columbia University.) — 693 pp. 4. 1920.

Librairie Delagrave.

Paris.

BOUASSE, H., Résistance des matériaux. (Théorie de l'élasticité.) Bibliothèque scientifique de l'ingénieur et du physicien. — 563 pp. 8. 1920.

Inutilité des mathématiques pour la formation de l'esprit. Théorie de l'élasticité d. corps isotropes. Module d'Young et coefficient de Poisson. Flexion simple ou circulaire. Poutre encastrée à un bout, libre à l'autre. Flexion dans la théorie de la résistance. Poutre reposant sur deux appuis. Poutre encastrée. Poutre continue. Elastique. Prisme chargé debout. Poutres courbes. Torsion. Théorie correcte de la torsion d. prismes. Equilibre des fils déformés. Expériences diverses. Mesure d. paramètres. Equilibre d. cylindres et d. sphères. Compressibilité cubique d. liquides. Déformations permanentes d. solides. Réactivité. Etude complète d. déformations par torsion. Plasticité. Propriétés diverses. Equilibre résultant du frottement. Ciment armé.

Dunod, Editeur.

Successeur de H. Dunod et E. Pinat, Paris.

CLAUZEL, G., Effets gyroscopiques et méthodes vectorielles. Questions de mécanique simplifiées. — 147 pp. 8. 1920. Fr. 14: —.

Effets gyroscopiques. Gyroscope: Théorie simplifiée. Mouvement approximatif d'un solide de révolution homogène tournant très rapidement autour de son axe de figure qui peut pivoter autour d'un point de sa longueur supposé fixe. Applications. Equations du mouvement rapportées à des axes mobiles passant par un point fixe de l'axe de figure. Effets de la rotation de la terre sur le gyroscope. Mouvement de la toupie gyroscopique et de l'axe du gyroscope. — Axes de vecteurs. Simplification de définitions d'écritures et de calculs: Axe de deux vecteurs. Généralisation. Applications. Moment d'un vecteur. Equations relatives au mouvement d'un solide tournant autour d'un axe fixe ou d'un point fixe.

PHILLIPPE, P., & FROUMENTY, M., Cours de géométrie. 2ième éd. entièrement refondue. T. 1: Première année, avec 200 énoncés d'exercices théoriques et techniques. 272 pp. 8. 1920. Fr. 9: 75. — T. 2: Deuxième année, avec 540 d'exercices théoriques et techniques. 644 pp. 8. 1920. Fr. 15: —.

1. Définitions préliminaires. Ligne droite. Plan. Angle. Droites parallèles. Symétrie d'une figure plane par rapport à une droite de son plan. Triangle isoscèle. Grandeur relative d. cotés d'un triangle. Comparaison d. lignes brisées ayant mêmes extrémités. Longueurs d. segments de droites issus d'un point et aboutissant à une droite. Intersection d'une droite et d'un cercle. Lieu d. points équidistants de deux points donnés. Propriétés d. diamètres d'un cercle. Intersect. de deux cercles. Cas d'égalité d. triangles. Construction de triangles. Propriétés de la bissectrice d'un angle. Applicat. Propriétés d. cordes d'un cercle. Parallélogramme. Mesure d. angles. Déplacement d'une fig. plane dans son plan. Droites et plans parallèles. Droites et plans perpendiculaires. Dièdre. Trièdres. Translation et rotat. d'une fig. dans l'espace. Symétrie dans l'espace.

2. Introd. Longueurs proportionnelles. Homothétie. Similitude d. polygones plans. Puissance d'un point par rapport à un cercle. Relations mécan. dans l. triangles. Notions très élément. de trigonométrie. Polygones réguliers. Longueur de la circonférence. Mesure d. aires planes. Polyèdres. Corps ronds.

Dürr'sche Buchhandlung.

Leipzig.

Auerbach, Felix, Das Wesen der Materie. Nach dem neuesten Stande unserer Kenntnisse und Auffassungen dargestellt. (Ordentliche Veröffentlichung d. »Pädagogischen Literatur-Gesell. Neue Bahnen».) — VIII + 147 pp. 8. 1918. Geb. Mark 9: —.

Einleit. Was ist Materie? Konkret u. abstrakt. Sinnesempfindungen. Raum. Gesichts- u. Tastraum. Zeit. Dauerkonfiguration. Gegenstand u. Widerstand. Körper. Trägheit. Masse. Wahre u. scheinbare Masse. Kinetische Masse. Ponderable Körper. Gewicht. Masse u. Kraft. Dichte u. spezif. Gewicht. Verschiebung u. Drehung. Trägheitsmoment. Elastizität. Volum.- u. Gehaltsmodul. Aggregatzustände. Kristalle. Flüss. Kristalle. Flüssigkeiten. Kapillarität. Lockere Massen. Temperatur. Ideale u. wirkl. Gase. Kritischer Zustand. Wärme. Spezif. Wärme. Energie. Arbeit. Erhaltung d. Stoffes. Erhalt. d. Energie. Chemische Umwandlungen. Elemente u. Verbind. Molekulartheorie. Atomistik. Molekeln. Äquivalentzahlen. Atome. Dissoziation. Kinetische Gastheorie. Variationskurve. Loschmidtsche u. Avogadrosche Zahl. Lösungen. Osmotischer Druck. Flüssigkeiten. Feste Körper. Molekulartheorie d. Kristalle. Röntgenstrahlen. Atommodelle. Kristalloide u. Kolloide. Emulsionen. Kolloidale Lös. Brownsche Bewegung. Strahlung. Schwarzer Körper. Strahlungsgesetze. Quantentheorie. Kinet. Theorie. Atomwärme u. Molekularwärme. Dulong-Petitsches Gesetz. Period. System d. Elemente. Spezif. Wärme. Wirkungsquantum. Elektrizität. Leitung u. Strahlung. Omsches Gesetz. Widerstand. Lösungen. Elektrolyse. Ionen. Wanderung d. Ionen. Gefrierpunktserniedrigung u. Siedepunktserhöhung. Osmotischer Druck. Dissoziat. Wanderung d. Ionen. Elementarquantum. Durchgang d. Electrizität durch Gase. Kathodenstrahlen. Ladung u. Masse. Elektronen. Elektronenstrahlen. Atomstruktur. Elem. quantum. Spektrum. Linienserien. Radioaktivität. Zerfall d. Elem. Phasenlehre. Magnetismus. Weltäther. Relativitätstheorie.

F. Fontane & Co.

Berlin, S. W. 68.

Moszkowski, Alexander, Einstein. Einblicke in seine Gedankenwelt. Gemeinverständliche Betrachtungen über die Relativitätstheorie und ein neues Weltsystem. Entwickelt aus Gesprächen mit Einstein. — 240 pp. 8. 1921.

Erscheinungen am Firmament. Ueb. unsere Kraft. Walhalla. Menschen-Erziehung. Der Entdecker. Aus verschiedenen Welten. Probleme. Hauptlinien u. Nebenwege. Ein Hilfsversuch. Vereinzelte Signale. Er selbst.

A. F. Formiggini.

Roma.

Loria, Gino, Newton. (Profili, N. 52.) — 69 pp. 8. 1920. L. 3: —.

Gauthier-Villars & Cie.

Paris.

Ampère, André-Marie, Mémoires sur l'électromagnétisme et l'électrodynamique. (Les Maîtres de la pensée scientifique, collection publ. par M. Solovine. 9.) — XIV + 110 pp. 8. 1921. Fr. 3: —.

Drzewiecki, S., Théorie générale de l'hélice. Hélices aériennes et hélices marines. — 183 pp. 8. 1920.

Eléments de l'aile. Pas et incidences. Rapport de compatibilité. Rendement. Abaques et table de calcul. Détermination d. paramètres caractéristiques de l'aile. Ailes à pas constant. Largeur et forme d'aile. Action de l'hélice sur le fluide. Fatique de l'aile. Aile compensée. Mesures strobométriques et stroboscopiques. Moulinets. Moulinets autorégulateurs. Note de M. Pillard. Planches. Table de log.

Halphen, G.-H., Oeuvres. Publ. par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, É. Picard. Avec la collaboration de E. Vessiot. T. 3. — XII + 518 pp. 8. 1921. Fr. 90: —.

Notice sur Georges Halphen, par Camille Jordan. Mémoire sur la réduction d. équations différentielles linéaires aux formes intégrables. — Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques. — Sur quelques équations différentielles linéaires du quatrième ordre. — Sur les invariants d. équations différentielles linéaires du quatrième ordre.

Lacaze, H., Cours de cinématique théorique à l'usage des candidats à la licence et aux écoles du gouvernement. — IV + 138 pp. 8. 1920. Fr. 8: —; 100 % majoration temp.

Vecteurs. Cinématique du point. Mouvement d'un solide. Distribution d. vitesses. Composition d. accélérations. Déplacement d'un vecteur dans un plan. Compléments sur l. vecteurs. Compléments sur la cinématique du point. Compléments sur la cinémat. du solide. Compléments sur la composition d. accélérations. Compléments relat. au déplacement d'un vecteur.

Laplace, Pierre-Simon, Essai philosophique sur les probabilités. I—II. (Les Maîtres de la pensée scientifique, collection publ. par M. Solovine. 10.) — 103, 108 pp. 8. 1921. Chaque vol. 3 Frcs.

Les Maîtres de la pensée scientifique. Collection de Mémoires et Ouvrages, publ. par les soins de Maurice Solovine:

Clairaut, Alexis-Claude, Eléments de géométrie. 1—2. — 95 pp. 103 pp. 8. 1920. Fr. 3: 50.

1. Avertissement. Notice biogr. Préf. Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure d. terrains. De la méthode géométr. de comparer l. figures rectilignes.

2. De la mesure d. figures circulaires et de leurs propriétés. De la manière de mesurer l. solides et leurs surfaces.

Carnot, Lazare, Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. 1—2. — 117 pp. 104 pp. 8. 1921. Fr. 3: 50.

1. Avertissement. Notice biogr. Principes gén. de l'analyse infinitésim. Définitions. Principe fondament. Théorème sur l. équations imparfaites. Applicat. d. princ. gén. à quelq. exemples. L'algorithme adapté à l'analyse infinitésim. Calcul diff. Différentielles exponent. et logarithm. Différentielles d. quantités angulaires. Différentielles d. ordres sup. Applicat. du calcul. diff. à quelq. exemples. Calcul intégral. Applicat. du calcul int. à quelq. ex. Calcul d. variations. —

2. Des méthodes par lesquelles on peut suppléer à l'analyse infinitésim. De la méthode d'exhaustion, des indivisibles, des indéterminées, des premières et dernières raisons ou des limites. De la méthode d. fluxions. Calcul d. quantités évanouissantes. Théorie d. fonctions analyt. ou fonctions dérivées. Conclusion gén. Note.

Lavoisier et De Laplace, Mémoire sur la chaleur. 78 pp. 8. 1920. Fr. 3: —.

Roy, Louis, Cours de mécanique appliquée. A l'usage des élèves de l'Institut électrotechnique et de mécanique appliquée et des candidats au certificat de mécanique appliquée. T. 2: Statique graphique et résistance des matériaux. (Cours de l'institut électrotechnique et de mécanique appliquée de l'Université de Toulouse.) — 213 pp. 8. 1921. Fr. 30: —.

Préf. Dynamiques et funiculaires. Applicat. à la statique du corps solide. Forces continues et courbes funiculaires. Systèmes articulés. Aires, centres de gravité et moments d'inertie d. surfaces planes. — Généralités. Extension ou compression simple.

Glissement simple. Flexion simple. Torsion simple. Déformations composées. Ligne élastique. Poutres à travées solidaires. Poutres chargées de bout. Charpentes. Arcs. Enveloppes et volants.

Jul. Gjellerup.

Köbenhavn.

FRIIS-PETERSEN, Fr., & JESSEN, J. L. W., Opgavebog til Aritmetik og Algebra for det 2-aarige Præliminærkursus. I og II. — 64 pp. 8. 1921. Kr. 3: —.

HJELMSLEV, J., Elementær Geometri. Tredje Bog. — 256 pp. 8. 1921.

Læren om reelle Tal. Den geometriske Maalings teori. Den analytiske Plan. Den analytiske trigonometri. Geometriske Steder. Teoretisk Konstruktion »ved Passer og Lineal». Keglesnit.

Henri Grand.

Hamburg.

SCHWASSMANN, ARNOLD, Relativitätstheorie und Astronomie, auf wissenschaftlicher Grundlage gemeinverständlich dargestellt. Mit 15 Abb. — 34 pp. 8. 1921. M. 4: —.

Fr. Grub.

Stuttgart.

VOLK, OTTO, Entwicklung der Funktionen einer komplexen Variablen nach den Funktionen des elliptischen Zylinders. — 38 pp. 8. 1920. Kr. 2: 25. M. 37: 50.

Heimatverlag M. Hiemesch & Co.

Berlin-Steglitz.

SEPP, H., Stoff und Kraft in Verbindung mit Raum und Zeit, nach den neuesten Forschungen über den Atomzerfall sowie nach der Quanten- und der Einstein'schen Relativitätstheorie. Nach Vorträgen von Prof. Dr. L. GRAETZ, München, Vorlesungen von Prof. Dr. BERNDTS, Berlin, und nach einschlägiger Literatur allgemeinverständlich wiedergegeben. (Heim-Hochschule. Erster Selbstunterrichts-Kursus. Naturwissenschaften 11.) — 32 pp. 8. 1921. M. 2: —.

Helwingsche Verlagshandlung.

Hannover.

KIEPERT, LUDWIG, Grundriss der Differential-Rechnung. Bd 1: Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen. 14 vollst. umgearb. u. verm. Aufl. des

gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. Max Stegemann. — Mit 137 Fig. — XVI + 532 pp. 8. 1921. Kart. Mark 36: —; Geb. M. 42: —.

Geschichtliches. Einleit. Hilfssätze aus d. algebraischen Analysis. Erklärung u. Bildung d. Differential-Quotienten. Funktionen v. Funktionen. Hyperbolische Funkt. Ableitungen u. Differentiale höh. Ordn. Herleitung u. Anwend. d. Taylor'schen u. d. Mac-Laurin'schen Reihe. Konvergenz d. Reihen. Max. u. Minima v. entwickelten Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen. Bestimmung v. Ausdrücken welche an d. Grenze eine d. unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, haben. Differentiation d. nicht entwickelten Funktionen. Vertauschung d. Abhängigkeit d. veränderl. Grössen. Untersuchung v. Kurven, die auf ein rechtwinkliges Koordinaten-System bezogen sind. Untersuchung von Kurven, welche auf ein Polarkoordinaten-System bezogen sind. Tafeln. Tab.

S. Hirzel.

Leipzig.

Dingler, Hugo, Kritische Bemerkungen zu den Grundlagen der Relativitätstheorie. Vortrag gehalten auf d. 86. Versammlung deutscher Naturforscher u. Ärzte. — 29 pp. 8. 1921.

Kopff, August, Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie. — VIII + 198 pp. 8. 1921.

Vorw. Literatur, Einleit. Das Galileische Relativitätsprinzip. Prinzipe d. Relativitätstheorie. Isotropie d. Raumes in d. Physik u. die Relativität d. zeitlichen u. räumlichen Grössen. Raum-Zeit-Koordinaten u. Lorentz-Transformation. Raumartige u. zeitartige Weltvektoren. Geometrische u. mechanische Folgerungen aus d. Lorentz-Transformation. Übersicht üb. d. ältere Vektor- und Tensoranalysis. Grundgleichungen d. Elektrodynamik. Allgem. Tensoranalysis (1. Teil). Elektrodynamik d. leeren Raumes. Mechanik d. spez. Relativitätstheorie. Materie u. Energie. — Äquivalenzprinzip. Zusammenhänge d. allgem. Relativitätstheorie m. d. Riemannschen Geometrie. Allgem. Tensoranalysis (2. Teil). Grundgleichungen d. allg. Relativitätstheorie. Einsteinsche Gravitationstheorie. Besondere Fälle d. Gravitationstheorie. Gravitationsfeld d. Sterne. Reg.

Alfred Hölder.

Wien.

Wantoch Rudolf, Die Einstein'sche Relativitätstheorie. Kurze, für jedermann verständliche Besprechung. — 15 pp. 8. 1921. M. 2: —

Ulrico Hoepli.

Milano.

Beltrami, Eugenio, Opere matematiche. Pubbl. per cura della Facoltà di scienze della R. Università di Roma. T. 4 ed ultimo. — 554 pp. 4. 1920. Lire 50.

Sulla teoria degli strati magnetici. Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche. Teoria del potenziale. Funzioni associate e specialmente su quelle d. calotta sferica. Sur les couches de niveau électromagnétiques. Intorno ad un problema relativo alla teoria d. correnti stazionarie. Rappresentazione d. forze newtoniane per mezzo di forze elastiche. Teoria dell'induzione magnetica secondo Poisson. Uso d. coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità. Condizioni di resistenza dei corpi elastici. Interpretazione meccanica d. formole di Maxwell. Teoria d. onde. Funzioni sferiche d'una variabile. Funzioni complesse. Intorno ad alcuni problemi di propagazione d. calore. Considerazioni idrodinamiche. Principio di Huygens. Note fisico-matematiche. Funzione potenziale d. circonferenza. Sur la théorie de la déformation infiniment petite d'un milieu. Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky. Estensione d. principio di d'Alembert all'elettrodinamica. Quelq. remarques au sujet d. fonctions sphériques. Intorno al mezzo elastico di Green. Teoria generale d. onde piane. Considerazioni s. teoria matematica d. magnetismo. Considerazioni s. teoria matemat. dell'elettromagnetismo. Sull'espressione analitica d. principio di Huygens. Osservazioni alla Nota del prof. Morera. Sur la théorie d. fonctions sphériques. Note s. teoria d. propagazione del calore. Sui potenziali termodinamici. Sull'espressione data da Kirchhoff. A proposito di una nuova ricerca del Prof. Carlo Neumann. Equazioni dinamiche di Lagrange. Teoria d. funzioni sferiche.

Loria Gino, Storia della geometria descrittiva dalle origine sino ai giorni nostri. (Manuali Hoepli.) — XXIV + 584 pp. 8. 1921. L. 25: —

Prospettiva dalle origini sino alla fine del sec. XVII. Prospettiva teorica nel suo apogeo. Doppia projezione ortogonale dall'alba della civiltà al tramonto del sec. XVIII. Creazione d. geometria descrittiva come scienza. Collaboratori e discepoli diretti di Monge. Geometria descritt. in Italia. Ulteriori progressi compiuti in Francia d. geometria descritt. Geometria descritt. in Germania. Geom. descritt. nella Svizzera Tedesca. Geom. descritt. in Austria-Ungheria. Geom. descritt. in altri paesi d'Europa. Storia d. assonometria. Progressi compiuti d. geom. descritt. in quest'ultimo trentennio.

Ae. E. Kluwer.

Deventer (Holland).

Polak, Ir. M. W., Bezwaren tegen de opvattingen der relativisten. — 64 pp. 8. 1918. F. 1: 25.

Voorbericht. Ontstaan en beteekenis d. relativiteitstheorie. De waarde v. een natuurwetenschappelijke theorie. Gelijktijdigheid. Täuschung. Lorentz-Einsteinsche transformatieformules. Relativiteit v. tijd en lengte. Optellen v. snelheden. Lichtsnelheid als grens v. snelheid. Relativiteitsbeginsel. Literatuuropg.

Macmillan & Co, Ltd.

London, W. C. 2.

Gheury de Bray, M. E. J., Exponentials made easy or the story of »epsilon». — X + 253 pp. 8. 1921.

Introd. Prelimin. — Truth about some simple things called functions. Meaning of some queer-looking expressions. Exponentials, a. how to tame them. A word ab. tables of logarithms. A little chat ab. the radian. Spreading out algebraical expressions. — First meeting with »epsilon»: logarithmic growing a. dying away. More ab. Naperian logarithms. Epsilon's home: the logarithmic spiral. Hyperbola. Epsilon on the slack rope: what there is in a hanging chain. Case of mathematical mimicry: the parabola. Where epsilon tells the future: the probability curve a. law of errors. Taking a curve to pieces: Exponential analysis. Polar coordinates. Answers. Ind.

Jones, H. Sidney, Calculus for beginners. A text book for schools and evening classes. — IX + 300 pp. 8. Bd. 6 sh.

Functions. Graphs. Changes in funct. Rates of change. Differentiation. Ex. of diff. coefficients. Statements with diff. notation. Numerical evaluation of differentials. Differentiation from first principles. Further fundamental operations. Trigonometrical functions a. their differentiation. Compound interest law. Logarithms. Small changes a. errors. Integration. Success. differentiation. Max. a. minima. Integration. Expansion of series. Analyt. investigation. Curves. Curvature. Lengths of curves. Instantaneous centre. Areas, volumes, surfaces. Simple differential equat. Miscell. a. revision exercises.

Thompson, Silvanus P., Calculus made easy. Being a very-simplest introduction to those beautiful methods of reckoning which are generally called by the terrifying names of the Differential Calculus and the Integral Calculus. 2. ed., enlarged. — 301 pp. 8. 1921. Bd. 3 sh.

Prologue. To deliver you from the preliminary terrors. Different degrees of smallness. Relative growings. Simplest cases. Next stages. What to do with constants. Sums, differences, products, a. quotients. Successive differentiation. When time varies. Introducing a useful dodge. Geometrical meaning of differentiation. Max. a. minima. Curvature of curves. Other useful dodges. True compound interest a. law of organic growth. How to deal with sines a. cosines. Part. differentiation. Integration. Integrat. as the reverse of differentiating. Finding areas by integrating. Dodges, pitfalls, a. triumphs. Finding some solut. More about curvature of curves. How to find the length of an arc on a curve. Table of stand. forms.

Kar Majumder & Co.

Calcutta.

Sen Gupta, Jogendrakumar, The fundamentals. Vol. I. — 85 pp. 8. 1921.

Euclidean axioms. The first postulate of Euclid. The tenth axiom. Euclid's second postulate.

Martinus Nijhoff.
's-Gravenhage.

Baudet, Pierre Joseph Henry, Groepentheoretische Onderzoekingen. Academisch proefschrift ter verkrijging van den graad van doctor aan de rijksuniversiteit te Groningen, 1918. — X + 114 pp. 8. 1918.

Groepen. Stelsels van Cauchy. Eigenschappen v. eindige groepen. Automorphismen. Groepen v. de orden p, pq, pqr. Groepen v. de orde prqt.

Open Court Publishing Company.
Chicago, Ill.

Cajori, Florian, A history of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse. With portraits of Berkeley and Maclaurin. (The Open Court Series of Classics of Science and Philosophy, No. 5.) — 300 pp. 8. 1919. Cloth Dol. 2. —

Introduct. Newton. Printed books a. articles on fluxions before 1734. Berkeley's Analyst (1734); controversy with Jurin and Walton. Jurin's controversy with Robins and Pemberton. Text-books immediately following Berkeley's attack. Maclaurin's »Treatise of fluxions, 1742». Text-books of the middle of the century. Robert Heath and friends of Emerson in controversy with John Turner a. friends of Simpson. Abortive attempts at arithmetisation. Later books a. articles on fluxions. Criticisms of fluxions by British writers under the influence of d'Alembert, Lagrange, a. Lacroix. Merits a. defects of the eighteenth-century British fluxional conceptions.

Leibniz, The early mathematical manuscripts of L-. Translated from the Latin texts publ. by Carl Immanuel Gerhardt, with critical and historical notes by J. M. Child. — 238 pp. 8. 1920. Bd.

Introd. »Postscript» to the letter to James Bernoulli, dated April 1703. »Historia et Origo Calculi Differentialis». Manuscripts of the period 1673—1675. Manuscripts of the period 1676, 1677 a. a later undated MS. Gerhardt's Essay, *Leibniz in London*, with three MSS of Leibniz. Gerhardt's Essay, *Leibniz and Pascal*, with letters to Tschirnhaus a. M. de l'Hospital a. a MS of Leibniz. Conclusions.

van Rysselberghe & Rombaut.
Gand.

Stuyvaert, M., Algèbre à deux dimensions. (Publication faite avec le concours de la Fondation Agathon de Potter.) — 223. 8. 1920. Fr. 12: 50.

Préf. Matrices. Congruence de cubiques gauches. Autre congruence de cubiques gauches. Courbes algébriques gauches représentables par des matrices. Opérations

conduisant à d. matrices. Elimination d'une inconnue entre plusieurs équations. Matrices invariantes. Systèmes doublement et triplement infinis de courbes planes et de surfaces. Eliminer un paramètre d'une matrice. Variétés algébriques de dimensions exceptionnelles. Intersection de trois coniques. Courbes gauches algébriques.

Stuyvaert, M., Congruences de cubiques gauches. — 197 pp. 8. 1920. Fr. 12: 50.

Formules énumératives. Matrices invariantes fournies par une cubique gauche. Systèmes algébriques de cubiques gauches. Cubiques gauches ayant en commun deux points et trois bisécantes. Cubiques gauches ayant en commun quatre points et une bisécante. Cubiques gauches qui passent par un point et rencontrent huit fois une sextique. Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches. Cubiques ayant cinq bisécantes communes. Courbes d'ordre supérieur au troisième. Polarité dans les congruences de cubiques gauches. Propriétés de courbes annulant des matrices. Appendice.

Stuyvaert, M., Statique, Dynamique. — 205 pp. 8. 1920. Fr. 20: —

Statique du point. Equilibre des solides. Statique graphique. Principe du travail virtuel. Solides pesants. Machines simples. Systèmes funiculaires et articulés. Attraction de sphères. Cinématique du point. Dynamique du point. Cinématique d. solides. Dynamique d. systèmes. Moments d'inertie. Mouvement relatif du point.

Scientia Publisher.

Lund.

Charlier, C. V. L., Introduction to stellar statistics. (Bilaga till inbjudningsskriften till Filosofie Doktorspromotionen den 31 maj 1921.) — 49 pp. 4 plates. 1921. Kr. 5: —

Apparent attributes of the stars. Sources of our present knowledge of the stars. Some groups of known stars.

Charlier, C. V. L., Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik. — 125 pp. 8. 1920. Bd 10 Kr.

Vorw. Homograde od. alternative Statistik: Einleit. Definition homograder u. heterograder Statistik. Arithmetisches Mittel. Dispersion. Ueb. mittlere Fehler. Bernoullis Theorem. Einfachste statist. Reihe. Poissons u. Lexis' Theoreme. Beobachtete statist. Reihe. Reduzierte statist. Reihe. — Heterograde od. qualitative Statistik: Einleit. Normale Frequenzkurve. Frequenzkurven v. Typus A., v. Typus B. Ueb. Korrelation. Ueb. Korrelation zwischen in Klassen geordneten Reihen. Abgekürzte Methoden zur Berechn. d. Charakteristiken. Tafelanh.

Schulthess & Co.

Zürich.

Brandenberger, Konrad, Didaktik des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Vorlesungen zur Einführung in den Mittelschulunterricht, ge-

halten a. d. Eidgenössisch-Technischen Hochschule u. d. Universität Zürich. Nach hinterlassenen Niederschriften zusammengestellt von Anna Brandenberger & hrsg. von Heinrich Frick. — 128 pp. 8. 1920. Fr. 6: — geb.

Psychologische Grundlagen: Von d. Wechselbeziehung d. Erkennens, Fühlens, Wollens. Empfindung. Vorstellung. Anschauung. Vorstellungstypen. Psychischer Begriff. — Logische Grundlagen: Von d. Urteilen u. Schlüssen. Logischer Begriff. Definition, Einteilung. — Allg. Didaktik: Begriffsbildung im Unterricht. Lehrstufen. Propädeutischer u. systemat. Unterricht. Konzentration d. Unterrichtes. Apperzeption. Gedächtnis. Phantasie. Interesse. Bedeutung d. Aufmerksamkeit. Präparation. Fragebildung. Behandlung v. Antworten. Schriftliche Arbeiten. Von d. Disziplin. Weiterbildung d. Lehrers. Schlusswort. Anweisungen zur Kritik d. Probe- u. Demonstrationsstunden.

Società Tipografico-Editrice Nazionale.

Torino.

Fubini, Guido, Lezioni di analisi matematica. 4:a ed. interamente rifusa. (Grande Biblioteca Tecnica. 9.) — VIII + 470 pp. 8. 1920. L. 35: —.

Numeri reali. Applicaz. geometriche. Numeri complessi. Polinomii ed equazioni algebr. Determinanti, sistemi di equaz. di primo grado. Funzioni, limiti. Serie. Derivate, differenziali. Teoremi fondament. sulle derivate e loro prime applicaz. Serie di potenze. Massimi, minimi, flessi. Integrali. Calcolo diff. per le funzioni di più variabili. Prima estensione d. calcolo integrale alle funz. di più variabili. Integrali definiti e le funzioni additive d'intervallo. Funzioni addit. gen. e integrali multipli. Cambiamento de variabili nelle formole d. calcolo diff. e int. Equazioni differenziali. Alcune applicaz. geom. d. calcolo infinitesimale. Integrali curvilinei e superficiali. Complementi varii.

Fubini, G., & Vivanti, G., Esercizi di analisi matematica (Calcolo infinitesimale), con speciale riguardo alle applicazioni, ad uso degli allievi dei Politecnici. (Grande Biblioteca Tecnica. 13.) — VIII + 574 pp. 8. 1920. L. 58: —.

Teoria dei limiti. Teoria delle serie. Derivate, rette tangenti ad una curva piana, velocità, ecc. Alcune prime applicaz. d. calcolo differenziale. Funzioni di più variabili. Massimi e minimi. Funzioni primitive. Integrali definiti e indef. Integrali multipli e volumi. Applicazioni geometr. Equazioni diff. ordinarie.

Society for Promoting Christian Knowledge.

London, S. W.

The Copernicus of Antiquity (Aristarchus of Samos), by Sir Thomas Heath. (Pioneers of Progress. Men of Science, ed. by S. Chapman.) — 58 pp. 8. 1920. 1 s. 6 d. Cloth.

Thales. Anaximander. Anaximenes. Pythagoras. Parmenides. Anaxagoras. Empedocles. The Pythagoreans. Oenopides of Chios. Plato. Eudoxus, Callipus, Aristotle. Heraclides of Pontus. — The heliocentric hypothesis. On the apparent diameter of the sun. Sizes a. distances of sun a. moon. Year a. »great year». Later improvements on Aristarchus's figures. Bibliogr. Chronology.

KEPLER, by WALTER W. BRYANT. (Pioneers of Progress. Men of Science, ed. by S. Chapman.) — 62 pp. 8. 1920. 2 s. 6 d. Cloth.

Astronomy before Kepler. Early life of K—. Tycho Brahe. Kepler joins Tycho. Kepler's laws. Closing years. List of dates. Bibliogr. Glossary.

Julius Springer.

Berlin, W. 9.

BORN, MAX, Der Aufbau der Materie. Drei Aufsätze über moderne Atomistik u. Elektronentheorie. 81 pp. 8. 1920. M. 8:60. Teuerungszuschläge.

EINSTEIN, ALBERT, Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung d. Festvortrages gehalten a. d. Preussischen Akademie d. Wiss. zu Berlin am 27. Januar 1921. — 20 pp. 8. 1921. M. 2:80. Teuerungszuschläge.

KLEIN, FELIX, Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd 1: Liniengeometrie. Grundlegung der Geometrie. Zum Erlanger Programm. Hrsg. von R. FRICKE & A. OSTROWSKI. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) Mit einem Bildn. — XII + 612 pp. 8. 1921. Geh. M. 186 + Teuerungszuschläge.

LÄMMEL, RUDOLF, Die Grundlagen der Relativitätstheorie. Populärwissenschaftlich dargestellt. — 158 pp. 8. 1921. M. 14. — Teuerungszuschläge.

Mathematische Zeitschrift. Unter ständiger Mitwirkung von K. Knopp, E. Schmidt & I. Schur, hrsg. von L. LICHTENSTEIN. Wissenschaftlicher Beirat: W. Blaschke, L. Fejér, E. Hecke, G. Herglotz, A. Kneser, E. Landau, O. Perron, F. Schur, E. Study, H. Weyl. — Bd. 9. & 10. 1921. 8. M. 96: — pro Bd.

SCHLICK, MORITZ, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Zur Einführung in das Verständnis der Relativitäts- u. Gravitationstheorie. 3. verm. u. verb. Aufl. — 90 pp. 8. M. 8. — Teuerungszuschläge.

SCHNEIDER, ILSE, Das Raum-Zeit-Problem bei Kant und Einstein. 75 pp. 8. 1921. M. 12. Teuerungszuschläge.

Strecker u. Schröder.

Stuttgart.

MILLER, KONRAD, Die Erdmessung im Altertum und ihr Schicksal. — 64 pp. 8. 1919.

Geschichte d. Erdmessung bei d. Griechen. Erdmessung d. Eratosthenes. Erdmessung bei d. Arabern. Gradnetz des Ptolemäus u. der Welt seiner geographischen Ortsbestimmungen. Geographische Ortsbestimmungen d. Ptolemäus in Afrika u. seine Darstellung dieses Erdteils. Literatur.

A.-B. Svenska Teknologföreningens Förlag.

Stockholm.

ANÉR, HJALMAR, Algebraisk formteori i förenklad gestalt. (Tekniskt Bibliotek. 32.) — 105 pp. 8. 1921. Kr. 5: —.

Allmänna begrepp. Kombination av konstanta element med variabel. Förenkling av Hesses form samt invertering av element. Grad o. ordning. Diskriminanter o. multiplicitet. Övergång fr. konstant element till variabel. Invarianters beteckn. o. uppställn. Invarianters framställn. Övergång fr. variabel t. konstant element. Flervärdiga former. Resolventer. Systematisk ekvationslösn. gen. införande av nytt element. En grundväsentl. olikhet mellan 5-gradsekvat. o. ekvationer av lägre grad. Ekvationens lösn. kan reduceras t. lösn. av en resolvent m. endast tre element. Ekvationens lösn. m. obegränsat antal radikaler. Beräkn. av ekvationens rötter, då resolventen antages vara löst. De sexvärdiga resolventerna o. deras differensprodukter. Tillämpn. av unär formteori på andra områden. Transformation av variabeln, av rotknippen. Polyederformerna. Kortfattat sammandr. av några vikt. former.

B. G. Teubner.

Leipzig.

Vom Altertum zur Gegenwart. Die Kulturzusammenhänge in den Hauptepochen und auf den Hauptgebieten. Skizzen. 2. verm. Aufl. — X + 386 pp. 8. 1921. Geh. Kr. 3: 75; geb. Kr. 4: 50 + 120 % Teuerungszuschl.

Der Humanismus als Tradition u. Erlebnis, v. W. JAEGER. — Die Zusammenhänge im allgemeinen: 1. Uebergang von d. Antike zum Mittelalter. a) Äussere Kultur u. Wirtschaft, v. A. DOPSCH. b) Staat, Kirche u. Kultur, v. K. HOLL. c) Die Literatur, v. E. NORDEN. — 2. Wiederaufnahme d. Antike im Mittelalter u. in d. Renaissance, v. W. GOETZ. — 3. Der Neuhumanismus, v. P. HENSEL. — 4. Vom Neuhumanismus bis zur Gegenwart, v. E. SPRANGER. — Die Zusammenhänge auf d. einzelnen Gebieten: Staat u. Wirtschaft, v. E. MEYER. — Nachwirkung d. antiken Staatslebens u. d. antiken Staatstheorie in d. Neuzeit, v. A. WAHL. — Römisches Recht, v. L. MITTEIS. — Der griechische Gedanke in d. Rechtswissenschaft, v. J. PARTSCH. — Pädagogik, v. J. ZIEHEN. — Sprachwissenschaft, v. W. SCHULZE. — Geschichtswissenschaft, v. A. v. MARTIN. — Deutsche Literatur, v. G. ROETHE. — Literatur der Romania, v. V. KLEMPERER. — Englische Literatur, v. R. IMELMANN. — Kunst, v. L. CURTIUS. — Religion, v. H. LIETZMANN. — Philosophie u. Weltanschauung, v. M. WUNDT. — Mathematik, v. C. MÜLLER. — Weltbild u. Physik, v. E. GOLDBECK. — Astronomie, v. F.

Boll. — Geographie, v. J. Partsch. — Biologie, v. H. Stadler. — Chemie, v. E. v. Lippmann. — Medizin, v. J. Ilberg. — Technik, v. A. Rehm. — Vom Werte der Übersetzung für d. Humanismus, v. E. Fraenkel.

Abraham, M., Theorie der Elektrizität. Bd. 1: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrössen in der Physik, von A. Föppl. 6., umgearb. Aufl., hrsg. von M. Abraham. Mit 11 Fig. — VIII + 389 pp. 8. 1921. Geh. M. 165 (Kr. 10: 75); Geb. Kr. 12 + 120 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Vektoren. Vektorfelder. Elektrostatisches Feld im Luftraume. Dielektrika. Energie u. mechanische Kräfte d. elektrostatischen Feldes. Elektrischer Strom. — Magnetische Vektoren. Elektrodynamik quasistationärer Ströme. Elektromagnetische Wellen. — Weiterer Ausbau d. Theorie: Ferromagnetische Körper. Induktionserscheinungen in bewegten Körpern.

Abraham, M., Theorie der Elektrizität. Bd. 2: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. 4. Aufl. — VII + 394 pp. 8. 1920. Geh. Kr. 5: 75; Geb. Kr. 6: 50 + 120 % Teuerungszuschlag.

Feld u. Bewegung d. einzelnen Elektronen: Physikalische u. mathematische Grundlagen d. Elektronentheorie. Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung. Mechanik d. Elektronen. — Elektromagnet. Vorgänge in wägbaren Körpern: Ruhende Körper. Bewegte Körper. Mechanik d. Strahlungsdruckes. Relativitätstheorie.

Ahrens, W., Mathematiker-Anekdoten. Mit d. Bildnissen v. A. Riese, L. Euler, J. L. Lagrange, A. L. Cauchy, C. F. Gauss, C. G. J. Jacobi, B. Riemann, K. Weierstrass, P. G. Lejeune Dirichlet, R. Dedekind, K. H. Schellbach, H. Grassmann. 2. stark veränd. Aufl. (Math.-Phys. Bibliothek hrsg. v. Lietzmann & Witting. 18.) — 42 pp. 8. 1920. Kart. 50 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Ahrens, W., Mathematische Spiele. 4e, verb. Aufl. Mit einem Titelbild u. 78 Fig. im Text. (Aus Natur u. Geisteswelt. 170.) 121 pp. 8. 1919. Kart. 70 öre + 120 % Teuerungszuschl.

Einleitung. — Wettspringen. — Boss Puzzle oder Fünfzehnerspiel. — Solitär oder Einsiedlerspiel. — Dyadische Spiele. — Zankeisen. — Nim. — Rösselsprung. — Magische Quadrate. — Math. Trugschlüsse. — Beantwort. d. Fragen.

Angersbach, Adam, Das Relativitätsprinzip leichtfasslich entwickelt. (Math.-Phys. Bibliothek hrsg. v. Lietzmann & Witting. 39.) — 57 pp. 8. 1920. Kart. 50 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Auerbach, Felix, Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Einführung in die Physik. 4e Aufl. Mit 71 Figuren im Text. (Aus Natur u. Geisteswelt. 40.) 146 pp. 8. 1917. Kart. 70 öre + 120 % Teuerungszuschl.

Einleitung. — 1. Raum. — 2. Zeit. — 3. Bewegung. — 4. Schwingungsbewegung. — 5. Wellenbewegung u. Strahlung. — 6. Kraft u. Masse. — 7. Eigenschaften d. Materie. — 8. Arbeit u. Energie. — 9. Entwertung d. Energie u. Entropie. — Register.

AUERBACH, FELIX, Die graphische Darstellung. Eine allgemeinverständliche, durch zahlreiche Beispiele aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis erläuterte Einführung in den Sinn u. den Gebrauch der Methode. 2e Aufl. Mit 139 Fig. im Text. (Aus Natur u. Geisteswelt. 437.) 118 pp. 8. 1918. Kart. 70 öre + 120 % Teuerungszuschl.

1. Einl. Wiss. Meth. Denken u. Anschauung. Wortsprache u. Math. Zahlen u. Formeln. Bilder. Graph. Darst. Statistik. Naturw. — 2. Raumgrössen... — 3. Anzahl v. Dingen, Absz. u. Ordinaten. Punkte in d. Ebene. Koordinatenpapier. Gesetzmässige Bezieh. Gebr. Linien. Graph. Interpol. Stetige Kurven. Graph. Extrapol. — 4. Darst. desselben Falles auf zwei oder mehr. versch. Arten. Abs. u. rel. ord. Logarithm. papier. Ansteigende Kurven. Darst. von Grössenordn. Abst. Kurven. Kurven mit Gipfeln. Symm. u. unsymm. Kurven. Prüfung d. Konstanz. — 5. Zeitl. Änder. chronogr. Aufl. Schwing. versch. Art. — 6. Kurven m. Hin- u. Rückweg. Geschl. Kurven. Kurven m. Unstetigh. — 7. Vergl. zweier oder mehrerer Kurven. Schlüsse daraus. Techn. zur Herst. d. Kurvenscharen. Symbol. Bilder. Beisp. aus Wiss. u. Praxis. Grössen, die von mehreren anderen abhängen. — 8. Isokurven, d. h. Kurven gleicher werte. Landkarten... — 9. Polare Darst. Rosetten. Schnitte durch Körper. — 10. Punktvert. in d. Ebene. Flächendarst. Gliederung in d. Fläche. Arbeitsdiagr. Kombin. Flächen. Flächensymb. Darst. im Raume. Faden-, Draht-, Karton- u. Gipsmodelle. — 11. Die Natur als graph. Darstellerin... — 12. Autom. Bewerkstellig. d. chronogr. Aufl. Mech. u. photogr. Verfahren. Schluss.

BEUTEL, EUGEN, Die Quadratur des Kreises. 2. Aufl. (Math.-Phys. Bibliothek hrsg. v. Lietzmann & Witting. 12.) — 56 pp. 8. 1920. Kart. 50 öre + 120 % Teuerungszuchlag.

BLOCH, WERNER, Einführung in die Relativitätstheorie. 2. verb. Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt. 618.) — 106 pp. 8. 1920. Kart. 70 öre. Geb. 90 öre. + 120 % Teuerungszuschag.

Einleit. Ueberleg. Die Bewegung u. d. Koordinatensyst. Bewegungszustand d. Äthers. Aberration u. Dopplerprinzip. Die Beid. Grundversuche. Relativitätstheorie. Ableitung d. Transformationsgleichungen. Physik. Bedeutung d. Transformationsgleichungen u. erste Folgerungen. Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Einige weitere wichtige Folgerungen aus d. Relativitätstheorie. Bedeut d. Relativitätstheorie für Physik u. Philosophie. Hist. Entwicklung d. Relativitätstheorie u. Ausblick auf allgem. Relativitätstheorie.

BOREL, EMILE, Die Elemente der Mathematik. Vom Verfasser genehmigte deutsche Ausgabe besorgt von PAUL STÄCKEL. Bd. 2: Geometrie mit einer Einführung in die ebene Trigonometrie. 2. Aufl. Mit 442 Fig. — XVI + 380 pp. 8. 1920. Geh. M. 105: 60 (Kr. 6: 85) + 120 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Gerade u. Kreis. Die Ebene u. d. runden Körper. Ähnliche Figuren. Trigonometr. Funktionen. Flächen- u. Rauminhalte. Anhänge: Ellipse. Hyperbel. Parabel. Kissoide. Konchoide d. Geraden. Feldmessung. Angenäherte Berechn. ebener Flächen. Einführung in d. Parallelperspektive. Aufgaben. Lösungen. Tafeln: Logarithmen d. Zahlen. Logarithmen d. trigonometr. Funktionen.

Brill, A., Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. 4 Aufl. (Abhandlungen u. Vorträge aus d. Gebiete d. Mathematik, Naturwiss. u. Technik. 3.) — IV + 44 pp. 8. 1920. Geh. 70 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Vorw. Die Forderung. Geometrie d. Bewegung. Dynamik d. materiellen Punktes. Einsteins Theorie d. Gravitation. Reg.

Cohn, Emil, Physikalisches über Raum und Zeit. 4. Aufl. (Abhandlungen u. Vorträge aus d. Gebiete d. Mathematik, Naturwiss. u. Technik. 2.) — 30 pp. 8. 1920. Geh. 40 öre + 120 % Teuerengszuschlag.

Crantz, Paul, Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. T. 1: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Gardes. 6. Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt 120.) — IV + 116 pp. 8. 1919. Kart. M. 18: 50 (Kr. 1: 20); geb. M. 23: 10 + 120 % Teuerungszuschlag.

Die vier Grundrechnungsarten u. d. Gleichungen ersten Grades. Potenzierung u. ihre Umkehrungen. Quadrat. Gleichungen. Logarithmierung.

Crantz, P., Sphärische Trigonometrie zum Selbstunterricht. (Aus Natur u. Geisteswelt. 605.) — 98 pp. 8. 1920. Kart. M. 18: 50 (Kr. 1: 20) geb. M. 23: 10 + 120 % Teuerungszuschlag.

Sphärische Zweiecke u. sphär. Dreiecke. Wichtigste Formeln f. Berechnung sphär. Dreiecke. Anwend. d. sphär. Trigonometrie in Erd- u. Himmelskunde. Benutzung d. Winkel zur Berechn. d. sphär. Dreiecks. Für logarithm. Rechnung geeignete Formeln. Bestimmung eines sphär. Dreiecks durch Konstruktion. Berechn. d. trigonometrischen Funktionen.

Crantz, Paul, Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht. 2. Aufl. Mit 55 Fig. im Text. (Aus Natur u. Geisteswelt 504.) — 97 pp. 8. 1919. Kart. 70 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Best. v. Punkten, Strecken u. Flächen durch rechtw. Koord. — Die Funkt. u. ihre Darst. — Die ger. Linie. — Kreis. — Parabel. — Ellipse. — Hyperbel. — Koordinatensyst. u. Koordinatenverwandl. — Parabel, Ellipse u. Hyperbel.

Dieck, Wilh., Stoffwahl und Lehrkunst im mathematischen Unterrichte der Unter- und Mittelstufe höherer Lehranstalten. — 262 pp. 8. 1918. Geh. 1: 80 Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

Vier Grundrechnungen m. ganzen Zahlen. Münzen, Masse u. Gewichte. Dezimalzahlen. Dreisatzaufg. Primzahlen u. zusammenges. Zahlen, Teilbarkeit d. Zahlen. Bruchrechnung. Dezimalbruchrechn. Zinsrechnung. Staatspapiere. Wechsel. Schek. Invaliden- u. Hinterbliebenenversicherung. Mischungsrechn. — Geometrische Anfangsunterricht. Zusammenh. zwischen d. Seiten u. Winkeln es. Dreiecks. Achsiale Symmetrie. Geom. Oerter. Konstruktionsaufg. I. Stufe. Lehre v. d. parallelen Linien. Parallelogram. Anw. d. Lehre v. d. Parallelogrammen. Verstand u. Gedächtnis im geom. Unterricht. Methoden im planimetr. Unterricht. System d. planimetr. Sätze. Lehre v. Kreise. Konstruktionsaufg. II. Stufe. Flächenmessung. Flächenvergleich. Streckenverhältn. u. Proportionen. Aehnlichkeitslehre. Folgerungen. Konstr. aufg. III. Stufe. Kreisberechn. Schriftl. Arbeiten im Klassenunterricht. Math. Hausarbeit. Kontrolle d. Unterrichtserfolges. — Erste Gleichungen. Bedeut. d. Gleich. f. d. Grundrechnungsarten in allgem. Zahlen. Multiplikation allgem. Zahlen. Substraktion allgem. Zahlen. Negat. Zahlen. Division allg. Zahlen. Funktionsbegrifl. u. graph. Darstellung. Lehre v. d. Proportionen. Lehre v. d. Potenzen. Wurzelrechn. Logarithmenrechn. Quadrat. Gleichungen. Geom. u. Arithmetik. Bedarf man zur Erlernung d. Schulmathematik einer bes. Beanlagung? — Definit. d. trig. Funktionen. Erste trig. Tafel. Kürzung d. Umfanges u. Erweiterung d. Geltungsbereiches unserer trig. Tafel. Wertbewegung u. graph. Darstellung d. trig. Funkt. Sinussatz. Kosinussatz. Pflege d. deut. Sprache im math. Unterricht. Sollen wir die fremden Fachwörter in d. Schulmathematik verdeutschen? Pflege d. Handschrift. Zeichnen im math. Unterricht. — Einführ. in d. Körperlehre. Perspektive. Quader. Gerades Prisma. Gerad. Zylinder. Satz v. Cavalieri. Schief. Prisma. Pyramide. Kegel. Kugel. Pflege d. räuml. Anschauungsvermögens. Grundlagen d. Geom.

Frischauf, Johannes, Beiträge zur Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids. (Ergängzungsband.) — 200 pp. 8. 1919. M. 135: —. Geh. (Kr. 8: 90) + 120 % Teuerungszuschlag.

Erweiterung d. Abschnitte 1—12. Anm. Erweiterung d. Anhanges: Zur Berechnung d. Reduktionen d. Urdreiecks u. Hilfdreiecks mittels mechanischer Quadratur. Geodätische Linie. Geodät. Linie u. Vertikalschnitt einer Fläche. Höhenreduktion. Zur Kartographie. Internationale Weltkarten-Konferenzen. Karten v. Mitteleuropa. Zur Netzkonstruktion f. Übersichtskarten. Neue Lösungen d. zwei Hauptaufgaben d. höh. Geodäsie. Zur Gauss'schen Abbildung d. Sphäroids auf d. Kugel.

Gans, Richard, Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. 4. Aufl. Mit 39 Fig. — 118 pp. 8. 1921. Geh. Kr. 2: 35; Geb. Kr. 2: 80 + 120 Teuerungszuschlag.

Elementare Operationen der Vektoranalysis. Differentialoperationen d. Vektoranalysis. Krummlinige Koordinaten. Vektorzerlegungen. Mechanische Deformationen. Tensoren. Anwend. aus d. Hydrodynamik u. d. Elektrodynamik.

Graetz, Leo, Das Licht und die Farben. (Einführung in die Optik.) Sechs Vorlesungen gehalten im Volkshochschulverein München. 4. Aufl. Mit 100 Abbild.

(Aus Natur u. Geisteswelt 17.) — V + 130 pp. 8. 1916. Kart 70 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Geradl. Ausbr., Zurückwerfung u. Brechung d. Lichtes. — Farbenzerstr., Farbenmischung. Spektra. — Interferenzen. Wellennat. d. Lichtes. Lichtäther. — Einwände gegen die Wellenth. Beugungserscheinungen. — Ultrarote, ultraviolette Strahlen. Fluoreszenz. Phosphoreszenz. Photogr. Farb. Photogr. — Transv. Wellen. Doppelbrechung. Drehung. — Register.

Grossmann, Marcel, Darstellende Geometrie. T. 2. 2. umgearb. Aufl. Mit. 144 Fig. (Teubners Technische Leifäden. Bd. 3.) — 153 pp. 8. 1921. M. 60: — kart. (Kr. 4: —) + 120 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Die Darstellungsmethode: Konjugierte Normalprojektionen. Axonometrie. Zentralprojektion. Geometrische Grundlagen d. Photogrammetrie. — Kurven u. Flächen: Allg. Eigensch. d. Kurven u. Flächen. Topographische Flächen. Kegel- u. Zylinderflächen. Kurven zweiten Grades. Durchdringung v. Kegel- u. Zylinderflächen. Rotationsflächen. Regelflächen. Flächen zweiten Grades.

Grünbaum, Heinrich, Funktionenlehre und Elemente der Differential- u. Integralrechnung. Lehrbuch u. Aufgabensammlung f. Technische Fachschulen, zur Vorbereitung f. d. mathematischen Vorlesungen d. Technischen Hochschulen sowie f. höh. Lehranstalten u. zum Selbstunterricht. Neu bearb. von Siegfried Jakobi. 5. erw. Aufl. Mit 93 Abb. (Teubners Unterrichtsbücher f. maschinentechnischen Lehranstalten. Bd. 10.) — 191 pp. 8. 1921. M. 73: 50 (kart.) (Kr. 4: 80) + 120 % Teuerungszuschlag.

Ganze Funktionen. Einige Differentialquotienten u. Integrale. Funktionswerte in Form v. Reihen. Zinseszins- u. Renten-Funktionen. Gebrochene u. irrat. Funktionen. Grenzbegriff. Differentialquotient d. allg. Potenz u. der zusammengesetzten Funktionen. Exponentialfunkt. u. Logarithmus. Trigonometrische u. zyklometrische Funktionen. Integralrechnung. Ergänzungen zu d. letzten Abschnitten. Wahrscheinlichkeitsrechnung u. ihre Anwend.

Hamel, G., Grundbegriffe der Mechanik. (Aus Natur u. Geistewelt. 684.) Mit 38 Fig. — 132 pp. 8. 1921. Kart. M. 18: 50 (Kr. 1: 20); geb. M. 23: 10. + 120 % Teuerungszuschlag.

Energieprinzip in d. Mechanik. Allgem. Mechanik. Spezielle Flächenkräfte. Anh. Quasigeometrische Form d. Mechanik.

Heffter, Lothar, Die Grundlagen der Geometrie als Unterbau für die analytische Geometrie. Mit 11 Fig. — 27 pp. 8. 1921. Geh. M. 15: 85; Kr. 1: 05 + 120 % Teuerungszuschlag.

Axiome d. Verknüpfung od. Inzidenz. Projizieren u. Schneiden. Dualität im Raum, im ebenen Feld u. Bündel. Satz v. Desargues. Viereckssatz. Harmon. Paarung. Axiome d. Anordnung. Trennung harmon. Paare. Äquivalenz v. Elementepaaren od. projektive Gleichheit v. Strecken (Winkeln) f. ein Fluchtelement. Harmonische Reihe od. projekt. Skala. Stetigkeitsaxiom. Satz v. Fluchtpunkt d. harmon. Reihe. Eineindeutige Zuordnung zw. der Punktreihe u. der Zahlenreihe. Doppelverhältnis es. beliebigen Wurfes. Axiom d. Parallelgeometrie. Axiom d. Orthogonalgeometrie.

HEIBERG, J. L., Naturwissenschaften-Mathematik und Medizin im klassischen Altertum. 2. Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt. 370.) — 104 pp. 8. 1920. Kart. 70 öre. Geb. 90 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Ionische Naturphilosophie. Die Pythagoreer. Entwicklung d. Heilkunde im V. Jahrhund. Hippokrates. Entwickl. d. Mathematik im V. Jahrhund. Platon. Die Akademie. Aristoteles. Der Peripatos. Alexandrinische Periode. Epigonenzeit. Die Römer. Griechische Fachliteratur d. Kaiserzeit. Byzanz.

KOWALEWSKI, GERHARD, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 2. verb. Aufl. 31 Fig. — IV + 416 pp. 8. 1919. Geh. 3 Kr.; Geb. 3:50 Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Einführung d. Irrationalzahlen. Grenzwerte. Rationale Rechnungsoperationen. Funktionen er. Veränderl. Geometrische Interpretation d. Zahlen u. Funktionen. Differentiation v. Funkt. er. Veränderl. Unendliche Reihen. Einige Anwend. d. Potenzreihen. Max. u. Minima. Differentiation v. Funktionen mehrerer Veränderl. Max. u. Minima. Umkehrung v. Funktionen u. Funktionensyst. Unbestimmte Integrale. Bestimmte Integrale. Integrat. unendlicher Reihen. Uneigentliche Integrale. Geometrische Anwend. d. best. Integrale. Doppelintegrale u. Kurvenintegrale. Geom. Anwendungen d. Doppelintegrale. — Einiges aus d. Determinantentheorie. Def. d. n-reihigen Determinante. Verhalten d. Determ. bei gew. Vertauschungen d. Elemente. Determ. als Funktion d. Elemente er. Zeile. Multiplikationssatz. Systeme lin. Gleichungen. Funktionaldeterminanten.

KRAUSE, MARTIN, Zum Gedächtnis an Martin Krause, 1851—1920, von G. HERGLOTZ. — 2 pp. 8. 1920. Abdruck aus d. Berichten d. Math.-Phys. Klasse d. Sächsischen Akademie d. Wiss. zu Leipzig, Bd. 72.

LIETZMANN, W., Riesen und Zwerge im Zahlenreich. Plaudereien für kleine und grosse Freunde der Rechenkunst. 2. durchges. u. verm. Aufl. (Math.-Phys. Bibliothek, hrsg. v. Lietzmann & Witting. 25.) — 58 pp. 8. 1918. Kart. 50 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

LIETZMANN, W., Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie. Ausg. A: für Gymnasien, Unterstufe. Mit. 320 Fig. im Text. (Math. Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen.) VII + 212 pp. 8. 1917. Geb. 1:95 Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

Aufgabensaml.: 1. Vorstufe d. Geom. — 2. Ger. u. Winkel. — 3. Dreieck. — 4. Viereck. — 5. Kreis. — 6. Flächenlehre. — 7. Ähnlichkeitslehre. — Leitfaden.

LIETZMANN, W., Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie. Ausg. A: für Gymnasien, Oberstufe. Mit 106 Abbild. im Text. (Math. Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen.) 150 + 66 pp. 8. 1919. Geb. 1:95 Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

Planimetr. — Trig. Funkt. u. ebene Trigonom. — Einf. in d. Darst. u. Berechn. von Körpern. — Ausgew. Kapitel aus d. Stereom. — Anal. Geom. — Leitfaden.

Lietzmann, W., Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie. Ausgabe B: für Realanstalten, Unterstufe. 2:e Aufl. Mit 359 Fig. im Text. (Mathematische Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen.) VII + 241 + 64 pp. 8. 1921. Geb. 2: 50 Kr. + 120 % Teuerungszuschl.

Aufgabensamml.: 1. Vorstufe d. Geom. — 2. Ger. u. Winkel. — 3. Dreieck. — 4. Viereck. — 5. Kreis. — 6. Flächenlehre. — 7. Ähnlichkeitslehre. — 8. Einf. in d. ebene Trigon. — 9. Einf. in d. Stereom. — Leitfaden.

Lietzmann, W., Leitfaden der Mathematik. Ausg. A: für Gymnasien, Unterstufe. Mit 98 Fig. im Text. (Math. Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen.) 97 pp. 8. 1917. Geb. 90 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Geom. Leitf.: Ger. u. Winkel. — Dreieck. — Viereck. — Kreis. — Flächenlehre. — Ähnlichkeitslehre. — Vielecke u. Kreis.

Arithm. Leitf.: Die vier Grundrechenarten mit natürl. Zahlen, relativen Zahlen, Brüchen. — Proportionen. — Gleich. 1:en Grades. — Die lineare Funktion. — Potenzen mit positiven, neg., ganzen Expon. — Wurzeln. — Gleich. u. ganze Funkt. 2:en Grades. — Logarithm.

Lietzmann, W., Leitfaden der Mathematik. Ausg. B: für Realschulen, Unterstufe. 2[e], durchges. u. verm. Aufl. Mit 120 fig. im Text. (Math. Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen.) 285 pp. 8. 1921. 1: 20 Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

Geom. Leitf.: Ger. u. Winkel. — Dreieck. — Viereck. — Kreis. — Geom. Örter. — Flächenlehre. — Ähnlichkeitslehre. — Vielecke u. Kreis. — Einf. in d. Trigonom. — Einf. in d. Stereom.

Arithm. Leitf.: Die 4 Grundrechenarten mit natürl. Zahlen. — Die 4 Grundrechenarten. m. relat. Zahlen. — Die 4 Grundrechenarten m. Brüchen. — Proportionen. — Gleichungen 1:sten Grades. — Die lin. Funkt. — Potenzen m. pos. ganzen Exp. — Pot. m. neg. ganzen Exp. — Wurzeln. — Gleichungen u. ganze Funkt. 2:en Grades. — Logar. — Arithm. u. geom. Reihen.

Lietzmann, W., & Zühlke, P., Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie. Ausg. B: für Realanstalten, Oberstufe. Unter Mitwirkung von P. B. Fischer. Mit 144 Fig. im Text. (Math. Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen.) VIII + 169 + 108 pp. 8. 1919. Geb. 2: 30 Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

Aufgabensamml.: Planimetr. — Ebene Trigonom. — Stereom. — Darst. Geom. — Sphär. Trigonom. — Synth. Geom. d. Kegelschn. — Anal. Geom. Leitfaden.

Lietzmann, W., & Zühlke, P., Leitfaden der Mathematik. Ausg. A: für Gymnasien, Oberstufe. Mit 79 Figuren im Text. (Math. Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen.) 66 + 78 pp. 8. 1919. 1: 30 Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

Geom.: Planimetr. — Trigon. Funkt. u. ebene Trigonom. — Berechn. einf. Körper. — System. Stereom. — Sphär. Trigonom. — Anal. Geom. d. Ger. u. d. Kreises. — Anal. Geom. d. Kegelschn.

Arithm., Alg. u. Analysis: Arithm. Reihen. — Geom. Reihen. Zinseszins u. Rentenrechn. — Kompl. Zahlen. — Quadr. Gleich. mit 2 Unbek. — Kombinatorik u. Warscheinlichkeitsr. — Versicherungsrechn. — Die rat. ganzen Funkt. — Gleich. 3:en u. n:ten Grades. — Die rat. gebroch. Funkt. — Algebr. u. transzend. Funkt. — Integralrechnung.

Lietzmann, W., & Zühlke, P., Leitfaden der Mathematik. Ausg. B: für Realanstalten, Oberstufe. Mit 135 Fig. im Text. (Math. Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen.) 108 + 104 pp. 8. 1919. 1: 95 Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

Leitfaden d. Geom.: Planimetr. — Ebene Trigon. — Systematische Stereom. — Darst. Geom. — Sphär. Trig. — Synth. Geom. d. Kegelschn. — An. Geom. d. Ger. u. d. Kreises. — An. Geom. d. Kegelschn.

Leitf. d. Arithm.: Arithm. Reihen. — Geom. Reihen. Zinseszins- u. Rentenrechn. — Kompl. Zahlen. — Quadr. Gleich. m. 2 Unbek. — Kombinatorik u. Warsch.-rechn. — Versicherungsrechn. — Rat. ganzen Funkt. — Gleich. 3:ten, 4:ten u. n-ten Grades. — Rat. gebr. Funkt. — Alg. Funkt. — Transzend. Funkt. — Unendl. Reihen. Entw. v. Funkt. in Potenzreihen. — Integralrechn.

Lindow, Martin, Differentialrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. 3e Aufl. Mit 45 Fig. im Text u. 161 Aufgaben. (Aus Natur u. Geisteswelt. 387.) VI + 100 pp. 8. 1919. Kart. 70 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Der Funktionsbegr. u. seine techn. Bedeutung. — Graph. Darst. d. Funkt. — Differenzenquot. u. Differentialq. Diff. einfacher Funkt. — Allg. Diff.-regeln. Diff. schwieriger Funkt. — Anw. d. Differentialrechn. auf Unters. techn. wichtiger Kurven. — Reihen. — Anw. d. Mac.-Laurinschen u. Taylorschen Reihe. — Prüfungsmeth. — Lösungen. — Anhang. — Wichtigsten Differentialquot.

Lindow, Martin, Integralrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. 2e Aufl. Mit 43 Fig. im Text u. 200 Aufg. (Aus Natur u. Geisteswelt. 673.) 102 pp. 8. 1919. Kart. 70 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Unbest. Int. — Best. Int. — Anw. d. Integralrechn. auf Linien, Flächen u. Körper. — Integrationsbeisp. aus d. Statik. — Anw. auf versch. Gebiete. — Allg. Int. Meth. — Näherungsmeth. — Prüfungsmeth. — Lösungen.

Löffler, Eugen, Ziffern und Ziffernsysteme. (Math.-Phys. Bibliothek, hrsg. v. Lietzmann & Witting. Bd 1, 34.) T. 1: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. 2., neu bearb. Aufl. 54 pp. 8. 1918. Kart. 50 öre. — T. 2: Die Zahlzeichen im Mittelalter und in der Neuzeit. 2. verb. Aufl. 60 pp. 8. 1919. Kart. 50 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Lörcher, O., & Löffler, E., Methodischer Leitfaden der Geometrie nebst einer Vorschule der Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Mit 178 in den Text gedr. Fig. u. 3 Zahlentafeln. 3e Aufl. XI + 205 pp. 8. 1917. 1 Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

Lagebezieh. zwischen Punkt. u. Ger. — Axiale Symmetr. — Dreieck, Vieleck. — Abschluss d. Parallelenlehre. — Kreislehre. — Flächenvergleichung geradl. umgrenzter Fig. — Messung von Flächen u. Körpern. — Verhältnisgleichheit von Strecken. — Ähnlichkeit u. Perspektive. — Verhältnisgleichungen im rechtw. Dreieck u. am Kreis. — Massbezieh. zw. Seiten u. Winkeln im rechtw. u. gleichschenkl. Dreieck. (Vorsch. d. Trigon.). — Konstr. u. Massbez. am regelm. Vieleck u. a. Kreise. — Anw. d. rechner. Meth. auf Konstr. d. Geom. — Anh. 1: Behandl. v. Lehrzätz. u. Konstruktionsaufg. — Anh. 2: Ausgew. Abschn. aus d. Gesch. d. Geom. A. Entw. d. geom. Begr. u. Sätze. B. Überbl. über d. Entw. d. Geom. C. Lebensumst. berühmter Mathematiker.

Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H., Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen, mit Anm. von A. Sommerfeld und Vorwort von O. Blumenthal. 3. verb. Aufl. (Fortschritte d. Mathemat. Wiss. in Monographien, hrsg. v. O. Blumenthal. H. 2.) — 146 pp. 8. 1920. Geh. 2: 50 Kr.; Geb. 3: — Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

H. A. Lorentz, Der Interferenzversuch Michelsons. — Elektromagnetische Erscheinungen in einem System, das sich mit beliebiger, die des Lichtes nicht erreichender Geschwindigkeit bewegt. — A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. — Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? — H. Minkowski, Raum und Zeit. — A. Sommerfeld, Anmerkungen zu Minkowski, Raum u. Zeit. — A. Einstein, Über den Einfluss d. Schwerkraft auf die Ausbreitung d. Lichtes. — Die Grundlage d. allgem. Relativitätstheorie. — Hamiltonsches Prinzip u. allgem. Relativitätstheorie. — Kosmologische Betrachtungen zur allgem. Relativitätstheorie. — Spielen Gravitationsfelder im Aufbau d. materiellen Elementarteilchen eine wesentl. Rolle?

Maennchen, Ph., Die Wechselwirkung zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei C. F. Gauss. (Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. Gesammelt v. F. Klein, M. Brendel & L. Schlesinger. H. 6.) — 46 pp. 8. 1918. 75 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Stufe d. Empirie. Das Gauss'sche Divisionsverfahren. Übung d. Divisionsverfahrens an Kettenbrüchen. Rechnungen m. Logarithmen. Berechn. v. reziproken Werten. Gauss' Methoden, die Faktoren grosser Zahlen zu finden. Tafel d. quadratischen Charakters d. Primzahlen. Cyklotechnie. Wie Gauss die Zahlen individualisierte. Schlussbetracht.

Poincaré, Henri, Die neue Mechanik. 4. Aufl. Völlig unveränd. anastat. Nachdruck der 3. Aufl. (Abhandlungen u. Vorträge aus d. Gebiete d. Mathematik, Naturwiss. u. Technik. H. 1.) — 24 pp. 8. 1920. Geh. 40 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

ROHN, KARL, Nekrolog gesprochen am 13. November 1920 in d. öffentlichen Sitzung beider Klassen, von O. HÖLDER. Abdruck aus d. Berichten d. Math.-Phys. Klasse d. Sächs. Akademie d. Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 72. — 19 pp. 8. 1920. 75 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

ROHRBERG, ALBERT, Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers. 2. verb. u. erweit. Aufl. (Math.-Phys. Bibliothek, hrsg. v. Lietzmann & Witting. 23.) — IV + 51 pp. 8. 1919. Kart. 50 öre + 120 % Teuerungzuschlag.

ROTHE, RUDOLF, Darstellende Geometrie des Geländes und verwandte Anwendungen der Methode der kotierten Projektionen. 2. verb. Aufl. (Mathematisch-Physik. Bibliotek, hrsg. v. Lietzmann & Witting. 35/36.) — VI + 92 pp. 8. 1919. Kart. 1 Kr. + 120 % Teuerungszuschlag.

RUNGE, C., Graphische Methoden. 2. Aufl. Mit 94 Fig. (Sammlung Math.-Physikalischer Lehrbücher, hrsg. von E. Jahnke, 18.) — 130 pp. 8. 1919. Kart. Kr. 1:40 + 120 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Graphisches Rechnen. Graphische Darstellung d. Funktionen einer od. mehrerer unabhängiger Veränderlichen. Graphische Methoden d. Differential- u. Integralrechnung.

SCHAU, A., Festigkeitslehre. 2. Aufl. (Aus Nat. u. Geisteswelt. 829.) — 111 pp. 8. 1921. M. 20:40 kart; 26:40 geb. (Kr. 1:35 — 1:70) + 120 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Zug- u. Druckfestigkeit. Schub- u. Scherfestigkeit. Biegungsfestigk. Torsions- od. Verdrehungsfestigk. Knickfestigk. Zusammengesetzte Festigkeit. Exzentrischer Druck. Biegung u. Knickung.

SCHAU, A., Statik. 2. Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt. 828.) — 110 pp. 8. 1921. M. 20:40 kart.; 26:40 geb. (Kr. 1:35—1:70) + 120 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Zusammensetzung, Zerlegung u. Gleichgewicht v. Kräften. Anwendung d. statischen Gesetze auf die Baukonstruktionen.

SCHLESINGER, LUDWIG, Raum, Zeit und Relativitätstheorie. Gemeinverständliche Vorträge. (Abhandlungen u. Vorträge aus d. Gebiete d. Mathematik, Naturwiss. u. Technik. H. 5.) — 40 pp. 8. 1920. Geh. 70 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Graphische Fahrpläne. Galileisches Relativitätsprinzip. Michelsonscher Versuch. Lorentzsche Verkürzung u. Lorentztransformation. Konstanz d. Lichtgeschwindigkeit. Neues Gesetz f. die Zusammensetz. d. Geschwindigkeiten. Fizeauscher Versuch. Lorentz-Einsteinsches Relativitätsprinzip. Dreidimensionaler Raum. Auffassung v. Einstein u. Minkowski. Mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten. Gauss'sche Lehre v. d. Flächen. Verbiegung. Krümmung. Linienelement. Riemanns Verallgemeinerung. Unzu-

länglichkeit d. Lorentz-Einsteinschen Relativitätsprinzips. Schwerefeld. Äquivalenzprinzip u. allgem. Relativitätsprinz. Allgem. Raum-Zeitmannigfaltigkeit. Ihre Bestimm. durch Gravitationspotentiale. Bestät. durch Erfahrung. Schlussbemerk.

Schuster, M., Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie nach konstruktiv-analytischer Methode. Herausgegeben von W. Lietzmann.

Ausg. A: für Vollanstalten. 2:er Teil: Trigonometrie. 2:e, verm. u. verb. Aufl. mit einer lithogr. Tafel. VIII + 118 pp. 8. 1911. 75 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Rechtwinkl. Dreieck. — Anw. des rechtw. Dreiecks. — Allg. Dreieck. — Anw. des allg. Dreiecks. — Goniometr. — Anw. d. Goniom.; schwierigere Aufg. — Dreiseitige Ecke u. Kugeldreieck. — Anw. d. rechtw. Kugeldreiecks in Erd- u. Himmelsk. — Anw. d. allg. Kugeldreiecks in Erd- u. Himmelsk. — Überblick über die Gesch. d. Trigonom. — Tafeln. — Masszahlen.

Ausg. A: für Vollanstalten. 3:er Teil: Stereometrie. 3:e Aufl. Mit zwei Figurentafeln. VI + 100 pp. 8. 1918. 65 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

1. Unterstufe: Würfel, Prisma, Zylinder. — Pyramide u. Kegel. — Kugel. — 2. Oberstufe: Allg. Sätze über räuml. Grössen. — Wiederholungs- u. Ergänz. Aufgaben. Einf. trigonom. Bezieh. — Weiteres über die Kugel. — Allgemeinere Körperformen. — Regelm. Körper. — Anw. d. Algebra auf die Stereom. — Tafeln.

Ausg. B: Planimetrie für Progymnasien und Realschulen 4:e Aufl. Mit 2 Tafeln. VIII + 118 pp. 8. 1918. 55 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Raumgrössen. — Winkel. — Dreieck. — Gleichschenkl. Dreieck. — Viereck. — Örter u. Kongruenzsätze. — Kreis. — Kreisvielecke. — Flächengleichheit. — Inhaltsberechnung. — Streckenverhältnisse. — Verhältnisse am Dreieck u. am Kreise. — Ähnlichkeit. — Regelm. Fig., Kreisberechn. — Anw. d. Alg. auf d. Geom. — Konstruktionsaufg. mit algebr. Analysis.

Severi, Francesco, Vorlesungen über algebraische Geometrie. Geometrie auf einer Kurve, Riemannsche Flächen, Abelsche Integrale. Berechtigte deutsche Übersetzung von Eugen Löffler. Mit einem Einführungswort von A. Brill. Mit 20 Fig. — XV + 408 pp. 8. 1921. Geh. M. 231 (Kr. 15); geb. Kr. 16: 30 + 120 % Teuerungszuschlag.

Einleit. Lineare Systeme ebener Kurven. Sätze v. Lüroth u. v. Bertini. Rationale u. Cremonasche Transformationen zwischen Ebenen. Auflös. d. Singularitäten er. ebenen algebraischen Kurve. Die linearen Scharen auf er. algebraischen Kurve. Geschlecht er. Kurve. Der Noether'sche Fundamentalsatz u. seine Anwend. in d. Theorie der linearen Scharen. Korrespondenzen zwischen d. Punkten einer od. zweier algebraischer Kurven. Moduln er. Kurve von Geschlecht p. Die algebraischen Funktionen als analyt. Funktionen. Riemann'sche Flächen. Abel'sche Integrale. Abel'sches Theorem u. seine Folgerungen. Reduzible Abel'sche Integrale. Anhang: Üb. Zerlegbarkeit d. algebra-

ischen Bedingungen u. üb. Dimension er. Bedingung. Üb. Verhalten der ersten Polaren in. d. mehrfachen Punkten er. gegebenen ebenen Kurve. Weiteres üb. Verhalten d. erst. Polaren u. üb. die Formel, die das Geschlecht mittels der Ordnung der Kurve u. ihre Singularitäten ausdrückt. Üb. Bedingungen, unter denen eine Kurve in er. vorgeschrieb. Gruppe von Punkten gegebene Singularitäten besitzt. Normalform der eben. hyperelliptischen Kurven. Mannigfaltigkeit der eben. Kurven von gegebenen Geschlecht, Berechnung der Anzahl der Moduln, Riemann'sches Existenztheorem. Klassifikation der Raumkurven u. Überraumkurven, Berechnung der Mannigfaltigkeitsstufe der zu er. gegebenen Kurve gehörigen linearen Scharen, Normalkurven des Geschlechts p. Algebraische Kurven vom Geschlecht $p > 1$ mit birationalen Transformationen in sich. Transzendente Moduln er. Kurve vom Geschlecht p. Namenverzeichnis. Sachverzeichnis.

Wieleitner, H., Die sieben Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. 2., durchges. Aufl. (Math.-Phys. Bibliothek hrsg. v. Lietzmann & Witting. 7.) — 55 pp. 8. 1920. Kart. 50 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Witting, Alexander, Einführung in die Infinitesimalrechnung. 1: Die Differentialrechnung. 2 Aufl. (Math.-Phys. Bibliothek, hrsg. v. Lietzmann & Witting. 9.) — 52 pp. 8. 1920. Kart. 50 öre + 120 % Teuerungszuschlag.

Vereinigung Wissenschaftlicher Verleger.

Berlin, W. 10.

Bachmann, Paul, Grundlehren der neueren Zahlentheorie. 2., verb. Aufl. Mit einem Gedächtnisworte hrsg. von Robert Haussner. (Göschens Lehrbücherei, Gruppe 1: Bd. 3.) — XVI + 252 pp. 8. 1921. Geh. Kr. 12: 50.

Der rationale Zahlenkörper: Von d. Teilbarkeit d. ganzen Zahlen. Von d. Kongruenz d. Zahlen. Von d. quadratischen Resten. Die Linearform $f = ax + by$. Die quadrat. Formen. — Der quadratische Zahlenkörper: Zahlen, Moduln, Ideale des Körpers. Einheiten d. quadratischen Körpers. Teilbarkeit im quadrat. Körper. Ideale u. Gitterzahlen.

Baumgartner, Ludwig, Gruppentheorie. (Samml. Göschen 837.) — 120 pp. 8. 1921. Geb. Kr. 1: 25.

Einführung in d. Gruppenbegriff. Der Gruppenbegriff in d. Geometrie. Die endlichen Gruppen. Die unendlichen Gruppen.

Ensslin, Max, Elastizitätslehre für Ingenieure. I: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, Ebene, Platten, Torsion, Gekrümmte Träger. Mit 65 Abb. 2:e, verb. Aufl. (Smlg. Göschen 519.) — 147 pp. 8. 1921. Kr. 1: 25.

Fischer, Paul B., Determinanten. 2., verb. Aufl. (Smlg. Göschen 402.) — 136 pp. 8. 1921. Kr. 1: 25.

Wie gelangte man z. Begriff d. Determinanten? Histor. Betrachtungen. Exkurs in d. Gebiet d. Kombinatorik. Bezeichnungsweise durch doppelte Indizes. — Definition d. Determinanten. Hauptsätze d. Determ. mit einig. Folgerungen. Unterdeterminanten im enger. Sinne. Unterdeterminanten im weiter. Sinne. Multiplikationstheorem. — Lineare Gleichungen. Lin. Substitutionen. Geometrische Anwend. — Berechnung einiger spez. Determinanten. Vandermondesche Determin. Reziproke Determin. Symmetrische, schiefsymmetr. u. pseudosymmetr. Determinanten. Funktionaldetermin.

Haas, Arthur, Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. 2. Bd. Erste u. zweite Aufl. Mit 30 Abbild. — VI + 286 pp. 8. 1921. Geh. Kr. 11: 30.

Theorie d. Spektren: Lichtquanten. Anwend. d. Quantenprinzips auf period. Bewegungen. Bohrsche Modell d. Wasserstoffsatoms. Spektralformel von Bohr. Linienspektren d. Wasserstoffs u. d. Heliums. Spektroskopische Bestimmung d. physikal. Fundamentalkonstanten. Mitbewegung d. Atomkerns. Feinstruktur d. Spektrallinien. Erweiterung d. Bohrschen Atommodells. Zentrale Serien (Röntgenspektren). Periphere Serien (optische Spektren). Rotations- u. Bandenspektrum. Kernmodell als Umkehrung d. Atommodells. — Theorie d. Grundstoffe: Natürliche Reihe d. Grundstoffe. Valenz. Chemische Periodizität. Affinität u. Molekelbildung. Isotopie. Verschiebungsgesetz d. Grundstoffverwandlungen. Zerlegung u. Struktur d. Grundstoffkerne. — Statistik: Statistische Wahrscheinlichkeit. Verteilungsmodul. Kanonische Verteil. d. Energie. Gleichgewicht u. Ausgleich. Homogenes System. Kreisprozess. Gleickverteilungssatz. Prinzip v. Rayleigh u. Jeans. Statistisches Gleichgewicht es. schwing. Systems. Thermodynamik: Temperaturskala. Kalorimetrie. Beide Hauptsätze d. Thermodynamik. Irreversibilität. Freie Energie u. das thermodynam. Potential. Zustandsänderungen es. homogen. Systems. Versuch v. Thomson u. Joule. Koexistenz d. Phasen. Vollkommene Gase. Zustandsgleichung v. van der Waals. Spezifische Wärme fester Körper. Wärmesatz v. Nernst. Hohlraumstrahlung. Strahlungsgesetz v. Planck. — Relativitätstheorie: Versuch v. Michelson. Relativitätsprinzip v. Einstein. Lorenz-Transformation. Relativität d. Zeit- u. Längenmasses. Zusammnnsetzung d. Geschwindigkeiten. Versuch v. Fizeau. Dopplersches Princip u. Aberration d. Lichtes. Weltlinie u. Eigenzeit. Relativistische Dynamik. Träge Masse d. Energie. Materietensor. Viererstrom u. elektromagnetischer Feldtensor. — Theorie d. Gravitation: Gravitationsgesetz als Verallgemeinerung d. Beharrungsgesetzes. Metrischer Fundamentaltensor. Geodätische Linie. Riemannscher Tensor. Einsteinsches u. Newtonsches Gravitationsgesetz. Räumliche u. zeitliche Metrik im Gravitationsfelde. Empirische Bestätig. d. Einsteinschen Gravitationstheorie. Grösse u. Masse d. Universums. — Anhang.

Haas, Arthur, Das Naturbild der neuen Physik. Mit 6 Fig. — 115 pp. 8. 1920. Kr. 1: 15.

Elektromagnetische Theorie d. Lichtes. Molekularstatistik. Elektronentheorie. Relativitätstheorie. Quantentheorie. Anm. Chronolog. Übersicht.

Hayashi, Keiichi, Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. — 182 pp. 8. 1921.

JUNKER, FR., Höhere Analysis. T. 1: Differentialrechnung. Mit 167 Übungsbeispielen u. 67 Fig. 3., verb. Aufl. (Smlg. Göschen 87.) — 204 pp. 8. 1921. Kr. 1:25.

Vorbereitung z. Differentialrechnung. — Differenzen, Differentiale u. Ableitungen erst. Ordnung. Ableitungen u. Differentiale höher. Ordn. Anwend. d. Differentialrechnung zur Ermittlung d. Grenzwerte unbestimmter Formen. Konvergenz u. Divergenz der Reihen. Reihenentwicklung d. Funktionen. Maxima u. Minima der Funktionen. Anwend. d. Differentialrechnung auf d. ebene Geometrie. Anwend. d. Differentialrechn. auf d. Geometrie des Raumes. Anwend. d. Differentialrechn. auf d. Mechanik.

KOMMERELL, V., & KOMMERELL, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Bd. 1. 3. Aufl. (Smlg. Schubert 29.) — VIII + 184 pp. 8. 1921. Geb. Kr. 8:75.

Raumkurven: Gleichungen. d. Raumkurve. Schraubenlinie d. Kreiszylinders. Bogenelement, Tangente u. Normalebene er. Raumkurve. Schmiegungsebene, Krümmungskreis, sphär. Abbildung d. Raumkurve. Das die Raumkurve begleit. Dreikant. Krümmungsmittelpunkt. Torsion od. zweite Krümmung. Formeln v. Frenet. Schmiegungskugel. Anwend. auf d. Schraubenlinie d. Kreiszylinders. Natürl. Gleichungen er. Raumkurve. Herleitung er. Kurve aus gegeb. Eigenschaften. Raumkurven u. abwickelbare Flächen. Abwickelb. Flächen, erzeugt durch d. Ebenen d. begleit. Dreikants. Evoluten u. Evolventen. Minimalgeraden, Minimalkurven. Übungsaufgaben. — Untersuchung er. Fläche in d. ersten Form $F(x, y, z) = 0$.

KOMMERELL, V., & KOMMERELL, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Bd. 2. — 3. Aufl. Mit 13 Fig. (Smlg. Schubert 44.) — 196 pp. 8. 1921. Geb. Kr. 8:75.

Fundamentalgrössen erster Ordnung. Linienelement. Oberflächenelement. Tangentialebene. Flächennormale. Fundamentalgrössen. 2. Ordn. Weitere Relationen. Konjug. Richtungen. Asymptotenlinien, Krümmungslinien. Hauptkrümmungsradien. Sphärische Abbild. Ebenenkoordinaten. Zentraflächen. Parallelflächen. Transformation d. Parameter. Anwend. auf Rotations- u. Schraubenflächen. Minimallinien. Isometrische Lin. Isometrische Parameter. Abbild. zweier Flächen. Konforme Abbild. Beispiele f. konf. Abbild. Flächentreue Abbild. Deformation d. Flächen. Beispiele f. d. Deformation. Geodätische Linien, geodät. Koordinaten. Liouville'sche Flächen. Differentialgleichung d. geodät. Linien in d. Gauss'schen Form. Totalkrümmung es. geodät. Dreiecks. Mainardische (Codazzische) Gleichungen. Bonnetscher Satz. Herleit. v. Flächen m. gegebenen Eigenschaften. Allg. Flächenkurve. Differentialparameter. Anwend. d. Differentialparameter auf Kurven u. Kurvensysteme, auf d. Deformation d. Flächen. Übungsaufgaben.

PERRON, OSKAR, Irrationalzahlen. (Göschens Lehrbücherei. Gruppe I, Bd. 1.) — VIII + 186 pp. 8. 1921. Geh. Kr. 12:50.

Rationale Zahlen. Definition d. Schnittes. Die drei Arten v. Schnitten. Grössenordn. v. Schnitten. Summe zweier Schnitte. Differenz zweier Schnitte. Produkt zweier

Schnitte. Quotient zweier Schnitte. Der Archimedische Satz. Die irrationalen Zahlen. Absoluter Betrag. Die Zahlenlinie. Streckenmessung. — Untere u. obere Grenze einer Zahlenmenge. Häufungszahl u. Häufungspunkt. Oberer u. unterer Limes er. Folge. Grenzwert er. Folge. Konvergente Folgen. Unendliche Reihen u. Produkte. Historisches z. erst. u. zweiten Kap. — Die Potenz mit ganzzahligem Exponenten, mit rationalem Exponenten, mit irration. Exponenten. Lehrsätze üb. Potenzen. Logarithmen. Logarithmentafeln. Natürl. Log. Grenzwerte f. e^x u. log y. Exponentialreihe. — Systematische Brüche. Periodizität. Kettenbrüche. Vorbemerk. Entwickl. er. Zahl in einen regelmäss. Kettenbruch. Period. regelmässige Kettenbrüche. Regelmässiger Kettenbruch f. d. Zahl e. Cantorsche Reihen. Reihen v. Lüroth u. Engel. Cantorsche Produkte. — Approximation irrationaler Zahlen durch rationale. Algebraische u. transzendente Zahlen.

RUNGE, C., Praxis der Gleichungen. (Göschens Lehrbücherei, Gruppe I, Bd. 2.) — 172 pp. 8. 1921. Geh. Kr. 7: 50.

Lineare Gleichungen. Nichtlineare Gleichungen mit er. Unbekannten: Lösung nach tabellarische Berechn. nach der Newtonschen Methode. Iterationsverfahren. Anwend. auf die Umkehrung er. Reihe. — Nichlineare Gleichungen m. mehrer. Unbekannten: Newtonsche Methode in d. Falle mehrer. Unbekannten. Auffindung d. ersten Näherungswerte. Einführ. neuer Veränderlicher. Iterationsverfahren. Anwend. auf lineare Gleich. — Berechn. er. ganzen rationalen Funktion aus d. Koeffizienten. Berechn. aus er. Anzahl gegebener Werte. Auffindung d. Anzahl der reellen Wurzeln. Berechn. d. reellen Wurzeln. Graphisches Rechnen. Anwend. d. Additionslogarithmen. Trinomische Gleich. Graeffes Verfahren zur Berechn. d. Wurzeln. Sturmscher Satz.

SCHMID, THEODOR, Darstellende Geometrie. Bd. 2. (Smlg. Schubert 66.) — 315 pp. 8. 1921. Geb. Kr. 8: 25.

Schiefe Projektion. Stirnlage d. Achsensystemes (Kavalierperspektive). Geänderte Lage d. Achsensystemes. — Zentralprojektion. Charakteristische Zweispurensystem (Freie Perspektive). Beziehung auf ein Achsensyst.; Zweibildersyst. (Angew. Perspektive). — Drehflächen zweit. Grades. Dreh- u. Rohrflächen, insbes. Ringfläche. Schnittaufgaben. Berührungsaufg. — Schraubenflächen u. windschiefe Regelflächen. Flachgängige Schraubenfläche od. Wendelfläche. Scharfgängige Schraubenfläche. Regel- u. Kreis-Schraubenflächen. Algebraische windschiefe Regelflächen. — Geländedarstellung u. Kartenprojektion.

WANGERIN, A., Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Bd. 2. (Smlg. Schubert 59.) — VIII + 286 pp. 8. 1921. Geb. Kr. 15.

Wichtigsten Eigenschaften d. Kugelfunktionen. Transformation d. Laplaceschen Differentialausdrucks auf belieb. orthogon. Koordinaten. Einfache Kugelfunkt. erster Art. Differentialgleich. d. Kugelfunktionen u. d. Kugelfunktion zweiter Art. Zugeordnete Kugelfunkt. Kugelfunkt. m. zwei Veränderlichen. Entwicklung nach Kugelfunkt. — Potential er. Kugelfläche bei belieb. Massenverteilung. Potential er. räumlichen, v. konzentrischen Kugeln begrenzten Masse. Satz v. d. äquivalenten Massentransposition.

Ableit. d. Lösung d. Randwertaufgabe aus d. Laplaceschen Gleich. Anwend. auf d. Greensche Funktion d. Kugel. Zweite Randwertaufg. f. d. Kugel. Elektrizitätsverteilung auf er. leitend. Kugel od. Kugelschale. Anwend. d. Methode d. Transformation durch reziproke Radien in d. Potentialtheorie. — Verlängertes Rotationsellipsoid. Abgeplattetes Rotationsellipsoid. Exzentrische Kugeln. — Einige allgem. Sätze üb. d. Potential v. Massen. Lösung d. Randwertaufgaben mittels d. Greenschen Funktion. Dirichletsche Prinzip nebst Folgerungen. C. Neumannsche Methode d. arithmetischen Mittels. Zurückführung d. ersten Randwertaufgabe auf eine Integralgleichung.

Librairie Vuibert.

Paris.

Aubert, P., & Papelier, G., Exercices de calcul numérique. T. 1. A l'usage des élèves de mathématiques ... — 186 pp. 8. 1920. Fr. 12: —.

Calculs arithmétiques: Opérations abrégées. Approximations numériques. Méthode de Guyou. — Calculs logarithmiques: Expressions algébr. et exponentielles. Expressions et équations trigonométr. Resolution d. triangles. Exercices divers.

Noguès, R., Cours de Mathématiques spéciales sous forme de problèmes. (Algèbre et analyse. Trigonométrie. Géométrie analytique. Mécanique. Géométrie descriptive.) — 394 pp. 8. 1919. Fr. 15, plus 25 % majoration.

Division d. polynomes ordonnés. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. Formule de Bezout. Analyse combinatoire. Formule de binome. Déterminants. Equations de prem. degré. Exposants fractionnaires. Nombres complexes. Séries. Dérivées et différentielles. Variation d. fonctions. Développements en séries entières. Séries entières. Infiniment petits. Limites. Formes illusoires. Fonctions hyperboliques. Fonctions d'une variable imaginaire. Décomposition d. fractions rationnelles. Equations algébr. Théorèmes de Descartes, de Rolle. Intégrales indéfinies. Différentielles binomes. Intégrales définies. Valeurs moyennes. Applications géometr. Rectifications. Equations diff. du prem. ordre. Equations diff. du sec. ordre. Courbes telles que. Trajectoires orthogonales. — Trigonométrie plane. Trigonométrie sphérique. — Géométrie analyt. dans le plan: Construction d. formules. Points. Droites. Cercles. Divisions et faisceaux homographiques, en involution. Lieux géométriques. Enveloppes. Courbure. Courbes. Coordonnées polaires. Coniques. — Géométrie analyt. dans l'espace: Coordonnées. Plans et droites. Sphères. Cônes et cylindres. Surfaces de révolution. Conoïdes. Surfaces div. Quadriques. Courbes gauches. Courbes planes dans l'espace. Surfaces. — Cinématique. Dynamique. Statique. Equilibre. — Géométrie descriptive: Droites et plans. Sphères. Cônes et cylindres. Intersection de cônes et cylindres. Surfaces de révolution. Surface gauche de révolut. Paraboloïde hyperbolique. Hyperboloïde à trois axes inégaux. Ellipsoïde à trois axes inégaux. Intersection de deux quadriques.

Wiener Volksbuchhandlung Ignaz Brand.

Wien 6.

Adler, Friedrich, Ortszeit, Systemzeit, Zonenzeit und das ausgezeichnete Bezugssystem der Elektrodynamik. Eine Untersuchung über die Lorentzsche und die Einsteinsche Kinematik. — XVI + 237 pp. 8. 1920.

Andeutung d. Hauptgesichtspunkte der Untersuchung. Ableitung d. Transformationsgleichungen, ausgehend v. d. Voigtschen Ortszeit. Einige element. Bemerkungen üb. d. Messmethoden d. Länge, Zeit u. Geschwindigkeit. Fehlschlüsse in d. Einsteinschen Kinematik u. d. ausgezeichnete Bezugssyst. d. Elektrodynamik. Abgangszeiten. Reziproke u. nichtrezipr. Kontraktionen. Gangdifferenz u. Lichtgeschwindigkeit. — Einsteinsche Ableitungen d. Transformationsgleichungen.

Divers.

Lecat, Maurice, Bibliographie des séries trigonométriques. Avec un appendice sur le calcul des variations. — VI + 167 pp. 8. 1921. Frs 25: — (interfol.) (Chez l'Auteur. Louvain, Avenue des Alliés, 92. Bruxelles, Avenue Bois Cambre, 16.)

Préf. Liste par ordre alphabétique des noms d'auteurs. Compléments. Table d. Receuils périodiques. Classement géographique d. Receuils. Dissertations universitaires. Programmes. Nouv. additions. Statistique. Appendice.

Publications of the United States Naval Observatory. Second Series. Vol. 9, Part I. Results of observations with the nine-inch transit circle 1903—1911. Reduced under the direction of W. S. Eichelberger. Discussed by W. S. Eichelberger and H. R. Morgan. 1920.

K. Technische Hochschule zu München.

Dissertationen:

Armstrong, Gordon Nelson, Eine Untersuchung der Anwendbarkeit rekurrenter Reihen zur Aufsuchung verstecker Periodizitäten. 1913.

Daunderer, Alois Anton, Ueber die in den unteren Schichten der Atmosphäre vorhandene freie elektrische Raumladung. 1908.

Endrös, Anton, Seeschwankungen beobachtet am Chiemsee. 1903.

Förg, Karl, Die Bestimmung des Standpunktes und der äusseren Orientierungselemente in der Photogrammetrie bei bekannter innerer Orientierung. 1909.

Glocker, Wilhelm, Geometrische Diskussion der Integrale einer homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung 3. Grades. 1915.

HAEUSER, JOSEF, Die ebene Kurve dritter Ordnung als Erzeugnis dreier kollinearer konjektiver ebener Felder. 1914.

† HAFNER, HANS, Deformation einer geradlinigen Fläche unter der Bedingung, dass die Erzeugenden Erzeugende bleiben und die Längen einer aequidistanten Kurvenschar unverändert erhalten werden. 1914.

HAGE, HANS, Ueber Begrenzungsflächen unendlich dünner Strahlenbündel, deren Erzeugende gleiche Neigung zum Mittelstrahl haben. 1909.

HALLER, STANISLAUS, Untersuchungen der Brennpunktskurve eines Kegelschnittsbüschels mit besond. Berücksichtigung der gestaltlichen Verhältnisse. 1903.

HARTINGER, HANS, Ueber Komplexe, die sich erzeugen lassen durch Kongruenzen 1. Ordn. 2. Kl., deren Brennlinien auf einer Regelfläche 2 Grades liegen. 1916.

HEYER KARL, Ueber die Spannungsverteilung auf den Hüllen von Prall-Luftschiffen. 1913.

HÜBSCH, KARL, Untersuchung einer kinetographischen Verwandtschaft bei speziellen Schleifschiebergetrieben. 1909.

KIMMEL, HERMANN, Theorie der Luftschrauben auf aerodynamischer Grundlage. 1912.

KLEEBERG, RUDOLF, Ueber die Diskriminantenflächen der Gleichungen $A + \cos x + B \sin 2x + C \cos 2x + D \cos 3x = 0$. 1911.

MUTH, FRITZ, Ueber solche Koordinatensysteme auf Flächen, bei denen die eine Schar von Parameterkurven auf der andern gleiche Stücke abschneidet. 1912.

NUBER, AMBROS, Untersuchung der Kernkurven spezieller ebener Korrelationen und der damit verbund. quadratischen Verwandtschaften. 1912.

PELZNER, HANS, Ueber involutorische Raumverwandtschaften und solche Transformationen, bei denen den Ebenen eines Raumes Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt entsprechen. 1913.

PFÄTTISCH, P. CANISIUS, Untersuchungen üb. Geraden-Punkttransformationen, bei denen die zugeordneten Elemente incidieren. 1916.

PFEIFFER, FRIEDRICH, Ueber die W-Flächen mit der Relation $2(R_1 - R_2) = \sin 2(R_1 + R_2)$ zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2. 1907.

RIEDER, HEINRICH, Untersuchung einer zweivierdeutigen kinetographischen Verwandtschaft. 1907.

ROTH, LUDWIG, Ueber die singulären Stellen des Haupttangentenkurven-Systems einer Fläche. 1914.

ROTHENBERG, SIEGFRIED, Geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen totaler Differentialgleichungen von d. ersten Ordnung mit zwei variablen Grössen. 1908.

RUDEL, ERNST, Die Orientierung photogrammetischer Aufnahmen bei vertikaler Bildebene unter Benutzung magnetischer Azimute.

SCHEUFELE, WILHELM, Die Aufgabe der sechs Punkte in der Photogrammetrie. 1907.

SCHOY, CARL, Die geschichtliche Entwicklung d. Polhöhenbestimmungen bei den älteren Völkern. 1911.

SCHULZ, JULIUS, Ueber eine von J. L. Lagrange gegebene trigonometr. Interpolationsmethode u. deren Anwend. auf Kosmophysik; 1913.

SOMMER, OTTO, Mathematisch-geographische u. kosmophysikalische Ansichten von Keplers Freund Joh. Brenger. 1914.

THIERSCH, FRIEDRICH, Die Reflexion eines Parallelstrahlenbündels am Paraboloid. 1914.

WEIGEL, JAKOB, Ueber die gestaltlichen Verhältnisse d. Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades in d. Umgebung eines Doppelpunktes d. Diskriminantenkurve. 1912.

WIESELSBERGER, CARL, Ueber die statische Längsstabilität der Drachenflugzeuge. 1913.

BIBLIOGRAPHIE.

Akademiska bokhandeln.

Uppsala.

PHALÉN, A., Ueber die Relativität der Raum- und Zeitbestimmungen. (Skrifter utg. af K. Humanistiska vetenskaps-samfundet i Uppsala. 21: 4.) — 176 pp. 8. 1922. Kr. 8: —.

Relativität d. Raumbestimm. i. traditionellen Sinne. Vorstellung v. einem absoluten Raum. Relativität d. Raumbestimm. nach d. physikal. Relativitätstheorie. Zeit u. Bewegung.

Félix Alcan.

Paris.

BERGSON, HENRI, Durée et simultanéité à propos de la théorie d'Einstein. — VIII + 245 pp. 8. 1922. 8 fr.

La demi-relativité. La relativité compl. De la nature du temps. De la pluralité des temps. Les figures de lumière. L'Espace-Temps à quatre dimensions. Remarque finale.

BOREL, É., L'espace et le temps. — IV + 245 pp. 8. 1922.

De Newton et Poincaré à Einstein. La géométrie et la figure de la terre. L'espace et le temps en astronomie. La géométrie abstraite et les cartes géograph. La continuité et la topologie. Propagation de la lumière. La théorie de la relativité restrainte. La théorie de la relativité gén. — La cinématique de la relativité restr. Les hypothèses fondam. de la phys. et de la géom. Le continu mathém. et le continu phys.

ROUGIER, LOUIS, La structure des théories déductives. Théorie nouvelle de la déduction. (Bibliothèque de philosophie contemporaine.) — XV + 136 pp. 8. 1921. Fr. 7: —.

Logique du jugement et du raisonnement. Types élémentaires de raisonnement. Économie des théories déductives. Mécanisme du développement d'une théorie déductive: La démonstration. Nature formelle des théories déductives.

Verlag der Arbeitsgemeinschaft deutscher Naturforscher und Philosophen.

Berlin.

Mewes, R., Über die spezifische Wärme der gas- und dampfförmigen flüssigen und festen Stoffe. (Schriften aus dem Verlage der Arbeitsgemeinschaft deutscher Naturforscher und Philosophen. H. 3.) — VIII + 124 pp. 8. 1922.

Annähernde Unveränderlichk. d. spezif. Wärme d. Gase u. Dämpfe. Spezif. Wärme c_p bzw. c_v f. gleiche Volumina ($c_p \cdot \gamma$ bzw. $c_v \cdot \gamma$). Bezieh. d. spezif. Wärme d. Gase u. Dämpfe zu d. Grundgesetzen d. Thermodynamik. Versuche üb. Veränderlichk. d. spezif. Wärme d. Gase u. Dämpfe bis zu hohen Temperaturen. Versuche üb. Veränderlichk. d. spezif. Wärme d. Gase u. Dämpfe bei tiefen Temperaturen. Vergleichung u. Bewertung d. verschied. Formeln f. d. spezif. Wärme d. Gase u. Dämpfe. Versuche üb. spezif. Wärmen d. flüss. u. festen Stoffe. Bezieh. d. spezif. Wärme bei tiefen Temperaturen z. spezif. Volumen u. z. brechenden Kraft. Nachtrag üb. Abweichungen zwischen Berechn. u. Beobachtung d. spezif. Wärme.

Attinger Frères, Éditeurs.

Paris & Neuchâtel.

Du Pasquier, L. G., Le développement de la notion de nombre. (Mémoires de l'Université de Neuchâtel. T. 3.) — VIII + 191 pp. 8. 1921.

Orig. et psychol. de la numération. Méthodes de la numération parlée. Systèmes additifs de numération parlée. Systèmes multiplicatifs de numération parlée. Surunités des div. rangs. Numération écrite. Diversité des bases. Le meilleur système de numération.

J. P. Bachem.

Köln.

Pohle, Joseph, Die Sternenwelten und ihre Bewohner, zugleich als erste Einführung in die moderne Astronomie. 7., verbess. Aufl. Mit einer Karte, 6 Tafeln und 60 Abbild. im Text. — XI + 453 pp. 8. 1922.

Allgem. Gesichtspunkte. Tragweite u. Stand d. Frage. Der Autoritätsbeweis f. d. Belebtheit d. Weltalls. Untersuchung v. Meteoriten auf ihre Organismenhaltigk. Spektralanalyse u. Sternenwelten. Allgem. Resultate d. Spektralanalyse in Bezieh. auf d. Bewohnbark. d. Weltkörper. Die neuere Astrophotogr., ihre Erfolge u. Aussichten. Unbewohnbark. unserer Sonne. Die Fixsternwelten u. d. Systeme d. Doppelsterne in Bezieh. auf d. Wahrscheinlichk. organ. Lebens. Unser engeres Planetensystem i. Teleskop u. Spektroskop mit besond. Berücksichtigung seiner Bewohnbark. Kometen u. Nebelflecke. Metaphys. Erwägungen zugunsten d. kosm. Lebens. Die Mehrheit bewohnter Welten vor d. Richterstuhl d. Christentums.

Librairie scientifique Albert Blanchard.

Paris.

Juvet, G., Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu. Preface de Jacques Hadamard. — [6] + 101 pp. 8. 1922.

Vecteurs. Transformations linéaires. Première définition des tenseurs. Algèbre tensorielle. Formes bilinéaires et quadrat. Géométrie métr. Nouv. définition des tenseurs. Analyse tensorielle. Multiplicité ponctuelle quelconque. Métrique riemannienne. Déplacement parallèle d'après M. Levi-Civita. Analyse tensorielle dans un continuum riemannien. Bibliographie.

University of California Press.

Berkeley.

Slate, Frederick, The fundamental equations of dynamics and its main coördinate systems vectorially treated and illustrated from rigid dynamics. (Semicentennial publications of the University of California. 1868—1918.) — IX + 233 pp. 8. 1918.

Introductory summary. The fundamental equations. Reference frames: transfer and invariant shift. Some coördinate systems.

Cambridge University Press.

Fetter Lane, London E. C.

Baker, H. F., Principles of geometry. Vol. 2. Plane geometry. Conics, circles, non-Euclidean geometry. — XV + 243 pp. 8. 1922. 15 sh.

Preliminary. Gen. properties of conics. Properties rel. to two points of reference. The equation of a line, and of a conic. Restriction of the algebr. symbols. Distinction of real and imaginary elements. Properties rel. to an absolute conic. The notion of distance. Non-Euclidean geometry. Note 1: Certain elementary configurations, and on the compl. figure for Pappus' theorem. Note 2: On the Hexagrammum mysticum of Pascal. Note 3: In regard to the literature for non-Euclidean geometry. Note 4: Remarks and corrections of vol. 1.

Jessop, C. M., Elementary analysis. — 175 pp. 8. 1921.

Coordinates. The straight line. Change of axes. Oblique axes. The circle. Function. Continuity. Limit. The differential coefficient of a function. Differential coefficients of the simpler functions. Applic. of the differ. calculus. Integration. An integral represents an area. Applic. of the integral calculus. Exponential and hyperbolic functions. Special methods of integration. The gen. conic.

Thomson, J. J., Elements of the mathematical theory of electricity and magnetism. 5th ed. — [8] + 410 pp. 8. 1921.

Gen. principles of electrostatics. Lines of force. Capacity of conductors. Condensers. Specific inductive capacity. Electr. images and inversion. Magnetism. Terrestrial magnetism. Magnetic induction. Electric currents. Magnetic force due to currents. Electromagnetic induction. Electr. units: dimensions of electr. quantities. Dielectric currents and the electromagnetic theory of light. Thermoelectric currents. Properties of moving electric charges. Index.

WATSON, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions. — VIII + 804 pp. 4. 1922. 70 sh.

Bessel functions before 1826. Bessel coefficients. Bessel functions. Differential equations. Miscell. properties of Bessel functions. Integral representations of Bessel functions. Asymptotic expansions of Bessel functions. Bessel functions of large order. Polynomials associated with Bessel functions. Functions associated with Bessel functions. Addition theorems. Definite integrals. Infinite integrals. Multiple integrals. Zeros of Bessel functions. Neumann series and Lommel's functions of two variables. Kapteyn series. Series of Fourier-Bessel and Dini. Schlömilch series. The tabulation of Bessel functions.

WHITEHEAD, A. N., The principle of relativity with applications to physical science. — XII + 190 pp. 8. 1922. 10 sh. 6 d.

P. 1. Gen. principles. 2. Physical applications. 3. Elementary theory of tensors.

Carnegie Institution of Washington.

Washington.

BARUS, CARL, Displacement interferometry applied to acoustics and to gravitation. (Carnegie inst. Publication n:o 310.) — VIII + 149 pp. 8. 1921.

The open Mercury manometer read by displacement interferometry. The interferometer U-tube used as an absolute electrometer. Acoustic pressures and dilatations chiefly in reservoirs. The pinhole probe for sound pressures. Compression of a sound wawe in diapason pipes. Vibration of the telephone plate. Experiments made in the endeavor to place the revolving mirror on the interferometor. Torsional measurement of variations of acceleration of gravity, by interferences. Pneumatic method of measuring variations of acceleration of gravity. Gravitational experiments, chiefly with ref. to the accompanying radiant forces. Gravitational experiments. Miscell. experiments.

Clarendon Press.

Oxford.

TWEEDIE, CH., James Stirling. A sketch of his life and works along with his scientific correspondence. — XII + 213 pp. 8. 1922.

P. 1—22: Life of Stirling; p. 23—49: Works publ. by J. Stirling; p. 52—213: Stirling scient. correspondence.

U. S. Coast and geodetic survey.

Washington.

DEETZ, CHARLES H., & ADAMS, OSCAR S., Elements of map projection with applications to map and chart construction. [74 figures, 8 folded plates.] (Departement of commerce. U. S. Coast and geodetic survey. Special publication. N:o 68.) — 163 pp. 4. 1921. 50 cents.

1. Analysis of the basic elements of map projection. Representation of the sphere upon a plane. Elementary discussion of various forms of projection.

2. The polyconic projection. The Bonne projection. The Lambert zenithal (or azimuthal) equal-area projection. The Lambert conformal conic projection with two standard parallels. The Grid system of military mapping. The Albers conical equal-area projection with two standard parallels. The Mercator projection. Fixing position by wireless directional bearings. The gnomonic projection.

Friedrich Cohen.

Bonn.

GERLACH, J. E., Kritik der mathematischen Vernunft. Mit 7 mathematischen Zeichnungen im Text. — 162 pp. 8. 1922.

Armand Colin.

Paris.

GEFFROY, J., Traité pratique de géométrie descriptive. (Coll. Armand Colin. N:o 8.) — II + 191 pp. 8. 1921. 5 fr.

Le point, la droite, le plan. Méthodes graph. Problèmes rel. aux distances et aux angles. Conventions rel. à la visibilité. Polyèdres. Applications prat. des méthodes graph.

Librairie Delagrave.

Paris.

BOUASSE, H., Theorie des vecteurs. Cinématique. Mécanismes. (Bibliothèque scientif. de l'ingénieur et du physicien. — XXII + 482 pp. 8. 1921.

Préf.: Des manipulations et du dessin pédagog. — Théorie des vecteurs. Composition des translations et des rotations. Mouvement d'une figure plane dans son plan. Cinématique du solide invariable. Accélération. Mouvement relatif. Courbes roulantes. Cames. Serrures. Crémaillères. Engrenages. Trains d'engrenages. Trains epicycloïdaux. Systèmes articulés. Joints. Embrayages. Déclics. Encliquetages. Machines à calculer et à écrire. Tracé mécanique de cert. courbes. Planimètres. Machines à tisser.

J. Engelhorns Nachf.

Stuttgart.

GRÄTZ, LEO, Die Atomtheorie in ihrer neuesten Entwickelung. Sechs Vorträge. 33 Abbildungen. 3 Aufl. — VIII + 93 pp. 8. 1921. 7.50 Mk.

Gustav Fischer.

Jena.

Neumann, Ernst Rich., Vorlesungen zur Einführung in die Relativitätstheorie. Mit 39 Abbild. im Text. — VIII + 228 pp. 8. 1922. Mk. 90: —.

T. 1. Die spez. Relativitätstheorie — 2. Die allg. Relativitätstheorie.

Teodor Fisher.

Freiburg i. B.

Heffter, Lothar, Was ist Mathematik? Unterhaltungen während einer Seereise. 156 pp. 8. 1922. Kr. 2: —.

Verlagsbuchhandl. Carl Fromme.

Wien & Leipzig.

Ludwig, Wilh., Lehrbuch der politischen Arithmetik. Mit einem Tabellenheft. 6:e, unveränd. Aufl. — IV + 198 + 31 pp. 8. 1922. Mk. 385: —.

T. 1. Zinsen- u. Annuitätenrechnung.
T. 2. Elemente d. Wahrscheinlichkeits-Rechnung.
T. 3. Lebensversicherung.

Gauthier-Villars et Cie.

Paris.

d'Alembert, Jean, Traité de dynamique. 1—2. — XL + 102 pp.; 187 pp. 8. 1921. 6 fr.

1. Lois gén. du mouvement et de l'équilibre des corps. Principe gén. pour trouver le mouvement de pluisieurs corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, avec plusieurs applications de ce principe.

2. Problèmes où l'on montre l'usage du principe précédent. Du principe de la conservation des forces vives.

Bally, E., Géométrie synthétique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre. — VI + 98 pp. 8. 1920.

Aperçu gén. sur les cycloïdes. Propriétés tangentielles de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Hypocycloïde, inverse du cercle inscrit au triangle de ses rebroussements. Propriétés div. de l'hypocycloïde. Cubique gauche et développable de ses tangentes.

Becquerel, Jean, Le principe de relativité et la théorie de la gravitation. Leçons professées en 1921 et 1922 à l'École polytechnique et au Muséum d'histoire naturelle. — IX + 342 pp. 8. 1922.

P. 1. La relativité restreinte. Notions anc. d'espace et de temps. Recherche du mouvement absolu. Le groupe de transformations de Lorentz. Invariance de la

vitesse de la lumière. Relativité de l'espace et du temps. L'univers de Minkowski. Phénomènes optiques dans les systèmes en mouvement relatif. Le champ électromagnét. Dynamique de la relativité. Vérifications expérim.

P. 2. La relativité généralisée. Gravitation et électricité. Le champ de gravitation. La théorie des surfaces de Gauss et son extension à un continuum quadridimensionnel. Notions de calcul tensoriel. Théorie de la gravitation et dynamique. Le champ électromagnét. Le principe d'action stationnaire. La courbure de l'espace et du temps. Union du champ de gravitation et du champ électromagnét. Géométries de Weyl et d'Eddington.

Borel, É., Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions publ. sous la dir. de Émile Borel.) — XI + 148 pp. 8. 1922.

Les domaines et la théorie des ensembles. Les opérations et les développements en série. La théorie de la croissance et le rôle des constantes arbitraires. Les fonctions de variable complexe, en général, et les fonctions en particulier.

Bouguer, Pierre, Essai d'optique sur la gradation de la lumière. (Les maîtres de la pensée scientif.) — XX + 129 pp. 8. 1921. 3 fr.

Méthodes de mesurer la force de la lumière. De la transparence et de l'opacité. Méthode de calculer les forces qu'a la lumière en traversant diff. épaisseurs des corps transparents, lorsque les rayons sont sensiblement parallèles. Méthodes de calculer les forces de la lumière, lorsque le corps lumineux n'est pas à une distance infinie. De la diminution que souffre la lumière en traversant les corps qui ne sont pas de même densité.

Bragg, William, & Bragg, W. L., Rayons X et structure cristalline. Trad. sur la 3e éd. anglaise, par Mme Mg. J. Rivière. — VII + 209 pp. 8. 1921. 24 frcs.

Préliminaires. Notions sur la diffraction. Spectromètre à rayons X. Propriétés des rayons X. Structure cristalline. Les spectres de rayons X. Étude de la structure des cristaux. Relations entre la symétrie cristalline et l'arrangement des atomes. Intensité du phénomène de la réflexion des rayons X. Étude des radiogrammes de Laue.

Buhl, A., Les théories Einsteiniennes et les principes du calcul intégral. — (Extr. du Journal de Mathématiques) 16 pp. 4. 1922.

Cartan, E., Sur les équations de la gravitation d'Einstein. (Extr. du Journal de mathématiques). — 65 pp. 4. 1922.

Dostor, G., Éléments de la théorie des déterminants avec application à l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. 2e éd. Nouveau tirage. — XXXIII + 361 pp. 8. 1905.

Livre 1. Théorie des déterminants:

Propriétés gén. des déterminants. Combinaison et propriétés des déterminants satisfaisant à cert. conditions. Produit de deux déterminants.

Livre 2. Applic. des déterminants à l'algèbre et à la trigonométrie:

Résolution d'équations algébr. exprimées en déterminants. Résolution des équations linéaires. Les résultants. Applic. des déterminants à la trigonométrie.

Livre 3. Applic. des déterminants à la géométrie analyt.

Applic. des déterminants à la géométrie analyt. à deux dimensions. Surfaces des polygones. La droite et le plan. Le tétraèdre. Surfaces du second degré.

Livre 4. Les discriminants et les invariants.

Les discriminants. Les invariants.

Einstein, Albert, La géométrie et l'expérience. (Trad. française par M. Solovine.) — 19 pp. 8. 1921.

Einstein, A., La théorie de la relativité restreinte et généralisée (mise à la portée de tout le monde). Trad. d'après la 10e éd. allemande par Mlle J. Rouvière. Avec une préface de M. Émile Borel. (Actualités scientifiques.) — XIX + 120 pp. 8. 1921.

Fermat, P., Œuvres. Publ. par les soins de Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'instruction publique. Supplément aux tomes 1—4. Documents inédits publ. avec. notices sur les nouveaux manuscrits par M. C. de Waard. — XXV + 188 pp. 4. 1922.

Écrit anonyme sur la spirale de Galilée; son attribution à Fermat. Écrit anonyme inédit sur la chute des graves; son attrib. à Fermat. Points d'inflexion de la conchoïde de droite. Extraits de la correspond. de Galilée sur la spirale. Méthode de maximis et minimis: inédit de Fermat; Fermat à Mersenne. Détermination de la quadrature de la roulette ordinaire, des roulettes allongées et accourcies et la construction de la tangente à ces roulettes. Exposé par Beaugrand de la méthode de Fermat pour tracer les roulettes. Propriété de l'ellipse; manuscrit contemp. de Fermat. Méthode »de maximis et minimis«: exposé par Fermat pour Brûlart de St. Martin. Extraits du Racconto de Torricelli. Extraits de la correspond. de Ricci et Torricelli. Extraits de la corresp. de Roberval, Mersenne et Torricelli. Remarques d'Ang. Genocchi sur un mscr. de Fermat. Une fausse attribution. Une publication de Frenicle. Variantes et notes crit. Indices.

Galbrun, H., Introduction à la théorie de la relativité, calcul différentiel absolu et géométrie. — X + 457 pp. 8. 1923 [1922]. Fr. 60: —.

Introduction. Tenseurs covariants et contrevariants. Dérivées tensorielles. Tenseurs du premier et du second ordre. Sur quelques applications du calcul différ. absolu. Géométrie d'un espace euclidien à n dimensions. Espaces non euclidiens. Lignes géodés. Propriétés du second ordre; le déplacement parallèle d'après M. Levi-Cività. La géo-

métrie de M. Weyl. Les espaces de Galilée dans la mécanique rationnelle et dans les théories électromagnét. Les principes de la relativité restreinte. — Le Mémoire de Minkowski. Quelques remarques sur la cinématique de la relativité.

GOURSAT, É., Cours d'analyse mathématique. (Cours de la Faculté des sciences de Paris.) 3e éd. revue et augm. T. 3. — 702 pp. 8. 1923.

Intégrales infiniment voisines. Équations de Monge-Ampère. Équations linéaires à *n* variables. Équations linéaires du type hyperbol. Équations linéaires du type ellipt. Fonctions harmon. de trois variables. Équation de la chaleur. Résol. des équations intégr. par approximations successives. L'équation de Fredholm. Les fonctions fondam. Applic. des équations intégr. Calcul des variations. Note sur la représentation conforme.

HAAG, J., Cours complet de mathématiques spéciales. T. 3: Mécanique. — VIII + 182 pp. 8. 1922. 12 fr.

Notions gén. de cinématique. Mouvements ponctuels remarquables. Cinématique du corps solide. Principes fondam. de la dynamique. Dynamique du point. Applications de la dynam. du point. Notions sur la dynam. des systèmes. Les unités en mécanique. Statique. Applications de la statique.

HALDANE, VICOMTE, Le règne de la relativité. Trad. franç. par HENRY DE VARIGNY. — IX + 590 pp. 8. 1922. Fr. 30: —.

P. 1. *Le Problème de la Relativité.* Introd. Le domaine de la science. La relativité et ce qu'elle signifie. La relativité sous la forme britann. Einstein. La relativité dans l'expérience en gén.

P. 2. *La Fondation métaphys. de la relativité.* Le soi dans la connaissance. Signification en tant qu'entrée dans la réalité. Apparence de réalité. Ordres multiples dans la connaissance.

P. 3. *Autres vues sur la nature du réel.* Philosophie grecque. Le nouveau réalisme. Réalisme et idéalisme. Une critique améric. de Bergson. Le principe hegelien.

P. 4. *L'individu et son environnement.* La relation de l'homme à la société. L'individu et l'Etat. La relation de l'homme à Dieu. La vie éternelle. Reflexions finales.

Institut international de physique Solvay, Atomes et électrons. Rapports et discussions du conseil de physique tenu à Bruxelles du 1er au 6 avril 1921 sous les auspices de l'Institut international de physique Solvay. Publ. par la commission administrative de l'Institut et M. M. les secrétaires du conseil.

Rapports par H. A. LORENTZ, E. RUTHERFORD, M. DE BROGLIE, R. A. MILLIKAN, H. KAMERLINGH ONNES, P. WEISS, L. BRILLOUIN, W. H. BRAGG, W. J. DE HAAS, N. BOHR, P. EHRENFEST.

KENNELLY, A. E., Les applications élémentaires des fonctions hyperboliques à la science de l'ingénieur électricien. — VIII + 153 pp. 8. 1922.

... Fonctions hyperbol. réelles. Angles hyperbol. ... Applications des nombres complexes au circuit alternatif. La loi d'Ohm généralisée. Des angles complexes et de leurs fonctions trigonométr. ... Des lignes chargées régulièrement avec des impédances en série. ... Quelques formules trigonométr. comparatives.

Laplace, P. S., Essai philosophique sur les probabilités. 1—2. (Les maîtres de la pensée scientifique ... publ. par les soins de M. Solovine.) — XI + 103; 108 pp. 8. 1921.

La Vallée Poussin, Ch. J. de, Cours d'analyse infinitésimale. 4e ed. T. 1—2. XI + 434; XV + 478 pp. 8. 1921—22.

T. 1. Introd. Dérivation des fonctions explicites d'une variable. Formule de Taylor. Applic. diverses. Fonctions explicites de plusieurs variables. Fonctions implicites. Changement de variables. Intégrales indéfinies. Méthodes class. d'intégration. Intégrales définies. Formules fondam. de la théorie des courbes planes. Formules fondam. de la théorie des surfaces et des courbes gauches. Calcul des aires, des arcs et des volumes. Évaluation approchée des intégrales définies. Intégrales multiples. Séries.

T. 2. Intégrales généralisées et fonctions d'un paramètre. Intégration des différentielles exactes. Intégrales curvilignes. Intégrales culériennes. Introd. à la théorie des séries trigonométr. Généralités sur les équations différ. Existence et propriétés des intégrales. Intégration des équations du premier ordre. Equations d'ordre supér. au premier. Équations différ. simultanées. Équations linéaires aux dérivées partielles et aux différentielles totales. Notions sur le calcul des variations et le calcul des différences. Polynomes de Bernoulli. Formules sommatoires. Interpolation. Applications géométr. Points singuliers. Contacts. Enveloppes. Lignes tracées sur une surface.

Lémeray, E. M., L'éther actuel et ses précurseurs (simple récit). Préface de L. Lecornu. (Actualités scientifiques.) — IX + 141 pp. 8. 1922.

1. Les esprits, l'esprit ... De Thalès à Platon. Aristote; la première école d'Alexandrie ... Képler ... — 2. Pesanteur de l'air. Les »gaz». Empédocle ... Eck de Salzbach. Preuve expérim. de la pesanteur de l'air. Galilée ... Torricelli. Pascal. ... Dualisme de Descartes ... Dualisme de Spinoza. — 3. L'éther de Huyghens. Tourbillons de Descartes. Éther lumineux de Huyghens ... Discrédit de la théorie des ondulations ... 4. Le phlogistique ... 5. Le calorique ... Laplace et le principe d'équivalence de la chaleur et du travail. 6. L'éther de Fresnel ... L'hypothèse de l'éther est-elle inconcevable? Raisons scientif. favorables à l'existence de l'éther. Surface d'onde de Fresnel ... 7. Actions à distance. Concevabilité des hypothèses ... L'hypothèse de l'éther n'est pas inconcevable. Hypothèse des quanta. — 8. Le fluide inducteur. Faraday et l'induction. Hertz et les hautes fréquences ... La théorie de Maxwell confirme l'hypothèse d'un milieu universel ... 9. L'éther de Lorentz. L'éther d'Einstein. ... Conclusion. — Note 1. Sur la surface d'onde. — 2. Valeur de la théorie d'Einstein.

Lémeray, E. M., Leçons élémentaires sur la gravitation d'après la théorie d'Einstein. Cours libre professé à la Faculté des sciences de Marseille pendant le quatrième trimestre 1920. (Actualités scientifiques.) — 97 pp. 8. 1921.

1. Rappel de quelques propositions d'analyse, de géométrie et de mécanique. — 2. L'univers; le principe de relativité. — 3. La gravitation d'après Einstein. Les rayons lumineux.

Le Roux, J., Relativité restreinte et géométrie des systèmes ondulatoires. (Extr. du Journal de mathématiques). — 51 pp. 4. 1922.

Leveugle, R., Précis de calcul géométrique. Avec une préface de H. Fehr. — — LVI + 400 pp. 8. 1920.

Introd. Notions gén. sur les nombres complexes. Le point et le spath. La forme F_1. Produit des formes entre elles. Exercices et applications. Applications mécan. des F_2. Produit de deux vecteurs. Quaternion. Produits de plus de deux vecteurs. Formules gén. Différentiation des vecteurs. Applications à la géométrie et à la mécanique. La fonction linéaire et la surface du second ordre. L'opérateur d'Hamilton. Le gradient. Dérivée d'un scalar. Application de $\bar{\nabla}$ à un vecteur. Divergence et curl. Intégrales multiples. Potentiels Newtoniens. Mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Notions sur la théorie de l'élasticité. Application à la théorie électromagnét. de la lumière.

Lévy, Paul, Leçons d'analyse fonctionnelle professées au College de France. Avec une préface de J. Hadamard. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions publ. sous la dir. de E. Borel.) — VI + 442 pp. 8. 1922.

Fondements du calcul fonctionnel. Équations aux dérivées partielles du premier ordre. La notion de moyenne dans le domaine fonctionnel et l'équation de Laplace généralisée.

Michaud, Félix, L'énergétique générale. — VII + 229 pp. 8. 1921.

L'énergie et ses transformations. Conservation de l'énergie. Le principe de conservation de l'énergie. Applic. du principe de conservation de l'énergie. Facteurs de l'énergie. Échelles de mesure des facteurs de l'énergie. Applic. des principes de conservation des extensités. Passage de l'énergie d'une forme potentielle à une forme cinét. ou inversement. Systèmes à une extensité variable. Systèmes à deux extensités variables. Systèmes à n extensités variables. Déplacement de l'équilibre. Les machines. Groupement des systèmes. Association des machines.

Michel, F., & Potron, M., La composition de mathématiques dans l'examen d'admission à l'École polytechnique de 1901 à 1921. Exercices d'application du cours de mathématiques spéciales (algèbre et analyse, trigonométrie, géométrie analytique, mécanique). — XI + 451 pp. 8. 1922. Fr. 40: —.

1. Solutions développées des problèmes donnés au concours d'admission à l'École polytechn. 1901—21. 2. Recueil méthod. des applications immédiates du cours de mathématiques spéc. rencontrées dans les compositions de mathématiques données au concours d'admission à l'École polytechn.

MONGE, GASPARD, Géométrie descriptive. Augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective, extraite des papiers de l'auteur par BARNABÉ BRISSON. 1—2. (Maîtres de la pensée scientifique.) XVI + 144 pp.; 138 pp. 8. 1922.

MOREUX, TH., Où en est l'astronomie. (Coll. des mises au point). — 294 pp. 8. 1921. 15 fr.

Qu'est-ce que le soleil? Les planètes intér. La terre. La lune. L'énigme martienne. Les astéroïdes. Jupiter. Le monde de Saturne. Uranus et Neptune. Le problème des distances. Les comètes. Les étoiles filantes et les bolides. Les étoiles. L'évol. des étoiles et les systèmes stellaires. Les amas stellaires. Les nébuleuses.

D'OCAGNE, MAURICE, Vue d'ensemble sur les machines à calculer. — 1922. 68 pp. 8.

Machines arithmét. (sans entraîneur, avec entraîneur, complexes). Machines algébr.

D'OCAGNE, M., Traité de nomographie. Étude générale de la représentation graphique cotée des équations à un nombre quelconque de variables. Applications pratiques. 2e ed., entièrement refondue, avec de nombreux compléments. — XXIV + 483 pp. 8. 1921.

Représentation dans le cas de deux variables. Représentation par lignes concourantes dans le cas de trois variables. Représentation par lignes concourantes dans le cas de plus de trois variables. Représentation par points alignés dans le cas de trois variables. Représentation par points alignés dans le cas de plus de trois variables. Représentation au moyen d'éléments mobiles. Annexes.

PAINLEVÉ, P., Les axiomes de la mécanique. Examen critique. — Note sur la propagation de la lumière. (Les maîtres de la pensée scientifique . . . publ. par les soins de M. Solovine). — XVII + 111 pp. 8. 1922.

PETROVITCH, MICHEL, Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch (1894—1921). (Académie Royale de Serbie.) — IX + 152 pp. 8. 1922.

Liste des travaux de M. M. Petrowitch publ. de 1894 à 1921.

Resumé analyt.: Algèbre. Intégrales définies. Théorie des fonctions. Équations différ. Phénoménologie gén. Recherches diverses.

PICARD, ÉMILE, La vie et l'oeuvre de Pierre Duhem. — 58 pp. 4. 1922.

PICARD, É., Traité d'analyse. 3e éd., rev. et augm. avec la collaboration de G. JULIA. T. 1. Intégrales simples et multiples. L'équation de Laplace et ses applications. Développements en séries. Applications géométriques du calcul infinitésimal. (Cours de la Faculté des sciences de Paris.) — XVII + 593 pp. 8. 1922.

P. 1. Intégrales simples et multiples.

Des intégrales définies. Intégrales indéfinies. Intégrales curvilignes. Des intégrales doubles. Des intégrales multiples.

P. 2. L'équation de Laplace et ses applications. Développements en séries.

De l'équation de Laplace. Potentiel et attraction des masses à trois dimensions. Des potentiels de simple couche et de double couche, et de leurs applic. à div. problèmes d'attraction. Intégration des séries; séries entières. Des séries trigonométr. Séries multiples.

P. 3. Applications géométr. du calcul infinitésimal.

Théories des enveloppes; surfaces réglées; congruences et complexes. Théorie du contact; courbure. Courbure et torsion des courbes gauches; formules fondam. Des courbes tracées sur une surface. Surfaces applicables; représentation conforme; cartes géograph.

Picard, É., Discours et mélanges. [6] + 294 pp. 8. 1922.

Vie et œuvre de P. Duhem. Vie et œuvre de Lord Kelvin. Gaston Darboux. Le commandant Guyou. Les sciences mathém. en France depuis un demi-siècle. Quelques réflexions sur la science et l'industrie après la guerre. Hist. des sciences et prétentions de la science allem. Vaccination antityphoïdique. Conférence sur la dépopulation. L'œuvre de Henri Poincaré. La science et la recherche scientif. Discours à la séance annuelle de l'Acad. des sciences, 19 déc. 1910. Le voyage de »Pourquoi-Pas?». Mauricy Levy. L'aviation franç. en 1909. La mécanique class. et ses approximations successives. Les œuvres de Galois. Une distribution des prix au Lycée Henri IV.

Poirée, J., Méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie. 2e éd. rev. et augm. — 70 pp. 8. 1921. 8 fr.

Inversion et problèmes sur le cercle ... Méthode de similitude ... Méthode des lieux géométr. ... Involutions ... Transformations quadrat.

Rougier, L., La matière et l'énergie selon la théorie de la relativité et la théorie des quanta. Nouv. éd. revue et augm. — XI + 112 pp. 8. 1921.

La dualité de la matière et de l'énergie. La masse et le principe de relativité. La dynamique électromagnét. La théorie électronique de la matière. L'inertie de l'énergie. La pesanteur de l'énergie. La structure de l'énergie. Conclusion.

Silberstein, L., Éléments d'algèbre vectorielle et d'analyse vectorielle. Trad. de l'anglais par Georges Matisse. VIII + 130 pp. 8. 1921.

Thomson, Sir J.-J., Électricité et matière. Trad. de l'anglais par M. Solovine. — VIII + 133 pp. 8. 1922.

Représentation du champ électr. par des lignes de force. Masse électr. et masse liée. Effets produits par l'accélération des tubes de Faraday. La structure atomique de l'électricité. La constitution de l'atome. La radioactivité et les substances radioactives.

Vieillard, P., Longueurs d'onde et propagation. (Étude théorique de la T. S. F. extérieure.) — XII + 416 pp. 8. 1921. 27 fr. 50 + 100 %.

P. 1. *Étude sur la vibration des antennes et le calcul des longueurs d'onde.* Propagation des ébranlements le long des conducteurs. Périodes propres des circuits finis ne comportant que des éléments simples. Étude des solutions approchées. Résumé des résultats obtenus et comparaison avec des données expérimentales.

P. 2. *Propagation des oscillations.* Théorie de la propagation des oscillations dans l'espace. Rayonnement. Amortissement. Affaiblissement de la propagation. Antennes d'aéronefs. Antennes de réception. Perturbations dues aux pylônes. Conclusions et discussion des principaux résultats obtenus.

Villat, H., Aperçus théoriques sur la résistance des fluides. (Scientia. Série physico-mathématique. N:o 38.) — 101 pp. 8. [1921.] Fr. 8: —.

Rappel des théorèmes et principes gén. Le problème de Dirichlet dans le cercle et dans l'anneau. Étude de la résistance opposée par un fluide au mouvement d'un solide qu'il baigne. Mouvements discontinus dans un fluide parfait indéfini. Étude de l'obstacle anguleux. Courant de largeur finie rencontrant un obstacle. Mouvement d'un solide dans un canal. Fluide limité par une paroi fixe. Solutions multiples.

Villey, J., Physique élémentaire et théories modernes. P. 1. Molécules et atomes. États d'équilibre et mouvements de la matière. (Mécanique, statique des fluides, chaleur, élasticité et acoustique.) — X + 197 pp. 8. 1921.

Éléments de mécanique. Équilibre des solides. Conservation de l'énergie. Équilibre et propriétés des liquides. Équilibre et propriétés des gaz. Température et quantités de chaleur. Dilatations therm. Changements d'état. Élasticité et acoustique. Molécules et atomes.

Zaremba, S., La théorie de la relativité et les faits observés. (Extrait du Journal de Mathématiques.) — 37 pp. 4. 1922.

Jul. Gjellerups Forlag.

Kjöbenhavn.

Bohr, H., & Mollerup, J., Lærebog i matematisk Analyse. 1—3. 327, 682, 178 pp. 8. 1920, 21, 22.

1. Elementær-algebr. Undersög. med Anvendelse paa d. analyt. Plangeometri og Rumgeometri.

Indledn. Determinanter og deres Anvendelse. Grundtræk af d. analyt. Plan- og Rumgeometri.

2. Læren om de reelle Funktioner med Anvendelse paa d. analyt. Plangeometri og Rumgeometri.

Indledn. Kontinuerte Funktioner. Differentiable Funktioner. To Gange differentiable Funktioner. Flere Gange differentiable Funktioner.

3. Grænseprocesser.

Inledn. Uendelige Rækker. Uendel. Produkter. Uegentl. Integraler.

HJELMSLEV, J., Elementaer Geometri. 1 bog. 2 udgave. — 140 pp. 4. 1921.

De geometriske grundformer. Geometrien i tegneplanen. Geom. i marken. Ligedannethed. Beregnende geom. Konstruktionslære.

2. bog 1921.

3 bog. — 256 pp. 4. 1921.

Læren om reelle tal. Den geom. maalings teori. Den analyt. plan. Den analyt. trigonometri. Geom. steder. Teoretisk konstruktion »ved passer og lineal». Keglesnit. Arealmaaling. Brudte linier og polygoner.

A. Graffs Buchhandlung.

Braunschweig.

DZIOBEK, O., Lehrbuch der analytischen Geometrie. T. 1. Analytische Geometrie der Ebene. 85 Figuren im Text. 3., verb. Aufl. — VIII + 359 pp. 8. 1916.

T. 2. Analytische Geometrie des Raumes. 36 Figuren im Text. 2. Aufl. — VIII + 316 pp. 8. 1921.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Hannover.

KIEPERT, L., Grundriss der Differential-Rechnung. Bd 2. Einige grundlegende Untersuchungen aus der Algebra und Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. 14:e., vollst. umgearb. u. verm. Aufl. des gleichnamigen Leitfadens von M. STEGEMANN. — VIII + 357 pp. 8. 1923 [1922].

T. 2. Einige grundleg. Untersuch. aus d. Algebra: Theorie d. komplexen Grössen. Wurzeln einer algebr. Gleichung $f(x) = 0$. Numer. Auflösung d. algebr. Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Asymptoten einer Kurve. Theorie d. Determinanten.

T. 3. Funktionen v. mehr. unabhängigen Veränderlichen: Differentiation d. Funktionen v. mehr. von einander unabhäng. Veränderlichen. Anwendungen auf d. analyt. Geometrie d. Raumes. Anwendungen auf d. analyt. Geometrie d. Ebene. Herleitung d. Taylorschen Reihe f. Funktionen v. mehr. Veränderlichen. Homogene Funktionen. Maxima u. Minima d. Funktionen v. mehr. Veränderlichen. Anhang.

MÜLLER, C. H., & PRANGE, G., Allgemeine Mechanik. Grundlegende Ansätze und elementare Methoden der Mechanik des Punktes und der Punktsysteme. Eine Einführung für Studierende der Natur- und Ingenieur-Wissenschaften. — X + 551 pp. 8. 1923.

Einleitung. Kinemat. Grundbegriffe. Die Newtonschen Axiome u. d. Grundgleichungen f. d. Bewegung eines Massenpunktes. Beispiele f. d. Dynamik d. einzelnen Massenpunktes. Die geführte Bewegung eines Massenpunktes u. d. Relativbewegung. Grundlagen f. d. Mechanik d. Massenpunktsysteme. Ansatz d. Bewegungsgleichungen u. Durchführung v. Beispielen. Integration d. Bewegungsgleichungen v. Massenpunktsystemen. Das Vielkörperproblem u. d. starre Körper. Differentialprincipien d. Mechanik.

Velten, A. W., Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen. T. 1. Die revidierten Grundlagen der Theorie. — VII + 129 pp. 8. 1922. Mk 77: —.

Einl. Grundlagen d. Theorie. Entwickl. d. ellipt. Funktionen. Weitere Eigensch. d. Jacobischen u. ellipt. Funktionen. Entwickl. durch Potenzreihen. Die Jacobischen Theta-Funktionen.

Librairie scientifique J. Hermann.

Paris.

Cartan, E., Leçons sur les invariants intégraux. — X + 210 pp. 8. 1922.

Le principe de la moindre action d'Hamilton et le tenseur »quantité de mouvement-énergie». L'invariant intégral à deux dimensions de la dynamique. Invariants intégr. et formes différentielles invar. Le système caractérist. d'une forme différ. Systèmes de Pfaff invar. et leurs systèmes caractérist. Formes à multiplication extér. Formes différ. extér. et leurs formes dérivées. Le système caractérist. d'une forme différ. extér. Formation des invariants intégr. Systèmes différ. qui admettent une transformation infinitésimale. Systèmes de Pfaff complètement intégrables. La théorie du dernier multiplicateur. Équations qui admettent un invariant intégral linéaire relatif. Équations qui admettent un invariant intégr. linéaire absolu. Équations différ. qui admettent une équation de Pfaff invar. Équations différ. qui admettent plusieurs invariants intégr. linéaires. Équations différ. qui admettent des transformations infinitésimales données. Application des théories précédentes au problème des n corps. Invariants intégr. et le calcul des variations. Le principe de Fermat et l'équation de Pfaff invariante de l'optique.

Goursat, Édouard, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. 2e éd. revue et augmentée. — 454 pp. 8. 1921. 20 fr.

Théorèmes d'existence. Équations linéaires. Systèmes complets. Équations linéaires aux différentielles totales. Intégrales compl. Méthode de Lagrange et Charpit. Méthode de Cauchy. Caractéristiques. Étude géométr. des équations à trois variables. Courbes intégr. Solutions singulières. Première méthode de Jacobi. Seconde méthode de Jacobi. Généralisations de Mayer et de Lie. Théorie gén. de Lie. Transformations de contact. Groupes de fonctions. Méthode gén. d'intégration.

Mie, G., La théorie Einsteinienne de la gravitation. Essai de vulgarisation de la théorie. Ouvrage trad. de l'allemand. — XI + 118 pp. 8. 1922.

Répérage dans l'espace. Répérage dans le temps. Le continuum espace-temps. Le principe de relativité. La théorie des actions à distance. L'éther. Ether et matière. La pesanteur. La théorie einsteinienne de la gravitation. Conséquences expérim. de la théorie. Le principe de la relativité du champ de gravitation. Le principe généralisé de la relativité des actions de gravitation. La relativité gén. Conclusion.

P. Hirzel.

Leipzig.

Planck, M., Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper. Zum Gebrauch bei Vorträgen, sowie zum Selbstunterricht. Mit 12 Figuren. 2 Aufl. — [5] + 193 pp. 8. 1922. Mk 84: —.

Allgem. Bewegungsgesetze eines stetig ausgedehnten Körpers. Unendlich kleine Deformationen. Endliche Deformationen.

Ulrico Hoepli.

Milano.

Berzolari, L., Geometria analitica. 2. Curve e superficie del secondo ordine. 2ª ed. riveduta ed ampliata. (Manuali Hoepli.) — X + 474 pp. 8. 1922. L. 18: —.

Orlandi, G., Nouve tavole tacheometriche per determinare le distanze orizzontali, le differenze di livello, le coordinate planimetriche e le curve, precedute da une dettagliata istruzione sul modo d'usarle. 3ª ed. — XXIV + 201 pp. 8. [1922.]

Schmidt, Harry, La prima conoscenza della relatività dell'Einstein accessibile a tutti. 3ª ed. ital. rived. ed ampl., con figure e tavole, a cura di Rafaele Contu e Tomaso Bembo. Con prefazione dell'autore, biografia, bibliografia, note a quadro riassuntivo di Rafaele Contu. (Manuali Hoepli.) — XXIII + 256 pp. 8. 1922. L. 11: 50.

Institut d'estudis catalans.

Barcelona.

Levi Civita, T., Questions de mecànica clàssica i relativista. Conferències donades el gener de 1921. (Publicacions de l'Institut de ciències. Colleció de cursos de física i matemàtica. Dir. per E. Terradas.) — VIII + 151 pp. 8. [1922.]

Regularització del problema dels tres cossos i abast que ella assoleix. Les ones en els líquids; propagació en els canals. Parallelisme i curvatura en una varietat qualsevol. L'òptica geomètrica i la relativitat general d'Einstein.

Max Jänecke, Verlagsbuchhandlung.

Leipzig.

Dreyer, G., Formeln, Begriffserklärungen und Lehrsätze aus der reinen und angewandten Festigkeitslehre. Für Schule und Praxis zusammengestellt. 2. u. 3., neubearb. Aufl. — VII + 96 pp. 8. 1922.

Charles and Edwin Layton.

London.

Elderton, W. Palin, Frequency-curves of correlation. Publ. for the Institute of actuaries. — XIII + 172 pp. 8. 1906.

—— Addendum (with diagram and errata). 22 pp. 8. 1917.

Hardy, G. F., The theory of the construction of tables of mortality and of similar tables in use by the actuary. A course of lectures, delivered at the Institute of actuaries, Staple Inn Hall, during the session, 1904—5. Publ. for the Institute of actuaries. — [3] + 141 pp. 8. 1909.

Macmillan & Co.

London.

Carslaw, H. S., Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids. — XII + 268 pp. 8. 1921. 30/-.

The differential equation of the mathemat. theory of the conduction of heat. Fourier's ring. Linear flow of heat. Infinite and semi-infinite solid and rod. Linear flow of heat. Solid bounded by two parallel planes. Finite rod. Two-dimensional problems. Flow of heat in a rectangular parallelepiped. Flow of heat in a circular cylinder. Flow of heat in a sphere and cone. Use of sources and sinks in cases of variable temperature. Use of Green's functions in the solution of the equation of conduction. Use of contour integrals in the solution of the equation of conduction. Integral equations and the equation of conduction.

Gray, A., & Mathews, G. B., A treatise on Bessel functions and their applications to physics. 2d ed., prep. by A. Gray and T. M. Macrobert. — XIV + 327 pp. 8. 1922.

Introd. Solution of the differ. equation. Other Bessel functions and related functions. Functions of integral order. Expansions in series of Bessel functions. Definite integral expressions for the Bessel functions. Asymptotic expansions. Definite integrals involving Bessel functions. The zeros of the Bessel functions. Fourier-Bessel expansions and integrals. Relations betw. Bessel functions and Legendre functions. Green's function. Vibrations of membranes. Hydrodynamics. Steady flow of electricity or of heat in uniform isotropic media. Propagation of electromagnetic waves along wires. Diffraction. Equilibrium of an isotropic rod of circular section. Miscellaneous applications. Miscell. examples.

Keynes, J. M., A treatise on probability. — XI + 466 pp. 8. 1921. 18 s.

Fondamental ideas. Fundamental theorems. Induction and analogy. Some philosoph. applications of probability. Foundations of statist. inference.

The Macmillan Company.

New York.

Fisher, Arne, The mathematical theory of probabilities and its application to frequency curves and statistical methods. Transl. from the Danish by Charlotte Dickson and William Bonynge. With introductory note by M. C. Rorty and F. W. Frankland. Vol. 1. 2d ed. greatly enlarged. — VII + 289 pp. 8. 1922.

P. 1. Mathemat. probabilities and homograde statistics. Gen. principles and philosoph. aspects. Histor. and bibliograph. notes. The mathemat. theory of probabil. The addition and multiplication theorems in probabil. Mathem. expectation. Probability à posteriori. The law of large numbers. Introductory formulas from the infinitesimal calculus. Law of large numbers. Mathem. deduction. The theory of dispersion and the criterions of Lexis and Charlier. Application to games of chance and statist. problems. Continuation of the application of the theory of probabil. to homograde statist. series.

P. 2. Frequency curves and heterograde statistics. The theory of errors and frequency curves and its applic. to statist. series. Gen. remarks. The mathem. theory of frequency curves.

P. 3. Pract. applic. of the theory. The numeral determination of the parameters. Logarithmically transformed frequency functions. Frequency curves and their relation to the Bernouillian series. Poisson-Charlier frequency curves for integral variates.

Bokförlaget Natur och Kultur.

Stockholm.

Ahlberg, Alf, De filosofiska grundproblemen. En inledning till filosofien. (Natur och kultur. 9.) — 128 pp. 8. 1922. Häft. 2: 75, inb. 3: 75.

Landtman, G., Immanuel Kant. Hans liv och filosofi. (Natur och kultur. 8.) 171 pp. 8. 1922. Häft. 2: 75, inb. 3: 75.

Verlag Naturwissenschaften G. m. b. H.

Leipzig.

Schuster, Aug., Mathematische Unterrichts-Briefe zur Einführung in das Studium der höheren Mathematik mit besonderer Rücksicht auf den Selbstunterricht. Mit zahlreichen Beispielen u. Übungsaufgaben und einem Anhang mit den ausführlichen Lösungen derselben. [T. 1.] — VI + 294 pp. 8. 1918. Kr. 12: 80.

P. A. Norstedt & Söner.

Stockholm.

Brodén, T., Bjerrum, N., Strömgren, E., Matematiken och de exakta naturvetenskaperna under det nittonde århundradet. — 248 pp. 8. 1922. 8 kr.

1. Matematik o. mekanik av T. Brodén.
2. Fysik o. kemi av N. Bjerrum.
3. Astronomi av E. Strömgren.

Kosmos. Fysiska uppsatser utgivna år 1921 av Svenska fysikersamfundet. — 219 pp. 8. 1921. Kr. 9: —.

Arrhenius, S., Teorien ang. d. elektrolyt. dissociationen. Bergholm, C., Elektronrören o. deras användn. — Borelius, G., Nyare undersökn. öv. de ferromagnet. fenomenens temperaturfunktioner. — Granqvist, G., Är solens strålning variabel? — Hulthén, E., Om bandspektra. — Koch, J., Om d. elektr. fältets inflyt. på ljusemissionen. Oséen, C. W., Omkring relativitetsteorien. Ramstedt, Eva, De sista årens framsteg på radioaktivitetens område. Siegbahn, M., Röntgenspektra.

Payot & Cie.

Paris.

Andoyer, H., L'œuvre scientifique de Laplace. (Collection Payot.) — 162 pp. 8. 1922. 4 frcs.

Résumé biograph. Premier aperçu sur l'œuvre de L. Caractéristiques de l'œuvre de L. L'œuvre de L. en mécanique céleste. Travaux de L. sur la théorie des probabilités. Recherches de L. sur des sujets divers. L'exposition du système du monde. Le traité de mécanique céleste et la théorie analyt. des probabilités.

Philipp Reclam jun.

Leipzig.

Platons Theaitetos oder Vom Wissen. Übers. von Friedrich Schleiermacher. Neu herausg. von Curt Woyte. (Reclams Univ.-Bibliothek Nr. 6338, 6339.) 150 pp. 8. 1916.

O. R. Reisland.

Leipzig.

Ehrenfels, Christian, Das Primzahlengesetz entwickelt und dargestellt auf Grund der Gestalttheorie. — VI + 116 pp. 8. 1922. 12 Mk.

Die Aufgabe. »Gestaltqualitäten». Zahlen u. Zahlenfiguren. Das Primzahlengesetz. Leihreihenfiguren. Wahrscheinlichkeitsschlüsse auf d. Verteilung der Primzahlen. Anhang.

Verlag von Speidel & Wurzel.

Leipzig & Zürich.

Da Fano, G., Aufgaben aus der darstellenden Geometrie für Studierende der technischen Hochschulen. 2., verbess. u. erweit. Aufl. 66 pp. 8. 1921.

Julius Springer.

Berlin.

Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. 1. Elementare Differentialgeometrie. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ... herausg. von R. Courant. Bd 1.) — X + 230 pp. 8. — Mk 69 (in Schweden Mk 276).

Kurventheorie. Extreme bei Kurven. Anfangsgründe der Flächentheorie. Geometrie auf einer Fläche. Fragen der Flächentheorie im grossen. Extreme bei Flächen. Liniengeometrie.

Born, Max, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen. Elementar dargest. 3., verb. Aufl. 135 Textabbildungen. (Naturwissenschaftl. Monographien und Lehrbücher. Herausg. von der Schriftleitung der »Naturwissenschaften». Bd 3.) — XI + 267 pp. 8. 1922.

Geometrie u. Kosmologie. Die Grundgesetze d. klass. Mechanik. Das Newtonsche Weltsystem. Die Grundgesetze d. Optik. Die Grundgesetze d. Elektrodynamik. Das spez. Einstein'sche Relativitätsprinzip. Die allgem. Relativitätstheorie Einsteins.

Struik, D. J., Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung. Mit 4 Textfig. — VII + 198 pp. 8. 1922.

Affinoralgebra d. n-dimensionalen Differentialgeom. Affinoranalysis d. n-dimensionalen Differentialgeom. Krümmungseigensch. d. V_m in V_n, d. sich ohne Verwendung d. Riemann-Christoffel'schen Affinors formulieren lassen. Krümmungseigensch. d. V_m in V_n, d. sich auf Riemann-Christoffel'sche Affinoren beziehen.

B. G. Teubner.

Berlin & Leipzig.

Czuber, Emanuel, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Bd 1. 128 Abbild. 5., durchges. anastatisch gedr. Aufl. — XII + 569 pp. 8. 1922.

Variable u. Funktionen. Differentiation v. Funktionen einer Variablen. Differentiation v. Funkt. mehrerer Variablen. Reihen. Maxima u. Minima d. Funkt. Anwendung d. Differentialrechnung auf d. Unters. v. Kurven u. Flächen.

Euler, L., Opera omnia. Sub auspiciis Societatis scientiarum naturalium Helveticae edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, A. Speiser, L. G. du Pasquier. Ser. 1. Opera mathematica. Vol. 8. Introductio in analysis infinitorum. T. 1. Adiecta est Euleri Effigies ad imaginem ab E. Handmann pictam expressa. Ediderunt A. Krazer et F. Rudio. — XIII + 392 pp. 4:o. 1922.

Euler, L., Opera omnia. Sub auspiciis Societatis scientiarum naturalium Helveticae edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, A. Speiser, L. G. du

PASQUIER. Ser. 2. Opera mechanica et astronomica. Vol. 14. Neue Grundsätze der Artillerie. Aus dem Englischen des Herrn BENJAMIN ROBINS übers. und mit vielen Anm. vers. Mit vier ballistischen Abhandlungen herausg. von F. R. SCHERRER. — XVII + 484 pp. 4. 1922. Schw. fr. 25: —.

GAUSS, C. F., Werke. Herausg. von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd 10: Abt. 2: Abh. 1 und 5. — 74 + 95 pp. 4. 1922.

1. Über Gauss' zahlentheoret. Arbeiten von PAUL BACHMANN. Durchges. Abdruck aus Heft 1 der Materialien f. eine wissenschaftl. Biographie von Gauss . . ., Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Mathem.-physik. Kl. 1911. — 5. Gauss u. d. Variationsrechnung, von OSKAR BOLZA.

LIE, S., Gesammelte Abhandlungen. Auf Grund einer Bewilligung aus dem norwegischen Forschungsfonds von 1919 mit Unterstützung der Videnskapsselskap zu Kristiania und der Akademie der Wissenschaften zu Leipzig herausg. von dem Norwegischen mathematischen Verein durch FRIEDRICH ENGEL, POUL HEEGAARD. Bd 3. XVI + 789 pp. 8. 1922.

Bd 3: Abhandlungen zur Theorie der Differentialgleichungen. Abt. 1. Herausg. von FRIEDRICH ENGEL.

LORENTZ, H. A., EINSTEIN, A., & MINKOWSKI, H., Das Relativitätsprincip. Eine Sammlung von Abhandlungen. Mit einem Beitrag von H. WEYL und Anmerkungen von A. SOMMERFELD. Vorwort von O. BLUMENTHAL. 4., verm. Aufl. (Fortschritte der mathemat. Wissenschaften in Monographien. Herausg. von O. Blumenthal. H. 2.) — 159 pp. 8. 1922.

LORENTZ, H. A., Der Interferenzversuch Michelsons. — Elektromagnet. Erscheinungen in einem System, d. sich mit beliebiger, die d. Lichtes nicht erreichender Geschwindigk. bewegt.

EINSTEIN, A., Zur Elektrodynamik bewegter Körper. — Ist d. Trägheit eines Körpers v. seinem Energieinhalt abhängig? — Üb. d. Einfluss d. Schwerkraft auf d. Ausbreitung d. Lichtes. — Die Grundlage d. allgem. Relativitätstheorie. — Hamilton'sches Prinzip u. allgem. Relativitätstheorie. — Kosmol. Betracht z. allgem. Relativitätstheorie. — Spielen Gravitationsfelder i. Aufbau d. materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle?

MINKOWSKI, H., Raum u. Zeit. — SOMMERFELD, A., Anmerk. zu Minkowski, Raum u. Zeit. — WEYL, H., Gravitation u. Elektrizität.

PAULI jun., W., Relativitätstheorie. Sonderabdruck aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Mit einem Vorwort von A. SOMMERFELD. — I—IV, 539—775 pp.

Grundlage d. spez. Relativitätstheorie. Mathemat. Hilfsmittel. Weiterer Ausbau d. spez. Relativitätstheorie: Kinematik, Elektrodynamik, Mechanik u. allgem. Dynamik, Thermodynamik u. Statistik. Allgem. Relativitätstheorie. Theorien üb. d. Natur d. elektr. Elementarteilchen.

Friedr. Vieweg & Sohn.

Braunschweig.

Kneser, A., Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vorlesungen. 2:e, umgearb. Aufl. — VIII + 292 pp. 8. 1922. Kr. 4: 80, geb. Kr. 6: 20.

Integralgleich. u. lineare Wärmeleitung. Integralgleich u. Schwingungen linearer Massensysteme. Allg. Theorie d. Integralgleich. mit symmetr. Kern. Integralgleich. u. d. Sturm-Liouville'sche Theorie. Wärmeleitung u. Schwingungen in Geb. v. 2 od. 3 Dimensionen. Funktionentheoret. Methoden. Unsymmetr. Kerne u. d. Dirichlet'sche Problem. Die Fredholm'schen Reihen.

Müller, Aloys, Die philosophischen Probleme der Einstein'schen Relativitätstheorie. Vorlesung an der Universität Bonn. 2., umgearb. u. erweit. Aufl. des Buches: Das Problem des absoluten Raumes. (Die Wissenschaft. Samml. v. Einzeldarstellungen ... Herausg. v. E. Wiedemann. Bd 39.) — VIII + 224 pp. 8. 1922. Kr. 6: —.

Vorfragen. Das Raum-Zeit-Problem d. spez. Relativitätstheorie. Das Raum-Zeit-Materie-Problem d. allg. Relativitätstheorie. Physik u. Geometrie. Die Relativitätstheorie u. d. Relativismus.

Müller, Aloys, Der Gegenstand der Mathematik mit besonderer Beziehung auf die Relativitätstheorie. — VI + 94 pp. 8. 1922. Kr. 2: 40.

Von d. Gegenständen überhaupt. Mathem., Logik, Psychol. Was d. Zahl nicht ist. Was d. Zahl ist. Womit sich d. Geometrie nicht beschäftigt. Womit sich d. Geometrie beschäftigt. Ob d. Relativitätstheorie die Physik z. Geometrie macht. Induktion in d. Mathematik.

Sommerfeld, A., Atombau und Spektrallinien. 3., umgearb. Aufl. — XII + 764 pp. 8. 1922.

Vorbereit. Tatsachen. Das natürl. System d. Elemente. Röntgenspektren. Das Wasserstoffspektrum. Wellentheorie u. Quantentheorie. Serienspektren i. allgem. Bandenspektren. Theorie d. Feinstruktur. Mathemat. Zusätze u. Ergänzungen. Namen- u. Sachverz.

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger.

Berlin & Leipzig.

Fueter, Rudolf, Synthetische Zahlentheorie. Neue Ausg. (Göschens Lehrbücherei. Gruppe 1. Reine Mathematik. Bd 4.) — VIII + 271 pp. 8. 1921. Kr. 3: 52.

Einl. Bereiche rationaler Zahlen. Der Primidealführer. Die l. Einheitswurzel. Die Zahlentheorie d. Körpers d. l. Einheitswurzel. Aufstellung d. Primideale. Einheiten. Berechn. d. Klassenzahl. Reziprozitätsgesetze.

Löschner, H., Taschenbuch für praktische Geometrie. — X + 147 pp. 8. 1922. Kr. 4: —.

Masssysteme. Ausgleichsrechn. nach d. Methode d. kleinsten Quadrate. Gestalt u. Grösse d. Erde. Zu Auftrags- u. Rechenarbeiten. Konstante an Bestandteilen d. Instrumente. Zu Feldarbeiten.

Scheffers, G., Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf Geometrie. Bd 2. Einführung in die Theorie der Flächen. 2:e, verbess. u. verm. Aufl. Mit 110 Fig. im Text. — XI + 582 pp. 8. 1913.

Das Bogenelement d. Fläche. Krümmung d. Fläche. Fundamentalgleichungen d. Fläche. Kurven auf d. Fläche. Anhang.

Schlesinger, L., Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. 3., neubearb. Aufl. — VIII + 326 pp. 8. 1922.

Einleitendes üb. Diff.-Gleichungen i. reellen Gebiet. Allgem. Untersuchung d. Lösungen v. Diff.-Gleichungen 1. Ordnung. Diff.-gleichungen 1. Ordnung, wo d. Ableitung als implizite Funktion d. unabhängigen Veränderlichen gegeben ist. Diff.-Gleichungen mit festen Verzweigungspunkten. Singuläre Stellen linearer Diff.-Gleichungen. Untersuchung d. singulären Stellen, wo d. Integrale nicht unbestimmt werden. Die Gaussche Diff.-Gleichung. Unters. d. Integrale in d. Umgebung eines Punktes d. Unbestimmtheit. Verallgemeinerungen. Parametrale Probleme.

Schmid, Theodor, Darstellende Geometrie. 3. Aufl. Bd 1. (Sammlung Schubert. 65.) 283 pp. 8. 1922. Kr. 6: —.

Raumelemente, ebene Figuren u. eckige Körper. Kugel, Zylinder, Kegel. Plankurve u. Raumkurve. Orthogonale Axonometrie.

Vahlen, Th., Ballistik. Mit 53 Abbild. — XII + 231 pp. 8. 1922. Kr. 19: 20.

Einführung. Koordinaten. Erdkrümmung. Die wirkenden Kräfte. Grundlegung u. elem. Methoden. Ausnahme- u. Grenzfälle. Allgem. Flugbahneigensch. Grenzbahnen. Potenzreihen. Die erste Klasse v. Lösungen. Die zweite Klasse v. Lösungen. Reihen nach Potenzen von c/g. Störungen d. Flugbahn, insbes. durch Tageseinflusse. Flugbahnschwankungen. Die Flugbahn als nichtebene Kurve. Kosm. Ballistik. Der Drall. Übergangsballistik. Innere Ballistik. Ballist. Wahrscheinlichkeitsrehnung. Endballistik. Zielen u. Richten.

Wislicenus, W. F., Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper. 4 Aufl. Neubearb. von H. Ludendorff. (Sammlung Göschen. 91.) — 136 pp. 8. 1920. Geb. Kr. 3: 84.

Nicola Zanichelli.

Bologna.

Pincherle, S., Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche. P. 1. — XVII + 401 pp. 8. 1922. L. 45: —.

La variabile complessa. Funzioni di una variabile compl. Serie di potenze e funzioni analit. Prime proprietà gen. delle funzioni analit. Funzioni razionali e trascendenti elem. I teoremi di Cauchy. Applicazione dei teoremi di Cauchy. Ulteriori applic. dei teoremi di Cauchy. Funzioni intere. Il problema di Mittag-Leffler. Funzioni implicite. Funzioni algebr. Sviluppo di Lagrange e sue applicazione. Cenno sulla teoria delle funcioni ellitt. Espressioni analit. per le funzioni ellitt. Funzioni generatrici e determinanti. Funzioni ipergeometr. Funzioni Euleriane.

Divers.

Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der hamburgischen Universität. Herausg. von W. Blaschke, E. Hecke, J. Radon. Bd 1. — 350 + 11 pp. 8. 1922. (Verlag des Mathematischen Seminars, Hamburg.)

Abhandlungen von: H. Behnke, W. Blaschke, R. Furch, G. H. Hardy & J. E. Littlewood, E. Hecke, D. Hilbert, Tr. Nagel, A. Ostrowski, J. Radon, K. Reidemeister, G. Scheffers, P. Steinhagen, A. Winternitz.

Wagner, Paul, Der Energiebegriff. Entwurf zur Erkenntnisgrundlage der Ursachen aller Erscheinungen. Eine neue Weltanschauung, gestützt auf die wichtigsten Naturgesetze. — 96 pp. 8. 1922. Preis 1 Goldmark. (Selbstverlag d. Verfassers, Charlottenburg, Oranienstrasse.)

Anwendung d. Schwergesetze auf d. Mechanik d. Schwerkörper an d. Erdoberfläche. Begründung d. Energie-Stoff Begriffes. Umwandl. v. Energiestandsformen u. ihre Wirkung auf Schwerkörper. Anwendung d. Energiebegriffs auf bewusste Erscheinungen i. Sinne d. Kant'schen Kathegor. Imperativs u. d. Bedeut. d. relat. Standpunktes f. d. Bewertung aller Vorgänge.

BIBLIOGRAPHIE.

Aachener Verlags- u. Druckereigesellschaft.

BÜCHLER, ROBERT, Die Gesetze der Natur. — 32 pp. 8. 1923.

BÜCHLER, ROB., Lehrsätze über das Weltall mit Beweis in Form eines offenen Briefes an Professor Einstein. — 11 pp. 8. 1921.

Akadem. Verlagsgesellschaft.

Leipzig.

ARCHIMEDES, Die Quadratur der Parabel und über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen. Übers. u. mit Anmerkungen vers. v. Dr. ARTHUR CZWALINA-ALLENSTEIN. Mit 51 Fig. im Text. (Ostw. Klass. 203.) — 64 pp. 8. 1923.

ARCHIMEDES, »Über Spiralen». Übers. u. mit Anmerkungen u. einem Anhang versehen v. Dr. ARTHUR CZWALINA-ALLENSTEIN. (Ostw. Klass. 201.) — 71 pp. 8. 1922.

ARCHIMEDES, Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide. Übers. u. mit Anmerkungen versehen v. Dr. ARTHUR CZWALINA. (Ostw. Klass. 210.) — 73 pp. 8. 1923.

ARCHIMEDES, Kugel und Zylinder. Übers. u. mit Anmerkungen versehen v. Dr. ARTHUR CZWALINA-ALLENSTEIN. Mit 56 Fig. im Text. (Ostw. Klass. 202.) — 80 pp. 8. 1922.

FERMAT, PIERRE DE, Einführung in die ebenen und Körperlichen Örter. Aus dem Lateinischen übers. u. mit Einleitung u. Anmerkungen herausgeg. v. HEINRICH WIELEITNER. Mit 11 Fig. im Text. (Ostw. Klass 208.) — 22 pp. 8. 1923.

Félix Alcan.

Paris.

Brunschvicg, L., L'expérience humaine et la causalité physique. — XVI + 625 pp. 8. 1922.

Théories de l'expér. pure. L'organisation intellect. de l'expérience: période préscientif; ère de la mécanique; marche des idées phys. Constitution de la causalité phys. Phases de l'expér. humaine.

Christesco, Stéfan, La lumière relative et l'expérience de Michelson. Nouvel examen de l'expérience de Michelson en rapport avec les systèmes: Keppler—Newton—Laplace, Lorentz—Einstein—Minkowski, et l'organisation cellulaire des mondes. (La science universelle de l'énergie. 10.) — 48 pp. 8. 1923.

Anzengruber-Verlag, Brüder Suschitzky.

Leipzig. Wien.

Quint, Heinz, Die Relativitätstheorie. Ein Blick in die Welt Einsteins. — 96 pp. 8. [1923?]

H. Aschehoug & Co. & B. G. Teubner.

Kristiania. Leipzig.

Sophus Lie, Samlede avhandlinger. Ved bevilgning fra statens forskningsfond av 1919 og med understøttelse av Vidensskabsselskapet i Kristiania og Videnskapernes Akademi i Leipzig utgit av Norsk Matematisk Forening ved Friedrich Engel og Poul Heegaard. 3:e bind. — XVI + 789 pp. 8. 1922.

Astronomische Nachrichten.

Kiel.

See, T. J. J., Electrodynamic wave-theory of physical forces. Vol. II. New theory of the aether. In seven mathematical memoirs reprint. from the Astron. Nachr. 1920—1922.

Ernst Birscher, A.-G.

Bern & Leipzig.

Strasser, Hans, Einsteins spezielle Relativitätstheorie eine Komödie der Irrungen. — 59 pp. 8. 1923.

P. Blakiston's Son & Co.

Philadelphia.

Rougier, L., Philosophy and the new physics. An essay on the relativity theory and the theory of quanta. Author. transl. from the author's corrected text of »La matérialisation de l'énergie» by M. Masius. — VIII + 159 pp. 8. 1921.

Dualism of matter and energy. Mass and the relativity principle. Electromagn. dynamics. The electronic theory of matter. Inertia of energy. Weight of energy. Structure of energy. Conclusion.

Albert Blanchard.

Paris.

Eudoxe, Géométrie pure et géométrie descriptive. — 32 pp. 8. 1923. 2 fr.

Ricci, M. G., & Levi Civita, T., Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Réimpr. (Coll. de monographies scientif. étrangères.) — 75 pp. 8. 1923. 9 fr.

Algorithme du calcul diff. absolu. La géom. intrinsèque comme instrument de calcul. Applications analyt. Applications géométr. Applications mécan. Applicat. phys.

Albert Bonniers Förlag.

Stockholm.

Heckscher, E. F., Ekonomi och historia. — 344 pp. 8. 1922. Kr. 9: 50.

Ekonomi o. hist. Om orsakerna t. ekonom. olikheter. Naturahushållning. De europ. staternas finanser på Karl XII:s tid. Betyd. av vår histor. brukspolitik. Produktplakatet. Den gamla svenska sjöfartspolitikens grundlag. Lärdomar av 1800-talets svenska handelspolitik. Jonas Alströmer o. Alingsås manufakturverk. »Alltings återställelse»: de franska assignaternas avlösn. o. nutidens motsvar. problem.

Tallqvist, Hj., Nyare strålnings- och atomfysik. Med 117 fig. — VIII + 487 pp. 8. Tryckt i Helsingfors. 1923. Kr. 27: 50.

Elektricitetens gång genom vätskor, genom gaser. Katodstrålar. Kanalstrålar. Röntgenstrålar. Radiumstrålning. Modärn atomforskning. Värmestrålning.

Bowes & Bowes.

Cambridge.

Bromwich, T. J. I'A., Examples in optics. — 16 pp. 8. 1921. 2/-.

Wilhelm Braumüller.

Wien & Leipzig.

Poppovich, Nikola M., Die Lehre vom diskreten Raum in der neuren Philosophie. — 89 pp. 8. 1922.

Cambridge University Press.

Bohr, N., The theory of spectra and atomic constitution. Three essays. — X + 126 pp. 8. 1922. 7 s. 6 d.

On the spectrum of hydrogen. On the series spectra of the elements. The structure of the atom and the phys. and chem. properties of the elements.

Broad, C. D., Perception, physics and reality. An enquiry into the information that physical science can supply about the real. — XII + 388 pp. 8. 1914. 16 s.

Arguments against naïf realism indep. of causation. On causation; and on the arguments that have been used against causal laws. Phenomenalism. The causal theory of perception; with special ref. to the relations betw. the causes of perceptions and the reality of their objects. Laws of mechanics. Note on the measurement of the velocity of light and on the theory of relativity.

Campbell, Norman Robert, Modern electrical theory. Supplementary chapters. Chapter 15. Series spectra. — VII + 109 pp. 8. 1921. 10/6.

Preliminary. Regularity of spectral series. Origin of homogeneous radiation. States of an atom. Lines and components. Intensity of spectral lines. Band spectra.

Campbell, N. R., Physics. The elements. — VII + 565 pp. 8. 40 sh.

1. Propositions of science.

The subject matter of science. Nature of laws. Discov. and proof of laws. Explan. of laws. Theories. Chance and probability. Meaning of science. Science and philos.

2. Measurement.

Fundamental measurement. Physical number. Fractional and negative magnitudes. Numer. laws and derived magnitudes. Units and dimensions. Uses of dimensions. Errors of measurement; method. errors; errors of consistency and adjustment of observations. Mathemat. physics.

Eddington, A. S., The mathematical theory of relativity. — VII + 247 pp. 8. 1923. 20 sh.

Elementary principles. The tensor calculus. The law of gravitation. Relativity mechanics. Curvature of space and time. Electricity. World geometry.

Hobson, E. W., The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. 2d ed., revised throughout and enlarged. Vol. 1. — XV + 671 pp. 8. 1921. 45 s.

Number. Descriptive properties of sets of points. Metric properties of sets of points. Transfinite numbers and order-types. Functions of a real variable. The Riemann integral. The Lebesgue integral. Non-absolutely convergent integrals.

Neville, Eric Harold, Prolegomena to analytical geometry in anisotropic Euclidean space of three dimensions. — XXII + 368 pp. 8. 1922. 30 sh.

Measurement and simple projection. Vectors and rotors. Cartesian axes and vector frames. Complex space. Ideal space.

Neville, E. H., The fourth dimension. — 56 pp. 8. 1921.

Introd. Points. Steps and vectors. Veclines, vecplanes, and vecspaces. Determination of vecspaces by equations. Measurement; directions and angles. Lines, planes, and spaces. Translation, reflection, and rotation. Appendix.

Richardson, Lewis F., Forms whereon to write the numerical calculations described in weather prediction by numerical process. — 1922. 4. 2/-.

Soper, H. E., Frequency arrays. Illustrating the use of logical symbols in the study of statistical and other distributions. — 48 pp. 8. 1922. 3/6.

Soper, H. E., The numerical evalution of the incomplete B-function, or of the integral $\int_0^x x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ for ranges of x between 0 and 1. — 53 pp. 8. 1921.

Clarendon Press.

Oxford.

Eddington, Arthur Stanley, The theory of relativity and its influence on scientific thought. (The Romanes lecture 1922.) Del. in the Sheldonian theatre, 24 May, 1922. — 32 pp. 8. 1922.

Armand Colin.

Paris.

Simon, Pol, La recherche des lieux géométriques en géométrie analytique ... — VIII + 232 pp. 8. 1922. 18 frcs.

Franz Deuticke.

Leipzig & Wien.

Bauer, Hans, Mathematische Einführung in die Gravitationstheorie Einsteins nebst einer exakten Darstellung ihrer wichtigsten Ergebnisse. Mit 17 Abbild. — VIII + 97 pp. 8. 1922.

GROSSL, RICHARD, & BAUDISCH, HANS, Mechanik der flüssigen Körper. Ein Lehrbuch für höhere Gewerbeschulen und verwandte Lehranstalten. 2. Aufl. (Mechanik. Ein Lehrbuch ... herausg. von J. Jedlitschka. T. 4: Buch 1.) — IX + 280 pp. 8. 1922. Kr. 5: 60.

Lehre v. Gleichgewicht flüssiger Körper. Lehre von d. Bewegung flüssiger Körper. Wasserkraftmaschinen. Kreiselplumpen.

KOHLER, K. M., Das Exzentrizitätsprinzip als Korrelat zur Relativitätstheorie. Versuch zur Postulierung eines Kriteriums der absoluten Bewegung und einer Erklärung des Michelsonschen Effektausfalles. Mit 26 Fig. im Text. — VIII + 70 pp. 8. 1921.

Verlag der Deutschen Bücherei.

Posen.

COPPERNICUS, NICOLAUS, aus Thorn, Über die Umdrehungen der Himmelskörper. Aus seinen Schriften und Briefen. — 77 pp. 8. 1923.

J. Engelhorns Nachf.

Stuttgart.

GRAETZ, LEO, Die Atomtheorie in ihrer neuesten Entwicklung. Sechs Vorträge. Mit 41 Abbild. 4., verm. Aufl. — VIII + 100 pp. 8. 1922.

Die Moleküle u. Atome in d. Chemie u. d. kinet. Gastheorie. Die Atome u. Ionen bei d. elektr. Vorgängen in Flüssigkeiten u. Gasen. Atome d. Elektr. Zerfall d. Atome bei d. radioakt. Stoffen. Die Kerntheorie d. Atome. Spektra d. Röntgenstrahlen u. d. Kerntheorie d. Atome. Linienspektra u. d. Bohrsche Atommodell. Weit. Untersuch. üb. d. Bau d. Kerne, Atome, Ionen u. Moleküle. Zerlegung d. Kerne.

Wilhelm Engelmann.

Leipzig.

KOWALEWSKI, ARNOLD, Die Buntordnung. Mathematische, philosophische und technische Betrachtungen über eine neue kombinatorische Idee. H. 1. Entstehung und mathematischer Ausbau der Buntordnungslehre. — 53 pp. 8. 1922.

Finska vetenskapssocieteten.

Helsingfors.

Commentationes physico-mathematicae. T. 1. N:o 26—43. 8. 1923.

Årsbok. — Vuosikirja. 1. 1922—23. 8. 1923.

Frankh'sche Verlagshandlung.

Stuttgart.

HENSELING, ROBERT, Astronomie für alle. Abt. 1. Sternhimmel und Menschheit. Die Entstehung unseres astronomischen Weltbildes. Anleitung zu einfachen Himmelsbeobachtungen. — 80 pp. 8. 1923.

Die Sterne. Jahrbuch der Himmelskunde. Bd. 2. 1922/23. Herausg. von R. HENSELING. Mit 3 Kunstdrucktafeln u. zahlreichen Bildern im Text. — 124 pp. 8. 1922.

Aufsätze u. Verwandtes. Sternschau. Mitteil. aus Wiss. u. Leben. Büchertafel. Kunstdrucktafeln.

KAHN, FRITZ, Die Milchstrasse. Mit einem farb. Umschlag u. zahlreichen Abbild. nach Photogr. u. Zeichn. v. GEORG HELBIG, R. OEFFINGER u. and. 13. Aufl. — 80 pp. 8. 1922.

MEYER, M. W., Die Welt der Planeten. Neu bearb. von CUNO HOFFMEISTER. Mit zahlreichen Abbild. 23. Aufl. — 85 pp. 8. 1921.

MEYER, M. WILH., Sonne und Sterne. Mit zahlreichen Abbild. 39. Aufl. — 94 pp. 8. [1922.]

Gente, W., Wissenschaftlicher Verl.

Hamburg.

WALTE, WILHELM, Einstein, Michelson, Newton. Die Relativitätstheorie. Wahrheit und Irrtum. — 47 pp. 8. 1921.

Gauthier-Villars.

Paris.

ADHÉMAR, ROBERT D', Statique cinématique. (Éléments de mécanique à l'usage des ingénieurs.) — XI + 254 pp. 8. 1923. 16 fr.

Trajectoires rectilignes. Traject. curvilignes. La vitesse. Compos. des mouvements. Étude des vitesses. Principes de la mécanique. Théorie élém. des moments. Compos. des forces parallèles. Systèmes de forces parall. Théorie des moments par rapport à un plan. Le centre de gravité. Quelques expériences sur l'équilibre d'un solide. Étude élém. de quelques cas d'équilibre. Principe de Maupertuis et Lagrange. La théorie des couples. Expression analyt. des conditions d'équilibre d'un système plan et d'un point. Étude de l'équilibre en tenant compte du frottement. Mouvement curviligne. Étude de l'accélération. La définition de la force dynam. Masse et poids. Les équations de la dynam. d'un point matériel. Principe de d'Alembert. Equil. relatif. Les deux masses. La loi de Newton. Le travail mécan. Réduction des forces appli-

quées à un solide. Réduction d'un système de vecteurs glissants. Théorie gén. des moments linéaires et axiaux des vecteurs. Expression analyt. des conditions d'équilibre d'un solide. Le mouvement d'une fig. plane dans son plan. Centre instantané de rotation.

Bloch, Léon, Le principe de la relativité de la théorie d'Einstein. — 42 pp. 8. 1922. 3 fr. 50.

Chapel, Général, Éther-électricité-relativisme. Conférence du 22 Mars 1922, à Paris. (Conservatoire des arts et métiers). — 40 pp. 8. 1922.

Corps, Lieutenant-Colonel, La simultanéité générale et le temps universel. — 20 pp. 8. 1923.

Damiens, A., Les isotopes. — IX + 118 pp. 8. 1923. 12 fr.

Les isotopes radioactifs. La démonstration directe du phénomène d'isotopie. Le terme final des filiations radioactives. Généralisation de la notion d'isotopie. La mesure directe des masses atom. La spectrographie des masses. Discussions et conclusions.

Darboux, Gaston, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. 3. Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces. Nouveau tirage 1923. (Cours de géométrie de la Faculté des sciences.) — VIII + 512 pp. 8. 1894.

Esclangon, E., Les preuves astronomiques de la relativité. — 27 pp. 8. 1922.

Fournier, F. E., Vice-amiral, Carènes de formes nuisibles, ou favorables à leurs grandes vitesses; et résistances de l'eau à leur translation. — 27 pp. 8. 1923.

Fournier, Georges, La relativité vraie et la gravitation universelle. — VIII + 130 pp. 8. 1923. 7 fr.

Les principes de la science et les mathématiques. La force, la matière et la mécanique rationnelle. Les théories relativistes et la relativité vraie. Les champs d'influences et la propagation des actions. La gravitation universelle.

Grandillot, Maurice, Véritable interprétation des théories relativistes. — 17 pp. 8. 1922.

Haag, J., Cours complet de mathématiques spéciales. T. 4. Géométrie descriptive et trigonométrie. — VI + 149 pp. 8. 1923.

Généralités sur la représentation des lignes et des surfaces et sur la recherche de leurs intersections. Polyèdres, prismes et pyramides. Cônes et cylindres. Sphère. Surfaces de révolution. Surface gauche de révolution. Quadriques quelconques. Projections cotées; Surfaces topograph. Notions de perspective. Résolution des trièdres.

Propriétés gén. des fonctions circulaires. Résolution des triangles. Note sur la construction des coniques dans les épures.

HUYGHENS, CHRISTIAN, Traité de la lumière. (Les maîtres de la pensée scientifique. Collection de mémoires publ. par les soins de M. Solovine.) — X + 155 pp. 8. 1920.

MARAIS, HENRI, Introduction géométrique à l'étude de la relativité. — IX + 191 pp. 8. 1923. 15 fr.

Remarques sur l'emploi des indices et sur les formes algébr. Définition de l'espace euclidien. L'espace eucl. Tenseurs. Applications. Notions sur l'univers de la relativité restreinte. Multiplicités continues. Espaces de Riemann. Propriétés d'un espace de Riemann. Applications. Espaces de Riemann et relativité généralisée. Espaces de Weyl. Angles et segments. Sur le produit scalaire de deux vecteurs. Calcul des symboles à trois indices dans un espace à courbure constante.

Index generalis. General year book of the universities, high schools, academies, archives, libraries, scientific institutions, botanical and zoological gardens, museums, observatories and learned societies. Publ. under the dir. of R. DE MONTESSUS DE BALLORE. — VI + 2111 pp. 8. 1922—1923.

PICARD, ÉMILE, La théorie de la relativité et ses applications à l'astronomie. — 27 pp. 8. 1922.

POINCARÉ, H., Calcul des probabilités. Rédaction de A. QUIQUET. 2e éd., revue et augmentée par l'auteur. Nouveau tirage 1923. (Cours de la faculté des sciences de Paris.) — 333 pp. 8. 1912.

Définition des probabilités. Probabil. totales et composées. L'espérance mathémat. Le théorème de Bernoulli. Application de la formule de Stirling. La loi de Gauss et les épreuves répétées. Probabil. du continu. Applications diverses. Probabil. des causes. La théorie des erreurs et la moyenne arithmét. Justification de la loi de Gauss. Erreurs sur la situation d'un point. Méthode des moindres carrés. Calcul de l'erreur à craindre. Théorie de l'interpolation. Questions diverses.

ROY, LOUIS, L'électrodynamique des milieux isotropes en repos d'après Helmholtz et Duhem. (Scientia. Série phys.-mathém. N:o 40.) — 94 pp. 8. 1923. Fr. 10.

Généralités. L'induction électrodynam. et électromagn. L'énergie interne et les lois de l'aimantation. Les actions électrodynam. et électromagnét. Les équations gén. de l'électrodynamique.

ROY, MAURICE, Théorie des surfaces portantes. La théorie de Prandtl. (Scientia. Série phys.-mathém. N:o 39.) — 129 pp. 8. 1922. Fr. 12.

P. 1. Théorie des surfaces portantes. Introd. Exposé de la théorie. Détermination du potentiel polytrope autour d'un profil. Calcul de la portance d'un profil.

P. 2. Problèmes de la théorie linéaire.

SMITS, A., La théorie de l'allotropie. Trad. par J. GILLIS. Avec 239 fig. dans le texte. — XIX + 523 pp. 8. 1923. 55 frcs.

Partie théorique. Principes fondam. et exposé de la théorie. Considérations détaillées sur la position des courbes d'équilibre interne des phases gazeuses et condensées. Systèmes pseudo-ternaires et systèmes à plus de trois pseudo-composants. Substances allotrop. en présence d'un dissolvant. Systèmes comprenant une phase de cristaux liquides. Phénomènes que la théorie de l'allotropie permet de prévoir. Application de la théorie de l'allotropie aux équilibres électromoteurs. Des équilibres photo- et électro-chim. Interprétation des spectres de Rayons X des cristaux.

Partie expérimentale. Vérification de la théorie par voie non électr. Vérification de la théorie dans le domaine de l'électrochimie.

THIRRING, H., L'idée de la théorie de la relativité. Trad. de l'allemand par M. SOLOVINE. (Science et civilisation. Collection d'exposés synthét. du savoir humain.) — 186 pp. 8. 1923. Fr. 8.

La théorie de la relativité restr. La théorie de la relativité gén.

Hugo Gebers Förlag.

Stockholm.

NÖRLUND, N. E., Bland siffror och tal. Populära uppsatser. Till svenska av ROBERT LARSSON. — 113 pp. 8. 1923. Kr. 3: —

Förord. De exakta vetenskapernas metod. Talens historia. Olika slags tal. Geometri. Niels Bohrs atomteori. Månen. Solen. Förmörkelser.

Vetenskapen och Livet. — No. 6. Dec. 1922. Årg. VII.

EGNÉR, H., Från Nobelpristagarnas arbetsfält. BRILLOUIN, L., Einsteins teorier och deras experimentella bekräftelse. THIRRING, H., Rotationsrörelsernas relativitet i den einsteinska gravitationsteorien.

1923. Årg. VIII. Pris kr. 1: 50. No. 1. Jan.

Vetenskapens klassiker: Dmitri Mendelejev.

No. 2. Febr.

C. LORDIER, Electriciteten avslöjar malmerna i jorden. L. FRANÇOIS, Vad man skall veta om den trådlösa telefonen. Vetenskapens klassiker: John Dalton.

No. 3. Mars.

P. J. GRANVALIER, Praktiska metoder för vattenmängdsmätningar. G. HOUARD, Aerodynamikens lagar tillämpade på automobilen.

No. 4. April.

E. RIESENFELD, Kvävefrågan och dess betydelse för Sverge. L. FRANÇOIS, Vad man skall veta om den trådlösa telefonen. G. H., Automatisk tidsreglering med elektriska vågor. G. HOUARD, Ett aeroplan med variabla vingar.

No. 5. Maj.

J. Marchand, Prismakikaren och dess framställning. J. B., Ett underjordiskt laboratorium för analysering av tunnelluften.

No. 6. Juni.

A. B., Optisk telegrafering med ultravioletta strålar. E. Riesenfeld, Kvävefrågan och dess betydelse för Sverge. L. François, Vad man skall veta om den trådlösa telefonen.

No. 7. Juli.

Herbelin, A., Röntgenspektra avslöja ämnenas sammansättning.

No. 8. Aug.

V. L., Einsteins teori bekräftad. V. L., Jordens och månens utveckling. Desbordes, P., Luftens erövring med helikoptären. Bourgeois, A., Trådlös ljustelefon.

Ginn & Co.

Boston.

Beman, Wooster Woodruff & Smith, David Eugene, Famous problems of elementary geometry. The duplication of the cube. The trisection of an angle. The quadrature of the circle. Author. transl. of F. Klein's Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie ausgearb. von F. Tägert. — IX + 80 pp. 8. 1897.

Byerly, W. E., An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical, and ellipsoidal harmonics, with applications to problems in mathematical physics. — IX + 287 pp. 8. 1893. $ 3.00.

Crenshaw, Bolling H. & Derr, Homer M., Plane trigonometry. — V + 157 pp. 8. 1923.

Definitions. Angular measurement. Trigonom. functions of an acute angle. Solution of the right triangle. Functions of any angle. Functions of the sum or the difference of two angles. Logarithms. Oblique triangles. Tables.

Eisenhart, L. P., A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. — XI + 476 pp. 8. 1909. $ 5.00.

Glenn, Oliver E., A treatise on the theory of invariants. — X + 245 pp. 8. 1915.

Principles of invariant theory. Properties of invariants. Processes of invariant theory. Reduction. Gordan's theorem. Fundamental systems. Combinants and rational curves. Seminvariants. Modular variants. Invariants of ternary forms.

GOURSAT, ÉDOUARD, A course in mathemathical analysis. Differential equations being part 2 of vulme 2. Transl. by Earle RAYMOND HEDRICK and OTTO DUNKEL. — VIII + 300 pp. 8. 1917. $ 3.50.

Elementary methods of integration. Existence theorems. Linear differ. equations. Non-linear differ. equations. Partial differ. equations of the first order.

GRANVILLE, W. A., Plane and spherical trigonometry and four-place tables of logarithms. — XI + 264 + 38 pp. 8. 1909. $ 1.84.

HAWKES, HERBERT E., Higher algebra. — V + 222 pp. 8. 1913. $ 1.88.

HAWKES, H. E., Advanced algebra. — XIII + 285 pp. 8. 1905. $ 1.88.

JEANS, J[AMES] H[OPWOOD], An elementary treatise on theoretical mechanics. — VIII + 364 pp. 8. 1907. $ 3.50.

LING, G. H., WENTWORTH, G., & SMITH, D. E., Elements of projective geometry. (Wentworth-Smith mathematical series.) — VI + 186 pp. 8. 1922. $ 2.80.

General theory. Applications. Hist. of projective geometry.

PAGE, LEIGH, An introduction to electrodynamics. From the standpoint of the electron theory. — VI + 134 pp. 8. 1922. $ 2.00.

Introd. Elem. of vector analysis. The principle of relativity. The retarded field of a point charge. The simultan. field of a point charge. The dynam. equation of an electron. Equations of the electromagn. field. Radiation. Electromagn. fields in material media. Electromagnetic waves in material media.

PEIRCE, B. O., Elements of the theory of the Newtonian potential function. 3d, revised and enlarged ed. — XIII + 490 pp. 8. $ 4.25.

Attraction of gravitation. The Newtonian potential function in the case of gravitation. The Newtonian potential function in the case of repulsion. Properties of surface distributions. Green's theorem. Vectors. Attraction of ellipsoids. Logarithmic potential functions. Elements of the mathemath. theory of electricity.

PEIRCE, B. O., A short table of integrals. 2nd rev. ed. — 152 pp. 8. 1910.

RUTLEDGE, GEORGE, Fundamental topics in the differential and integral calculus. — VIII + 252 pp. 8. 1923. $ 2.20.

Variables, functions, graphs. Continuity of a function & of its graph. Derivate of a polymonial; slope of a graph. The sine function & its derivative. The square-root function & its deriv. Differentials. Use of the differ. as an approximation to the increment in pract. problems. The principle of related rates. Velocity, acceleration. Derivation of a product, or quotient. Deriv. of a function of a function. Differential

of length; volocity & acceleration vectors. Properties of linear, quadratic, & cubic polynom. graphs. The square root of a quadr. polynomial. Maxima & minima problems leading to polynomials or to quotients of polynomials. Maxima and minima problems leading to other functions than polynomials and quotients of polynomials. Summation of differentials; definite integral; area. Length; volume by summation of cylindr. »slices». The integration process in general. Summation by substitution. The logarithm function. Exponential function. Hyperbolic functions. Inverse circular & hyperbolic functions. Derivat. equations. Differ. equations. What is calculus?

SMITH, PERCEY F., & LONGLEY, WILLIAM RAYMOND, Theoretical mechanics. (Mathemat. texts for colleges ed. by P. F. Smith.) — X + 288 pp. 8. 1910.

WENTWORTH, G., & SMITH, D. E., Academic algebra. (Wentworth-Smith mathematical series.) — VI + 458 pp. 8. 1913. $ 1.48.

WOODS, F. S., Higher geometry. An introduction to advanced methods in analytic geometry. — X + 423 pp. 8. 1922.

1. Gen. concepts and one-dimensional geometry.

Gen. concepts. Ranges and pencils. Projectivity.

2. Two-dimensional geometry.

Point and line coödinates in a plane. Curves of 2d order and 2d class. Linear transformations. Projektive measurement. Contact transformations in the plane. Tetracyclical coördinates. A spect. system of coördinates.

3. Three-dimensional geometry.

Circle coördinates. Point and plane coördinates. Surfaces of 2d order and of 2d class. Transformations. The sphere in Cartesian coördinates. Pentaspher. coördinates.

4. Geometry of four and higher dimensions.

Line coördinates in three-dimensional space. Sphere coördinates. Fourdimensional point coördinates. Geometry of n dimensions.

Jul. Gjellerups Forlag.

København.

BOHR, NIELS, Om Atomernes Bygning. (Foredrag holdt i Stockholm d. 11. December 1922 i Anledn. af Forfatterens Modtagelse of Nobelprisen for Fysik for Aaret 1922. Særtryk af Fysik Tidsskrift.) — 44 pp. 8. 1923.

NÖRLUND, N. E., Videnskabelige Causerier. — 125 pp. 8. 1923.

De eksakte Videnskabers Methode. Tallenes Historie. Forskellige Slags Tal. Geometri. Niels Bohrs Atomteori. Maanen. Solen. Formørkelser.

SÖRENSEN, S. P., Opgaver i matematik for gymnasiet. — 30 pp. 8. 1923.

Henri Grand.

Hamburg.

Riebesell, P., Steuermathematik. Die Fehler in den Reichssteuertarifen. Mit 16 Abbild. im Text. — 32 pp. 8. 1922.

Harrison & Sons.

London.

International research council. Second assembly held at Brussels, July 25th to July 29, 1922. Report of proceedings ed. by Arthur Schuster. — (3) + 145 pp. 8. 1923.

Paul Haupt.

Bern.

Strasser, H., Die Grundlagen der Einstein'schen Relativitätstheorie. Eine kritische Untersuchung. — 110 pp. 8. 1922.

Einleitung. Unsere Relationsformeln u. d. Lorentz-Einstein'schen Transformationsformeln. Konstanz d. Lichtgeschwindigk. Variabilität d. Zeiten u. Längen in d. spez. Relativitätstheorie. Angebl. indirekte Beweise f. d. Richtigk. d. Einsteinschen spez. Relativitätstheorie. Zusammenfassung.

Librairie J. Hermann.

Paris.

Andoyer, H., Cours d'astronomie. (Faculté des sciences de Paris.) Partie 1. Astronomie théorique. 3e éd. entièrement refondue. — 455 pp. 8. 1923.

Astronomie théorique. Trigonométrie sphérique. Quelques développements en série. Coordonnées et problèmes rel. aux coordonnées. La terre. Coordonnées astronom. Temps. Mouvement diurne. Réfraction astronom. Parallaxe. Aberration. Notions de mécanique céleste. Précession et nutation. Positions apparentes des astres. Mouvement du soleil. Temps. Mouvem. géocentr. des planètes. Mouvem. de la lune et des satellites. Éclipses de lune. Éclipses de soleil. Occultations d'étoiles par la lune. Passages de Mercure et de Vénus sur le soleil. Détermination d'une orbite keplérienne par trois observations rapprochées. Note sur le calendrier.

Bauer, Edmond, La théorie de Bohr. La constitution de l'atome et la classification périodique des éléments. Conférence faite le 19 février 1921 et publ. avec des compléments sur les travaux récents. (Publ. de la Société de chimie-physique 10.) — 52 pp. 8. 1922.

DRUMAUX, PAUL, L'évidence de la théorie d'Einstein. — 72 pp. 8. 1923.

Les incohérences de la physique. La relativité restreinte. La relativité généralisée.

HUMBERT, PIERRE, Introduction à l'étude des fonctions elliptiques à l'usage des étudiants des facultés des sciences. — 38 pp. 8. 1922.

Formation d'une fonction ellipt. Généralités sur les fonctions ellipt. Propriétés des fonctions de Weierstrass.

POMPIGNAN, ASSIER DE, Note sur le calcul tensoriel. — 32 pp. 8. 1923.

THOMSON, SIR J. J., Les rayons d'électricité positive et leur application aux analyses chimiques. Trad. d'après la 2e éd. anglaise par R. FRIC, A. CORVISY. — X + 223 pp., 9 pl. 8. 1923.

Rayons d'électricité positive. Propagation rectiligne des rayons positifs. Cathodes doubles et creuses. Nature des rayons posit., leur déviation par les forces électr. et magnét. Déviation électrostat. d'une particule. Expér. de Wien montrant les déviations électr. et magnét. et expér. de l'auteur sur les rayons posit. Expér. à de très basses pressions. Méthode des cathodes chauffées. Examen crit. des photographies. Particules chargées négativement. Atomes portant deux charges posit. ou plus. Groupement des vitesses des rayons posit. autour de certaines valeurs déterminées. Etc., etc.

Otto Hillmann.

Leipzig.

ALLIATA, GIULIO, Die neueste Orientierung der Physik. 1. Sinn und Bedeutung des Michelsonschen Versuches. 2. Zur Theorie der Elektronenröhre. — 8 pp. 8. 1923.

ALLIATA, GIULIO, Die Radioaktivität im Weltbild der Äthermechanik. — 14 pp. 8. 1923.

ALLIATA, GIULIO, !Negative Elektronen! (Kritische Betrachtung.) — 16 pp. 8. 1922.

ALLIATA, GIULIO, Das Wesen der Kraft und die Einheit des Weltbildes. — 16 pp. 8. 1922.

ALLIATA, GIULIO, Die Planetenanomalien im Weltbild der Äthermechanik. — 16 pp. 8. 1922.

ALLIATA, GIULIO, Das Weltbild der Aethermechanik. (Skizze zum Weltbild.) Mit 4 Textfiguren. — 56 pp. 8. 1922.

MOKRZYCKI, GUSTAV, Relativisierung des Kausalitätsbegriffes. — 30 pp. 8. 1922.

PETRASCHEK, K. O., Der Grundwiderspruch in der speziellen Relativitätstheorie und seine Folgen. — 76 pp. 8. 1922.

RICHTER-BOZEN, GUSTAV, Kritik der Relativitätstheorie Einstein's. — 16 pp. 8. 1921.

S. Hirzel.

Leipzig.

KOPFF, AUGUST, Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie. 2., verb. Aufl. 3 Fig. — 204 pp. 8. 1923.

Spezielle Relativitätstheorie. Allgem. Relativitätstheorie.

LENARD, P., Über Äther und Uräther. 2., verm. Aufl. mit einem Mahnwort an deutsche Naturforscher. — 66 pp. 8. 1922.

Bisherige Entwicklung d. Äthervorstellung. Äther u. Uräther. Optische u. elektr. Erfahrung.

STARK, J., Prinzipien der Atomdynamik. Teil 1. Die elektrischen Quanten. 2., umgearb. Aufl. — X + 95 pp. 8. 1922.

Prinzip. Methoden d. physikal. Erkenntnis. Atomist. Struktur d. elektr. Ladung u. d. elektromagnet. Medien. Die Masse u. d. Durchmesser d. elektr. Quanten. Die elektr. Quanten als Bausteine d. chem. Atome. Energie u. Innen-Bewegung elektr. Quanten.

Hofbauersche Buchhandl.

Elberfeld.

MÄRTENS, F., Das Wesen der elektrischen Erscheinungen. Die elektrische Strömung. Das elektrische Feld. Erklärt im wahren Sinne einer voraussetzungslosen Wissenschaft. — 32 pp. 8. 1922.

The John Hopkins Press.

Baltimore.

MINER, JOHN RICE, Tables of $\sqrt{1-r^2}$ and $1-r^2$ for use in partial correlation and in trigonometry. — 49 pp. 8. 1922.

MURNAGHAN, FRANCIS D., Vector analysis and the theory of relativity. — X + 125 pp. 8. 1922.

The tensor concept. The algebra of tensors. The metr. concept. The resolution of tensors. Integral invariants and moving circuits. The absolute differential calculus. Problems in relativity.

Max Jänecke.

Leipzig.

Düsing, K., Einstein's Relativitätslehre. Allgemein verständlich dargest. — 63 pp. 8. 1922.

Allg. Relativität. Geschwindigk. d. Lichtes. Besondere Relat. Folgerungen. Anhang.

Kabritzsch & Mönnich, Univ.-Verlagsbuchhandl.

Schön, Franz, Unser naturwissenschaftliches Weltbild (Stoff und Energie). Eine Einführung in das naturwissenschaftliche Denken und Anschauen als eine Grundlage für jedes naturwissenschaftliche Studium. T. 1. Einführung u. allgem. Grundbegriffe. — 56 pp. 8. 1920. — T. 2. Das Wesen der Materie und der Wärme. — 72 pp. 8. 1922.

S. Lattes & Co.

Torino & Genova.

Boggio, T., Calcolo differenziale con applicazioni geometriche. Vol. 1. Funzioni di una variabile. — XI + 611 pp. 8. 1921.

Nozioni prelim. Limite super. ed infer. Limite e continuità delle funzioni. Derivate delle funzioni. Tangenti alle curve. Applicazioni analit. Derivate successive. Applic. geometr.

Burali-Forti, C., Geometria descrittiva. Vol. 1. XV + 170 + 19 tavole; Vol. 2. XI + 144 + 19 tavole. 8. 1921—22.

1. Assonometria. — 2. Proiezione quotata. Proiezione. Monge. Prospettiva.

Burali-Forti, C., & Boggio, T., Meccanica razionale. — XII + 425 pp. 8. 1921.

Introd. Vettori. Omografie vettoriali. Isomerie vettoriali e rotori.

1. Cinematica. Moto di un punto. Moti finiti dei corpi rigidi. Moti continui e instant. di corpi rigidi. Moti relativi. Applicazioni.

2. Statica e dinamica. Modello meccanico. Centri di massa e momenti d'inerzia. Statice dei corpi rigidi. Curve funicolari. Dinamica dei sistemi materiali. Applic. varie.

Insolera, F., Corso di matematica finansiaria. — VIII + 456 pp. 8. 1923. Lire 60: —.

Parte prelim.: La teoria matemat. della sopravvivenza. Parte gen.: I problemi gen. della matematica finanziaria. Parte spec.: Probl. speciali della matematica finanziaria.

Lauppsche Buchhandlung.

Tübingen.

Zehnder, L., Der Aufbau der Atome aus Uratomen. Vortrag, gehalten in der Kantgesellschaft, Ortsgruppe Basel am 12. Dezember 1921. — 23 pp. 8. 1922.

Casa Editrice »Leonardo da Vinci«.

Roma.

Mieli, Aldo, Pagine di storia della chimica. — XXII + 254 pp. 8. 1922. L. 18.

I periodi della storia della chimica. Le teorie delle sostanze nel periodo filosofico. Origine e sviluppo dell' alchimia. La trasmutazione dei metalli. Gli alchim. nel rinascimento.

Beppo Levi.

Parma.

Levi, Beppo, Abbaco da 1 a 20. Il primo libro d'aritmetica. — 60 pp. 4.

Macmillan & Co.

London.

Bryan, G., H., Mathematical tables. — 28 pp. 8. 1922.

Herman Meusser.

Berlin.

Schlüter, H., Die höhere Mathematik eine gemeinverständliche Darstellung der Elemente mit 30 Abbild. u. zahlreichen Beispielen. 2., verb. Aufl. — 51 pp. 8. 1922.

Kasa im. Mianowskicgo.

Warszawa.

Poradnik dla samouków. Wskazówki metodyczne dla studjujących poszczególne nauki. Wydawnictwo A. Heflicha i St. Michalskiego z zapomogi kasy imenia d-ra J. Mianowskiego. T. 1. Wyd. nowe. — XXXIX + 618 pp. 8. 1923.

Avhandlingar av: S. Michalski, J. Łukasiewicz, Z. Janiszewski, S. Kwietniewski, W. Sierpiński, S. Zaremba, S. Mazurkiewicz.

T. 2. Fizyka, gieofizyka, meteorologja. Wyd. nowe. — 526 pp. 8. 1917.

Avhandlingar av: M. Smoluchowski, M. P. Rudzki, R. Merecki.

T. 3. Matematyka. Uzupełnienia do tomu pierwszego. — VIII + 188 pp. 8. 1923.

Avhandlingar av: S. Mazurkiewicz, S. Kwietniewski, S. Zaremba, W. Sierpiński, J. Sleszyński, K. Żorawski, W. Przybyłowicz.

Verl. F. Märtens.

Elberfeld.

Märtens, F., Die Welt als Wirkung strahlender Energien. H. 1—3. — 32 + 16 + 64 pp. 8. 1922.

Natur och Kultur.

Stockholm.

Hollingworth, H. L., & Poffenberger, A. T., Tillämpad psykologi ... D. 1. 160 pp. — D. 2. 138 pp. 8. 1923. Kr. 2,25.

Kant, Immanuel, Tanke och hälsa. Om själens makt att genom blotta föresatsen bliva herre över sina sjukliga känslor. Utg. av Prof. C. W. Hufeland. Förord av Med. Dr. Jakob Billström. Till svenska av Olof Rabenius. 2:a uppl. — 62 pp. 8. 1923.

A.-B. Nordiska Bokhandeln.

Stockholm. (I distribution.)

Nordenson, Harald, Einsteins relativitetsteori och den fysikaliska verkligheten. — 71 pp. 8. 1922. Kr. 2,50.

Relativitetsteoriens problemställning. Det Einsteinska tidsbegreppet. Den Einsteinska relativitetsteoriens formler och deras experimentella bekräftelse.

P. A. Norstedt & Söners Förlag.

Stockholm.

Cassel, Gustaf, Penningväsendet efter 1914. — V + 356 pp. 8. 1922. Kr. 8: 50.

Guldmyntfotens övergivande. Tillskap. av artif. köpkraft. Prisstegringen. Ökningen av kvantiteten betalningsmedel. Aritmet. uttryck för cirkulationsökning o. prisstegr. Varuknapphetens betyd. för prisstegr. Inflationens inverkan på guldet. Guldspärrningen. Diskontopolitiken. Växelkurserna. Avvikelser fr. köpkraftspariteterna. Populära missuppfattningar. Anknytn. t. tidigare växelkursteorier. Inflationen efter kriget. Reformprogram. Deflationsfrågan i Sverige. Deflationens fakt. fortgång o. verkningar. Cirkulationens dröjande tillbakagång. Stabiliseringsproblemet.

Heckscher, Eli F., Gammal och ny ekonomisk liberalism. — 99 pp. 8. 1921. Kr. 2: —.

HENDERSON, H. D., Tillgång och efterfrågan. Med förord av J. M. KEYNES. — 208 pp. 8. 1922. Kr. 4: —.

Den ekonom. världen. De allm. lagarna f. tillgång o. efterfrågan. Nyttan o. konsumtionsgränsen. Kostnaden o. produktionsgränsen. Förenad efterfrågan o. tillgång. Jorden. Risker o. företag. Kapitalet. Arbetet. De reala produktionskostnaderna.

MATTSON, RUBEN, Funktionslära för realgymnasiet. — 78 pp. 8. Kr. 1: 85.

SILVERSTOLPE, G. WESTIN, Guldet under och efter världskriget. — 242 pp. 8. 1922. Kr. 4,75.

Verlag R. Oldenbourg.

München & Berlin.

OBERTH, HERMANN, Die Rakete zu den Planetenräumen. — 92 pp. 8. 1923. Kr. 1: 40.

Arbeitsweise u. Leistungsfähigkeit. Beschreibung d. Modells B. Diskussion d. techn. Durchführung. Zweck u. Aussichten.

Verlag für Kunst & Wissenschaft, Albert Otto Paul.

Leipzig.

HENNING, F. G., Astrophysik. (Physik der Gestirne.) Mit 11 Abbild. — 61+16 pp. 16:o.

Hermann Sack Verlag.

Berlin W. 35.

WITTIG, H., Die Geltung der Relativitätstheorie. Eine Untersuchung ihrer naturwissenschaftlichen Bedeutung. — 67 pp. 8. 1921.

Einl.: Notwendigkeit schärfster Untersuchung d. Geltung d. Theorie. — Spez. Theorie: Analyse d. Zeit- u. Längentheorie. Neue Lösung: die »nachschleppende» Beobachtung. Anwend. derselben auf d. Relativierung v. Masse u. Energie. — Allgem. Theorie: Ausschaltung d. Zeit- u. Raum-Relativierung. Aufstellung d. Geltungsgesetzes d. physikal. Relat. bewegter Systeme. — Schlusswort: Aufhebung d. Widerspruches zwischen Fizeau- u. Michelson-Versuch durch Annahme d. Gravitationsäthers. Fiktivität d. Relativierung v. Raum u. Zeit.

Éditions Robert Sand.

Rue de la Montagne, Bruxelles.

DUPRÉEL, EUGÈNE, La légende socratique et les sources de Platon. — 450 pp. 4. 1922. 30 frcs.

La doctrine socratique. La figure socratique. La postérité socratique. Conclusion.

Theodor Steinkopff.

Dresden & Leipzig.

Landé, A., Fortschritte der Quantentheorie. (Wissensch. Forschungsberichte. Naturwissenschaftl. Reihe. Bd. 5.) — XI+91 pp. 8. 1922.

Allgem. Quantelungsmethoden. Das Wasserstoffatom nach d. Separationsmethode. Systeme mit mehreren Elektronen. Das Korrespondenzprincip. Die Bandenspektren. Störung durch äussere Felder. Chem. Konstante d. Gase. Bohr's »Quantentheorie d. Linienspektra».

Julius Springer.

Berlin.

Bieberbach, L., Theorie der Differentialgleichungen. Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen. (Die Grundlehren der mathemat. Wissenschaften ... herausg. von R. Courant. Bd. 6.) — VIII+320 pp. 8. 1923.

1. Gewöhnl. Diff.-Gleich. 1. Ordn.

Elem. Integrationsmethoden. Die Methode d. sukzess. Approximationen. Diskussion. d. Verlaufs d. Integralkurven. Diff.-Gleich. 1. Ordn. i. komplexen Geb.

2. Gewöhnl. Diff.-Gleich. 2. Ordn.

Existenz d. Lösungen. Elem. Integrationsmethoden. Diskussion d. Verlaufes d. Integralkurven. Lineare Diff.-Gleich. 2. Ordn. i. komplexen Geb.

3. Partielle Diff.-Gleichungen 1. Ordn.

4. Partielle Diff.-Gleichungen 2. Ordn.

Allgemeines. Hyperbol. Diff.-Gleichungen. Ellipt. Diff.-Gleichungen. Parabol. Diff.-Gleichungen.

Blaschke, Wilhelm, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. 2. Affine Differentialgeometrie. Bearb. von Kurt Reidemester. (Die Grundlehren d. mathem. Wissenschaften in Einzeldarstellungen ... Herausg. von R. Courant. Bd. 7.) — IX+259 pp. 8. 1923.

Ebene Kurven i. Kleinen. Ebene Kurven i. Grossen. Raumkurven. Flächentheorie niederer Teil. Allgem. Flächentheorie. Extreme bei Flächen. Besondere Flächen.

Klein, Felix, Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. 3. Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, hyperelliptische und Abelsche Funktionen, Riemannsche Funktionentheorie und automorphe Funktionen. Herausg. von R. Fricke, H. Vermeil und E. Bessel-Hagen (von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen). — IX+774+36 pp. 8. 1923. Kr. 25: 20.

Nernst, W., Das Weltgebäude im Lichte der neueren Forschung. — 62 pp. 8. 1921.

Fixierung d. Probleme. Das Weltgebäude im Lichte d. neueren Forschung. Ergänzungen.

Speiser, Andreas, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie. (Die Grundlehren der mathemat. Wissenschaften ... Herausg. von R. Courant. Bd. 5.) — VIII + 194 pp. 8. 1923.

Grundlagen. Normalteiler u. Faktorgruppen. Abelsche Gruppen. Konjugierte Untergruppen. Sylowgruppen und p-Gruppen. Kristallograph. Gruppen. Permutationsgruppen. Automorphismen. Monomiale Gruppen. Darstellung d. Gruppen durch lineare homogene Substitutionen. Gruppencharaktere. Anwend. d. Theorie d. Gruppencharaktere. Aritmeth. Untersuch. über Substitutionsgruppen. Gruppen v. gegebenem Grade. Gleichungstheorie.

Libreria di scienze e lettere.

Roma.

Tilgher, Adriano, Relativisti contemporanei ... Pref. di Mario Missiroli. 3ª ed. rived. ed accresciuta. — 79 pp. 8. 1922.

Hans Vaihinger. Albert Einstein. Louis Rougier e Oswald Spengler. L'idealismo attuale. Relativismo e rivoluzione.

Teknologernas Handelsförenings Förlag.

Stockholm.

Malmquist, A. J., Föreläsningar i matematik. Red. av Tarras Sällfors. (Teknologernas handelsför:s publ. n:o 55. Ser. A, n:o 23.) — XVI + 704 pp. 8. 1923. 50 kr.

Plan analyt. geom. Determinantteori. Differ.-kalkyl. Derivator. Tillämpn. av derivatan. Utveckl. av funkt. i serier jämte tillämpn. Oändl. serier. Obest. uttryck. Funkt. av flera oberoende variabler. Differentialer. Beröring o. krökning. Ekvationsteori. Komplexa tal. Integralkalkyl. Härledn. av integr.-begreppet. Hyperbol. funkt. Beräkn. av obest. integraler. Beräkn. av bestämda integr. Geom. användn. av integralkalk. Integr.-kalkylens användn. i statiken f. tyngdpunktsberäkn. Teori för bestämda integr. Trigonometr. serier. Differentialekvationer av 1. ordn. Diff.-ekv. av högre ordn. Variationskalkyl. Integr. av funkt. av en komplex variabel. Rymdanalys. Punkten, räta linjen och planet. Några viktigare ytor. Tangenter o. tangentplan. Vridn. av koordinatsystem. Allmän teori för 2.-gradsytor. Undersökn. av kurvor i rymden. Teori för envelopper i rymden. Ytors krökning. Beräkn. av volymer, ytor o. tyngdpunkter.

B. G. Teubner.

Leipzig & Berlin.

KIRCHBERGER, P., Mathematische Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie. (Mathemat.-physikal. Bibliothek. Hrsg. von W. Lietzmann und A. Witting. 40.) — IV + 54 pp. 8. 1921. Kr. 0,95.

METH, PAUL, Theorie der Planetenbewegung. 2., umgearb. Aufl. (Mathemat.-physikal. Bibliothek. Hrsg. von W. Lietzmann und A. Witting. 8.) — [4] + 54 pp. 8. 1921. Kr. 0,95.

LÜSCHER, H., Photogrammetrie (Einfache Stereo- und Luftphotogrammetrie). Mit 78 Fig. im Text und auf 2 Tafeln. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd. 612.) 128 pp. 8. 1920.

Photogrammetrie od. einfache Bildmessung. Stereophotogrammetrie od. Raumbildmessung. Luftphotogrammetrie.

OPPENHEIM, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. T. 1. Vom Altertum bis zur Neuzeit. 3. Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bdch. 444.) — 136 pp. 8. 1920.

Anfänge d. Astronomie. Astr. bei d. Griechen. Blütezeit d. griech. Astr. Mittelalter. Neuzeit. Neuste Zeit.

— — T. 2. Moderne Astronomie. 2. Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bdch. 445.) — 130 pp. 8. 1920.

Störungsproblem. Stabilitätsproblem. Kometenproblem. Problem d. Gestalt d. Himmelskörper. Problem d. Verteilung u. d. Bewegung d. Fixsterne i. Raume. Das Newtonsche Gravitationsgesetz.

PETER, BRUNO, Die Planeten. 2. Aufl. durchges. von HANS NAUMANN. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd. 240.) — 125 pp. 8. 1920.

SCHAU, A., Statik. 2. Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd. 828.) — 100 pp. 8. 1921.

Einleitung. Zusammensetzung, Zerlegung u. Gleichgewicht v. Kräften. Anwendung d. stat. Gesetze auf d. Baukonstruktionen.

SCHAU, A., Festigkeitslehre. 2. Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd. 829.) — 111 pp. 8. 1921.

Einl. Zug- u. Druckfestigk. Schub- u. Scherfestigk. Biegungsfestigk. Torsions- od. Verdrehungsfestigk. Knickfestigk. Zusammengesetzte Festigk. Exzentr. Druck. Biegung u. Knickung.

WITTING, A., Einführung in die infinitesimalrechnung. 2. Die Integralrechnung. 2. Aufl. (Mathem.-physikal. Bibl. 41.) — 50 pp. 8. 1921.

Libreria Fratelli Treves.

Torino.

Insolera, F., Lezioni di statistica metodologica dettate nell' Istituto superiore di commercio di Torino. — 191 pp. 8. 1921.

Raccolta e prima critica dei dati. Errori di approssimazione. Operazioni approssimate. Rappresentazioni geometr. di successioni statist. Calcolo graf. d'un rapporto. Valori medi. Indici di variabilità. Analisi combinatorie. Teoria delle prove ripetute. Legge di frequenza degli errori di osservazione. Interpolazione. Perequazione. Correlazione e contingenza. Critica e interpret. dei dati elaborati.

Divers.

Büchler, Rob., Ueber die Einstein'sche Relativitätstheorie. — 4 pp. 8. 1922. (Selbstverlag des Verfassers, Aachen.)

Eriksson, K. V., Astronomiens grunder. (Nya upptäckter). — 60 pp. 8. 1923. Kr. 2,50. (Josef Bergendahls Boktryckeri, Göteborg.)

Eriksson, K. V., Naturvetenskapens grunder. (Nya upptäckter.) — 63 pp. 8. 1922. (Josef Bergendahls boktryckeri, Göteborg.)

Patschke, A., Umsturz der Einsteinschen Relativitätstheorie. Einführung in die einheitliche Erklärung und Mechanik der Naturkräfte. — 37 pp. 8. 1920. (Selbstverlag des Verfassers.)

Schaller, J. Georg, Beweis der Richtigkeit des »grossen Fermatschen Satzes». Mit 3 Beil. — 23+14+15 pp. 8. 1922. (Selbstverl. d. Verf., Grabow i. Meckl.)

Tausend, Franz, 180 Elemente, deren Atomgewichte und Eingliederung in das harmonisch-periodische System. — 27 pp. 8. 1922. (Selbstverlag des Verfassers, Obermenzing b. München.)

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

N. E. NÖRLUND

45

DJURSHOLM
ACTA MATHEMATICA

UPPSALA 1925
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

REDACTION

SVERIGE:

T. Carleman, Stockholm.
I. Fredholm, »
A. Lindstedt, »
J. Malmquist, »
G. Mittag-Leffler »
E. Phragmén, »
A. Wiman, Uppsala.

NORGE:

C. Störmer, Oslo.

DANMARK:

Harald Bohr, Kjöbenhavn.
J. Hjelmslev, »
J. L. W. V. Jensen, »
N. E. Nörlund, »

FINLAND:

Ernst Lindelöf, Helsingfors.
Hj. Mellin, »
Karl F. Sundman, »

INHALTSVERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 45. — 1925. — TOME 45.

PRÉFACE.

Fondateur des Acta mathematica en 1881 sur l'instigation de Charles Hermite et de Karl Weierstrass et sous la haute protection de sa Majesté le roi de Suède Oscar II, je n'ai cessé, depuis cette date, d'en être le rédacteur en chef. Le journal de Crelle, fondé en 1826 n'a été dirigé par lui que 30 ans, le journal de Liouville, fondé en 1836 a vécu seulement 38 ans sous la direction de Liouville. Après 43 ans le temps me semble donc venu maintenant de chercher un codirecteur destiné à me remplacer plus tard comme seul rédacteur en chef. J'ai été assez heureux pour trouver un tel collaborateur en mon ami, M. N. E. Nörlund, qui appartient déja, depuis l'année 1916, à la rédaction scandinave qui n'a cessé, depuis la fondation, d'être à mes côtés.

Pendant cette longue période la rédaction a eu à déplorer la perte de

VORREDE.

43 Jahre sind jetzt verflossen, seit ich 1881 die Acta mathematica auf Veranlassung von Charles Hermite und Karl Weierstrass und unter dem hohen Schutze S. M. des Königs Oskar II. von Schweden begründete. In dieser Zeit bin ich ständig ihr Hauptredakteur geblieben, wohingegen das im Jahre 1826 im Leben getretene Crellesche Journal von Crelle nur 30 Jahre geleitet wurde und das im Jahre 1836 begründete Liouvillesche Journal unter Liouvilles Leitung nur 38 Jahre lang erschienen ist. Heute aber scheint mir die Zeit gekommen, nach einem Mitherausgeber zu suchen, der später an meine Stelle als alleiniger Hauptredakteur treten soll. Ich war so glücklich, einen solchen Mitarbeiter in meinem Freunde N. E. Nörlund zu finden, der schon seit dem Jahre 1916 der skandinavischen Redaktion angehört, welche mir die ganze Zeit hindurch zur Seite gestanden hat.

Während der langen Jahre seit der Begründung der Acta mathematica

I—2454. *Acta mathematica.* 45. Imprimé le 8 août 1924.

17 membres[1], enlevés par la mort. Le dernier fut H. v. Koch, décédé le 11 mars 1924 à l'âge de 54 ans. Dans toute sa carrière scientifique, commencée à 22 ans, âge auquel il fut nommé maître de conférences à l'université de Stockholm, v. Koch s'était voué avec fidélité et désintéressement aux mathématiques. Dans ses travaux, au nombre de 60 environ, il s'était occupé surtout de la théorie des fonctions et de la théorie des nombres. En particulier il avait le mérite d'être peut-être plus versé que tout autre dans la connaissance de la théorie des déterminants infinis, à laquelle il avait eu l'intention de consacrer un livre, embrassant tous les détails connus jusqu'ici de cette partie importante de l'analyse.

sind der Redaktion 17 Mitglieder[1] durch den Tod entrissen worden. Der letzte Verlust, den wir zu beklagen hatten, war der Helge von Kochs, welcher am 11. März 1924 im Alter von 54 Jahren verschieden ist. In seiner ganzen wissenschaftlichen Laufbahn von seinem 22. Jahre an, in dem er zum Privatdozent an der Universität Stockholm ernannt wurde, hat sich v. Koch mit Treue und Selbstlosigkeit der Mathematik gewidmet. In seinen Arbeiten, etwa 60, beschäftigte er sich vorwiegend mit Funktionen- und Zahlentheorie. Unter anderem gebührt ihm der Ruhm, der genaueste Kenner der Theorie der unendlichen Determinanten gewesen zu sein. Es war seine Absicht, dieser Theorie ein Buch zu widmen, das alle bisher bekannten Einzelheiten dieses wichtigen Gebietes der Analysis umfassen sollte.

[1] Membres suédois:	A. V. Bäcklund	1882—1921
	H. Th. Daug	1882—1884
	H. Gyldén	1882—1896
	Hj. Holmgren	1882—1885
	C. J. Malmsten	1882—1886
	Sophie Kowalewski	1884—1891
	H. v. Koch	1913—1924
Membres danois:	L. Lorentz	1882—1891
	J. Petersen	1882—1910
	H. G. Zeuthen	1882—1920
Membres norvégiens:	C. A. Bjerknes	1882—1903
	O. J. Broch	1882—1890
	S. Lie	1882—1902
	L. Sylow	1882—1921
	Elling Holst	1895—1914
	Axel Thue	1916—1921
Membres finlandais:	L. Lindelöf	1882—1908

Monsieur T. Carleman, professeur à l'université de Stockholm, vient d'accepter de devenir son successeur dans la section suédoise de la rédaction.

Le programme du journal sera dorénavant élargi afin de publier, de temps à autre, une bibliographie complète des œuvres d'un des premiers géomètres de notre époque, dressée par lui-même. Le modèle en sera celle d'Henri Poincaré: »Analyse de ses travaux», rédigée par lui-même pour les Acta mathematica et publiée dans le tome 38 de notre recueil.

En principe nous ne publierons plus d'autres mémoires que ceux où le sujet traité sera exposé en détail avec explication précise de la terminologie employée. Nous chercherons donc nos lecteurs, non seulement parmi les spécialistes dans l'une ou l'autre branche des mathématiques, mais aussi parmi ceux qui, ignorant le sujet traité, sont néanmoins en possession d'une solide connaissance des parties élevées de notre science.

Herr T. Carleman, Professor an der Universität Stockholm, ist an v. Kochs Stelle in der schwedischen Abteilung der Redaktion getreten.

Von nun an soll das der Zeitschrift zugrundeliegende Programm in gewisser Hinsicht erweitert werden. Wir werden uns bemühen, wenn möglich in jedem Bande über das Werk eines der hervorragendsten Mathematiker unserer Zeit einen vollständigen, von ihm selbst geschriebenen Bericht zu bringen. Das Musterbeispiel hierfür soll die »Analyse de ses travaux» von Henri Poincaré sein, die von ihm selbst für die Acta mathematica verfasst und im 38. Bande unseren Zeitschrift veröffentlicht worden ist.

Ferner wollen wir künftighin prinzipiell keine anderen Abhandlungen aufnehmen als solche, bei denen der in Frage kommende Stoff unter genauer Erläuterung der angewandten Bezeichnungen bis zu den Einzelheiten dargelegt ist. Wir suchen also unsere Leser nicht nur unter den Spezialisten auf dem einen oder anderen Gebiete, sondern auch unter denen, welchen der behandelte Gegenstand noch unbekannt ist, welche jedoch sichere Grundkenntnisse der höheren Teile unserer Wissenschaft haben.

G. Mittag-Leffler.

ZUR FUNKTIONENTHEORIE.

VON

C. WEIERSTRASS.

(MATHEMATISCHES SEMINAR, 28. MAI 1884.)

An meine Abhandlung vom Oktober 1876 hat sich eine Anzahl von Arbeiten geknüpft, die zum Teil die Theorie der eindeutigen Funktionen in wesentlichen Punkten weitergeführt haben. Hervorzuheben sind die Arbeiten von MITTAG-LEFFLER, leider grösstenteils in schwedischer Sprache geschrieben, sowie von APPELL, PICARD und POINCARÉ. Diese Autoren sind zum Teil in anderer Weise vorgegangen, in der That lässt sich vieles einfacher mit dem Cauchy'schen Satze machen. Es erscheint daher zweckmässig hervorzuheben, was mich gerade zu dem von mir eingeschlagenen Wege geführt hat. Es hängt das zusammen mit der Grundtendenz, die ich bei der Entwickelung der Funktionentheorie verfolge. Ich gehe nicht aus von einer mehr oder weniger willkürlichen Definition einer analytischen Funktion, sondern ich knüpfe den Begriff der Funktion, überhaupt den der Abhängigkeit von Grössen an die arithmetischen Grundoperationen. Sobald diese definiert sind, ergiebt sich der Begriff von Funktionen, die mittelst der Grundoperationen aus den betrachteten veränderlichen Grössen abgeleitet werden. Wenn man die Grundoperationen in endlicher Zahl anwendet, so kommt man zu den rationalen Funktionen. Es wird aber in der Arithmetik nachgewiesen, dass Summen und Produkte auch definiert werden können unter der Voraussetzung unendlich vieler Glieder, und so gelangt man sofort zu Funktionen, die in Form von unendlichen Summen und Produkten rationaler Funktionen dargestellt werden können. Indem man dann die bleibenden Eigenschaften solcher durch arithmetische Operationen wirklich dargestellten Funktionen auffasst und dieser festhält, kommt man zu dem allgemeinen Begriff einer eindeutigen analytischen Funktion.

Wenn man sagen wollte, eine eindeutige Funktion sei eine solche, die für jeden Wert des Argumentes einen bestimmten Wert hat, so wäre dies eine durchaus nichtssagende Definition, namentlich dann, wenn man dem Argument komplexe Werte beilegt. Denn ist $x = u + iv$, so würde jede Grösse z, deren reeller und imaginärer Bestandteil reelle Funktionen von u und v sind, nach der gegebenen Erklärung eine Eunktion von $u + iv$ sein. Das wäre aber etwas ganz willkürliches; es läge gar kein Grund vor z als Funktion von $u + iv$ anzusehen, z ist vielmehr eine Funktion von u und v.

In der That wird ein Zusatz gemacht um die Art, wie z von u und v abhängt, genauer zu bestimmen. Hiergegen ist jedoch einzuwenden, dass eine solche Definition durchaus nichts lehrt über den Umfang, den man der unabhängigen Veränderlichen geben kann. Man hat das in früherer Zeit nicht in seiner Bedeutung erkannt. Man hatte zwar bald erkannt, dass man eine veränderliche Grösse y nur dann als Funktion einer andern Veränderlichen x ansehen dürfe, wenn allgemein eine »regelmässige« Abhängigkeit der einen von der andern stattfindet, und hat diese mehr oder weniger exakt definiert. Zuerst hatte man geglaubt es reiche aus anzunehmen, dass y nicht nur für jedes x einen bestimmten Wert habe, sondern auch, dass dieser sich ständig mit x ändere, man glaubte nämlich dann die Existenz der Ableitung von y nach x beweisen zu können und hatte daraus eine Darstellung der Funktion in Form einer Potenzreihe mittelst des Taylor'schen Satzes, wenigstens für einen beschränkten Bereich, abgeleitet. Allein man weiss jetzt, dass in der Stetigkeit einer solchen Funktion nichts liegt, wodurch die Existenz einer Ableitung begründet wird.[1] Das Resultat aber, zu dem man kam, hatte seine gute Bedeutung, es wurde dadurch die ursprünglich aufgestellte Definition stillschweigend durch eine andere ersetzt, die man so aussprechen kann: Im allgemeinen, d. h. gewisse singuläre Stellen ausgenommen, lässt sich die Funktion in Form einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ darstellen, die konvergiert, wenn x nahe genug an a liegt.

Auf diese Weise ist man zu dem Begriffe gekommen, dass eine eindeutige Funktion sich in der Nähe einer bestimmten Stelle a regulär verhalte. Nun hat man die Voraussetzung gemacht, die bei den bekannteren Funktionen bestätigt wurde, dass ein solches reguläres Verhalten überall stattfinde mit Ausnahme einzelner Stellen. Zuerst hat man darunter verstanden eine endliche Anzahl einzelner Stellen, dann konnten auch unendlich viele vorhanden sein, aber isolierte, die in

[1] Aber selbst, wenn Ableitungen jeder Ordnung existierten, brauchte man, wie jetzt bekannt ist, aus dem Taylor'schen Satze durchaus keine konvergente Reihe zu erhalten.

der Ebene ein System von diskreten Punkten bildeten. Später ist man auch auf Funktionen gekommen, wo die singulären Stellen Linien bildeten. Schon, wenn man auf dieser Stufe der Erkenntnis stehen bleibt, ist es schwierig sich eine klare Vorstellung über den Bereich zu machen, den man der Veränderlichen geben darf, es war noch in den sechziger Jahren allgemein die Meinung verbreitet, dass eine analytische Funktion, wenn sie überhaupt existiere, in der ganzen Ebene existiere mit Ausnahme von einzelnen Punkten und Linien. Aber auch diese Ansicht hat sich nicht als haltbar erwiesen, denn es giebt analytische Funktionen, die nur für einen Teil der Ebene existieren und für den übrigen Teil der Ebene gar keine Bedeutung haben.

Man kann also mit jenen älteren Definitionen gar nichts anfangen. — Alle Schwierigkeiten verschwinden, wenn man — wie ich es gethan habe — von dem Begriffe des Funktionenelementes ausgeht, also als Grundlage der Definition einer analytischen Funktion eine beliebige Potenzreihe annimmt, die in der Nähe einer bestimmten Stelle a gilt:

$$y = \mathfrak{P}(x-a) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots$$

Um den wahren Konvergenzbereich einer solchen Potenzreihe zu bestimmen, hat man zuerst den Begriff einer abgeleiteten Potenzreihe festzustellen. Innerhalb des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x-a)$, der geometrisch durch einen um den Punkt a beschriebenen Kreis dargestellt wird, nehme man eine Stelle a_1 an und wandle $\mathfrak{P}(x-a)$ um in eine nach Potenzen von $x-a_1$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$. Diese Reihe konvergiert sicher innerhalb eines Kreises um den Punkt a_1, der den Kreis um a von innen berührt, im allgemeinen aber wird der Konvergenzbereich von $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ grösser sein, er kann jedoch höchstens gleich dem Kreise um a_1 sein, der den Kreis um a von aussen berührt. Wenn es jetzt gelingt aus der ursprünglichen Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ eine andere $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ abzuleiten deren Konvergenzbezirk einen Punkt x' der Grenze des Konvergenzbezirkes von $\mathfrak{P}(x-a)$ umfasst, so sagen wir, dass die Funktion, die innerhalb des Kreises um a durch $\mathfrak{P}(x-a)$ definiert ist, an der Stelle x' den Charakter einer ganzen Funktion besitzt. Wenn nun der Kreis um a den wirklichen Konvergenzbereich von $\mathfrak{P}(x-a)$ darstellen soll, so gilt der Satz, dass es an der Grenze mindestens eine Stelle x' giebt, an der die Funktion aufhört den Charakter einer ganzen Funktion zu besitzen, das heisst eine Stelle, für die es unmöglich ist eine aus $\mathfrak{P}(x-a)$ abgeleitete Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ zu finden, deren Konvergenzbezirk x' umfasst.

Wenn es aber eine solche Potenzreihe giebt, so kann man aus $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-x')$ herleiten, die in der Nähe von x' gilt und die für die Werte von x, die zugleich dem Konvergenzbezirke der ursprünglichen Reihe angehören, mit ihr übereinstimmt. An der Grenze des Konvergenzbezirkes von $\mathfrak{P}(x-a)$ muss es also mindestens eine Stelle x' geben, für die es nicht möglich ist eine Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x-x')$ herzuleiten. Dieses kann seinen Grund z. B. darin haben, dass die Funktion an der Stelle x' unendlich gross wird. Es kann aber seinen Grund auch darin haben, dass eine der Ableitungen der Funktion an dieser Stelle unendlich gross wird. Es kann aber auch die Funktion an der Stelle x' unbestimmt werden, womit aber keineswegs alle Möglichkeiten erschöpft sind.

Im allgemeinen wird eine abgeleitete Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ einen Konvergenzbezirk haben, der teilweise mit dem von $\mathfrak{P}(x-a)$ zusammenfällt, teilweise über ihn hinausragt; wir sagen dann, dass in dem gemeinschaftlichen Bereich $\mathfrak{P}(x-a)$ und $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ coinzidieren. In dem hinausragenden Teile stellt die Reihe eine Funktion dar, die wir eine Fortsetzung der ursprünglich definierten Funktion nennen. Die ursprüngliche Potenzreihe stellt also die Funktion nicht vollständig dar, sondern nur einen Zweig davon, und wir nennen deshalb $\mathfrak{P}(x-a)$ ein Element der Funktion.

Ausgehend von einem Funktionenelement $\mathfrak{P}(x-a)$ nehme man innerhalb des Konvergenzbereiches eine Stelle a_1 an, und leite eine Reihe $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ ab. Mit dieser verfahre man ebenso und leite aus ihr $\mathfrak{P}_2(x-a_2)$ ab, u. s. w. Alle Funktionenelemente, zu denen man auf diese Weise gelangt, heissen aus dem ursprünglichen Funktionenelement abgeleitet. $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ heisst unmittelbar aus $\mathfrak{P}(x-a)$ abgeleitet, indem diese Reihe eine unmittelbare Umformung von $\mathfrak{P}(x-a)$ ist, $\mathfrak{P}_2(x-a_2)$, u. s. w. heisst mittelbar aus $\mathfrak{P}(x-a)$ abgeleitet, und zwar $\mathfrak{P}_n(x-a_n)$ durch Vermittelung von $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$; die Annahme der Stellen $a_1, a_2, \dots$ ist willkürlich, nur muss a_1 innerhalb des Konvergenzbezirkes der ersten Reihe, a_2 innerhalb des Konvergenzbezirkes der zweiten Reihe liegen, u. s. w.

Wenn man aus $\mathfrak{P}(x-a)$ unmittelbar oder mittelbar $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ abgeleitet hat, so lässt sich zeigen, dass man auch stets, entweder unmittelbar oder mittelbar $\mathfrak{P}(x-a)$ aus $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ ableiten kann. Wenn man also aus irgend einem gegebenen Funktionenelemente auf die angegebene Weise andere herleitet, deren Zahl unbegrenzt ist, so können aus jedem Elemente die übrigen wieder abgeleitet werden. Hieraus erhellt, dass alle diese Funktionenelemente ein in sich geschlossenes Ganzes bilden, zu dem man nichts hinzufügen und von dem man nichts

wegnehmen kann. In der That, leitet man auf zwei verschiedenen Wegen aus $\mathfrak{P}(x-a)$ die Reihen $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ und $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}(x-a'')$ her, so kann man rückwärts aus $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ und $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}(x-a'')$ die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ herleiten, also auch $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ aus $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}(x-a'')$ und umgekehrt.

Wenn aus $\mathfrak{P}(x-a)$ die Reihe $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ hergeleitet wird, so kann diese Herleitung auf die mannigfaltigsten Weisen geschehen, indem die vermittelnden Stellen auf unendlich viele Arten gewählt werden können. Nun kann zweierlei eintreten. Entweder erhält man, wie man auch verfahren möge, stets dasselbe Funktionenelement $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ oder man erhält, auf verschiedene Arten verfahrend, verschiedene Funktionenelemente. Wenn man beweisen kann, dass in der Umgebung jeder beliebigen Stelle x', für welche es überhaupt ein aus $\mathfrak{P}(x-a)$ hergeleitetes Funktionenelement giebt, nur ein einziges Funktionenelement erhalten werden kann — wie man auch bei der Ableitung verfahren möge — so sagt man, dass durch das Funktionenelement $\mathfrak{P}(x-a)$ eine eindeutige analytische Funktion definiert werde.

Dass es solche eindeutigen Funktionen giebt, muss erst bewiesen werden. Für den ersten Augenblick könnte es scheinen, dass man wegen der Willkürlichkeit der vermittelnden Grössen $a_1, a_2, \ldots$ in der Regel für eine Stelle a' verschiedene Funktionenelemente erhalten wird. Die Ausdrücke, die man erhält, sind in der That verschieden, allein man braucht nur folgende Überlegung anzustellen. Wenn man eine beständig konvergente Potenzreihe zum Ausgangspunkte nimmt und aus ihr eine andere auf irgend eine Weise ableitet, so ist die neue Reihe auch beständig konvergent und stellt immer noch dieselbe Funktion dar. Durch eine beständig konvergente Potenzreihe wird daher eine eindeutige Funktion dargestellt.

Die Gesamtheit der Stellen x', zu denen man von a aus auf die angegebene Weise gelangen kann, bildet ein Kontinuum, da jede Stelle in einer gewissen Umgebung einer der Stellen x', ebenfalls zu den Stellen x' gehört. Dieses Kontinuum ist notwendig begrenzt, auch in dem Fall einer beständig konvergenten Potenzreihe, da man durch Fortsetzung niemals zu dem unendlich fernen Punkte gelangen kann. Die Begrenzung des Kontinuums kann aber auch aus einer endlichen Anzahl von Punkten, aus unendlich vielen diskreten Punkten, ja sogar aus Linien bestehen. Ich sage, dass ein Punkt a' an der Grenze des Kontinuums liegt, wenn es in jeder Nähe von a' Punkte giebt, die zu dem Kontinuum gehören und auch Punkte, die nicht dazu gehören; gehören alle Punkte der Umgebung

von a' zu den definierten, so liegt a' innerhalb des Kontinuums, gehört keiner dazu, ausserhalb. Für jede eindeutige Funktion nenne ich eine solche Grenzstelle eine singuläre Stelle und unterscheide wesentlich und ausserwesentlich singuläre Stellen. Eine Stelle a' heisst ausserwesentlich singulär, wenn es zwar nicht möglich ist für sie ein Funktionenelement $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ herzustellen, wohl aber die Funktion multipliziert mit $(x-a')^m$, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, sich in der Form einer solchen Potenzreihe darstellen lässt. Wenn dieses aber nicht eintritt, heisst die Stelle wesentlich singulär.

Um zu entscheiden, ob die unendlich ferne Stelle eine reguläre, oder eine ausserwesentlich oder wesentlich singuläre ist, verfahre ich in folgender Art. Für Werte von x in der Nähe von a haben wir $f(x)$ nach Potenzen von $x-a$ entwickelt, d. h. nach Potenzen einer linearen Funktion von x, welche die Eigenschaft hat für $x=a$ zu verschwinden. Ich hätte dafür auch eine andere lineare Funktion nehmen können, z. B.

$$\frac{x-a}{c+d\,x},$$

wo c und d willkürlich sind, aber $c+a\,d$ von Null verschieden ist. Man überzeugt sich leicht, dass man aus $\mathfrak{P}(x-a)$ eine Reihe herleiten kann, die nach Potenzen dieser linearen Funktion von x fortschreitet. Wenn ich also $f(x)$ in der Nähe der Stelle $x=\infty$ darstellen will, so muss ich eine lineare Funktion von x wählen, die an dieser Stelle verschwindet. Eine solche ist $\frac{1}{x}$. Ich sage daher, $f(x)$ verhält sich an der Stelle $x=\infty$ regulär, wenn $f(x)=\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ ist, wo $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ zum Teil mit einem Funktionenelemente $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ coinzidiert, das aus dem ursprünglichen Elemente $\mathfrak{P}(x-a)$ abgeleitet ist. Erhält man aber

$$\left(\frac{1}{x}\right)^m\cdot f(x)=\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{x}\right),$$

so ist die unendlich ferne Stelle ausserwesentlich singulär und wenn keine solche Darstellung vorhanden ist, wesentlich singulär, vorausgesetzt immer, dass diese Stelle eine Grenzstelle sei.

Es kann Stellen im Gebiete von x geben, die weder Grenzstellen sind noch solche, für welche die Funktion existiert. In diesem Falle muss man sagen, dass der Bereich der Veränderlichen x, innerhalb dessen die Funktion definiert ist,

nicht die ganze Ebene umfasse, man hat dann eine Funktion mit Lücken. Hieraus geht hervor, dass man, wenn eine Funktion irgendwie definiert wird, den Bereich der unabhängigen Veränderlichen nicht willkürlich festsetzen darf. Man darf also zum Beispiel nicht sagen: ich will eine Funktion dadurch definieren, dass sie einer bestimmten Differentialgleichung genügt und ihr Bereich ein bestimmter Teil der Ebene ist.

Die Einsicht, dass für jede Funktion der Bereich der Veränderlichen vollkommen bestimmt ist, lässt meiner Ansicht nach keine andere Definition der eindeutigen analytischen Funktion zu als die, welche im Vorhergehenden gegeben worden ist. Es soll zum Beispiel die Definition durchgegangen werden, auf die Cauchy zuerst aufmerksam gemacht hat und die später von Riemann zu Grunde gelegt worden ist. Cauchy sagt er wolle unter einer Funktion $f(x)$ eine solche von der Veränderlichen x abhängige Grösse verstehen, die erstens: für jeden Wert von x innerhalb eines gewissen Bereiches einen bestimmten Wert habe, zweitens: so beschaffen sei, dass eine Ableitung existiere, womit die Stetigkeit vorausgesetzt wird, und dass die Ableitung in dem Bereiche einen bestimmten Wert habe und stetig sei. Die Ableitung wird dabei definiert als die Grenze, der sich der Quotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nähert, wenn die komplexe Veränderliche h unendlich klein wird. Die Frage, ob diese Grenze existiere oder nicht, wird von Cauchy gar nicht berührt; zu seiner Zeit nahm man allgemein an, dass eine solche Ableitung immer existiere, allerdings nur für reelle Grössen. Man sieht sofort, dass es bei komplexem h einen Unterschied machen wird wie sich der Null nähert. Cauchy nahm als Definition an, was ihm freistand, die Abhängigkeit der Grösse $f(x)$ von x solle derart sein, dass dieser Quotient, wie auch h sich der Null nähert, sich einer bestimmten Grenze $f'(x)$ nähert. Es ist klar, dass eine solche Definition gestattet ist. Ob sie zweckmässig ist, das ist eine andere Frage.

Zuerst ist ein Mangel, dass man nicht weiss, was man unter dem Bereich, für den die Funktion definiert ist, zu verstehen hat. Ihn willkürlich festsetzen können wir nicht; wenn die Definition in concreten Fällen exakt sein sollte, müsste nicht gesagt werden: ein gewisser Bereich, sondern der Bereich müsste bestimmt angegeben werden.

Ferner wird nichts darüber gesagt, ob die Funktion über den festgesetzten Bereich hinaus fortgesetzt werden kann.

Die Hauptsache aber ist, dass erst ein Lehrsatz aufgestellt werden muss, nachdem diese Definition gegeben ist, denn, wie man sich drehen und wenden mag, man kommt darüber nicht hinweg bestimmte analytische Formen, z. B. Potenzreihen zu Hilfe zu nehmen. In der That zeigt Cauchy, dass eine Funktion $f(x)$, die seiner Definition genügt, wenn a ein bestimmter Punkt innerhalb des Bereiches ist, sich in Form einer Potenzreihe von $x-a$ ausdrücken lässt. Er kommt durch diesen Lehrsatz eben zu dem Punkte, von dem wir ausgegangen sind, denn alles, was von jetzt ab von einer Funktion gesagt wird, ist aus der Natur der Potenzreihen abgeleitet.

Den Beweis für die Entwickelbarkeit von $f(x)$ nach Potenzen von $x-a$ führt Cauchy durch Einführung des bestimmten Integrals genommen zwischen komplexen Grenzen. Er reicht also keineswegs aus mit den ersten Elementen der Analysis, sondern muss den Integralbegriff zu Hilfe nehmen. So grosse Wichtigkeit nun auch der Integralbegriff für die ganze Analysis hat, möchte ich doch die Funktionentheorie begründen blos mit Hilfe der elementaren Sätze über die Grundoperationen. Wenn ich die Gleichheit zweier Ausdrücke beweisen will, suche ich den Beweis möglichst zu gründen auf Umformungen der beiden Ausdrücke, die vermittelst der Grundoperationen möglich sind, sodass man, wenn auch die Umformungen nicht vollständig durchgeführt werden können, doch zu der Einsicht gelangt, dass die eine Form durch eine geringere oder grössere Anzahl von Transformationen in die andere übergeführt werden könne; was dann einen direkten Beweis giebt. Wenn man aber die Gleichheit dadurch beweist, dass man z. B. beide Ausdrücke in Form von bestimmten Integralen darstellt, so hat man beide Grössen in unendlich kleine Elemente aufgelöst, die, in verschiedener Weise angeordnet, die gleiche Summe geben. Das ist kein so direkter Beweis, als wenn man den einen Ausdruck wirklich in den andern überführt. Ich sage nicht, dass man in jedem Fall einen solchen direkten Beweis führen soll oder führen kann; diese Frage lasse ich unentschieden. Aber ich suche die direkten Beweise soweit durchzuführen, als es eben geht und möchte mich bei der Begründung der Funktionentheorie dieser Methode vorzugsweise bedienen.

Die Definition von Cauchy lässt sich noch in anderer Weise durchführen. Setze ich

$$x=u+iv,\ y=\varphi+i\psi,$$

und vermehre x um die reelle Grösse h, so ist:

$$f(x+h)-f(x)=h\,.\,f'(x)+\cdots,$$

vermehre ich aber x um die rein imaginäre Grösse ik, so ist:

$$f(x+ik)-f(x)=ik \cdot f'(x)+\cdots.$$

Gehe ich also zur Grenze über, für $h=0$ und $k=0$, so erhalte ich

$$\frac{\partial y}{\partial u}=f'(x), \frac{\partial y}{\partial v}=if'(x),$$

und bekomme also

$$\frac{\partial y}{\partial v}=i\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Diese Gleichung hat Riemann als Definition für die analytische Abhängigkeit des y von $x=u+iv$ aufgestellt. Seine Definition lässt sich auch so aussprechen: Indem man die Grössen φ und ψ einführt, hat man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}=-\frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Dann sagt Riemann: Sind φ und ψ zwei reelle Funktionen der reellen Veränderlichen u und v und genügen φ und ψ diesen beiden Differentialgleichungen, so nenne ich $\varphi+i\psi$ eine analytische Funktion von $u+iv$.

Diese Definition erscheint auf den ersten Blick willkürlich. Riemann rechtfertigt sie aber in folgender Weise. Er sagt, dass bei allen Abhängigkeitsverhältnissen, die zwischen zwei Grössen y und x stattfinden und durch arithmetische Formen dargestellt werden können, diese beiden Gleichungen bestehen, also eine gemeinsame Eigenschaft aller bekannten Funktionen ausdrücken, die er eben als Definition der analytischen Funktionen hinstelle. Schon Cauchy hat diese Gleichungen gehabt, er hat auch ihre geometrische Bedeutung erkannt, legt sie aber nicht als Definitionsgleichungen zu Grunde.

So ist Riemann's Definition vollkommen gerechtfertigt, es machen sich aber gegen sie dieselben Bedenken geltend, wie gegen die ursprüngliche Definition Cauchy's. Auch hier weiss man nicht wie man sich eine Vorstellung machen soll von dem Bereiche der Variabeln $u+iv$. Dagegen hat diese Definition den Vorzug, dass sich an sie sehr leicht der Begriff der Fortsetzbarkeit knüpfen lässt. Hat man nämlich zwei Funktionen φ und ψ, die innerhalb eines Bereiches beiden Differentialgleichungen genügen, und gelingt es für einen zweiten Bereich, der mit dem ersten einen Teil gemeinschaftlich hat, zwei Funktionen φ_1 und ψ_1 aufzustellen, die ebenfalls den Differentialgleichungen genügen, und innerhalb des gemeinschaftlichen Teils, bezw. mit φ und ψ übereinstimmen, so nennt Riemann

$\varphi_1 + i\psi_1$ eine Fortsetzung von $\varphi + i\psi$. Er sagt, dass die beiden Funktionen φ und ψ den Differentialgleichungen gemäss fortgesetzt werden.

Um die Möglichkeit der Fortsetzung zu beweisen, ist Riemann gezwungen gewesen, was sich in seinen gesammelten Werken nicht ausgeführt findet, was er aber in seinen Vorlesungen gethan hat, zu den Potenzreihen seine Zuflucht zu nehmen. Er musste also aus den Differentialgleichungen denselben Lehrsatz ableiten, der sich auch bei Cauchy findet, er musste zeigen, dass $u + iv = x$, $\varphi + i\psi = y$ gesetz, y sich als Potenzreihe von $x - x_0$ darstellen lässt. Vermittelst dieser Potenzreihen wird dann gezeigt, dass die Funktion über den ursprünglichen Bereich möglicherweise fortgesetzt werden kann und es werden Bedingungen dafür aufgestellt. Um aber jenen Lehrsatz aus den Differentialgleichungen abzuleiten, muss man eine ganze Reihe von Sätzen aus der Integralrechnung zu Hilfe nehmen, es können also die Elemente der Funktionentheorie nicht an die Theorie der rationalen Funktionen angeschlossen werden.

Es kommt hinzu, dass bei der Definition durch die Differentialgleichungen die Existenz der Ableitungen von Funktionen reeller Veränderlichen vorausgesetzt wird, sodass hier eine Hypothese gemacht werden muss. Wenn man ferner Funktionen von zwei Veränderlichen betrachtet und genau analysiert, was vorausgesetzt wird, wenn man die Existenz von Ableitungen solcher Funktionen annimmt, so überzeugt man sich, dass eine grosse Zahl von Voraussetzungen gemacht wird, die sich noch vermehrt, wenn man aus den ursprünglichen Differentialgleichungen die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$$

ableitet und dadurch φ und ψ definiert. Geht man dagegen von den Potenzreihen aus, so braucht man nur die ersten Elemente der Arithmetik vorauszusetzen.

In der Ansicht, dass man von den Potenzreihen ausgehen muss, werde ich dadurch bestärkt, dass man mit grosser Leichtigkeit denselben Weg einschlagen kann für Funktionen mit mehreren Veränderlichen. Auch die Definitionen von Cauchy und Riemann lassen sich auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ausdehnen, wenn man aber z. B. nur für Funktionen von zwei Veränderlichen die Sache durchführt, so erhält man eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen, denen die reellen und imaginären Bestandteile genügen müssen, und übersieht nicht, ob man allen zugleich wirklich genügen kann.

SUR UNE ÉQUATION INTÉGRALE À NOYAU ANALYTIQUE.

Par

IVAR FREDHOLM

à Stockholm.

Le nombre des équations intégrales dont on peut donner une solution effective étant encore assez restreint, je me suis demandé s'il n'est pas possible d'élargir nos connaissances dans cette direction.

L'équation intégrale que j'ai choisie correspond au problème de Dirichlet dans le plan, dans des conditions qui seront développées dans la suite.

Quoique mes études soient encore assez incomplètes elles m'ont conduit à un résultat qui parait présenter quelque intérêt, c'est-à-dire une classe assez étendue de fonctions uniformes qui restent inaltérées par un groupe de transformations algébriques.

§ 1. Exposé du problème. Calcul des noyaux itérés.

Le problème de Neumann pour un domaine D limité par la courbe C se traduit comme il est bien connu[1] par une équation intégrale linéaire

$$\varphi(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s)\, \varphi(s)\, ds = \psi(t), \tag{1}$$

où

$$f(t, s) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arctg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}$$

et la variable complexe $x(s) + iy(s)$ parcourt la courbe C quand s varie entre $-\infty$ et $+\infty$.

[1] Fredholm, Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Öfv. af K. V. A:s förh. 1900.

En appliquant à l'équation (I) soit la méthode de NEUMANN soit la méthode de FREDHOLM il parait que l'on rencontre des complications très grandes, la solution dans chaque cas se présentant sous la forme de séries, dont les termes sont des intégrales multiples d'un ordre croissant infiniment.

En vue de cela il m'a paru intéressant de chercher, au moins dans quelque cas pas trop particulier, si la complication n'est plutôt apparente que réelle.

Afin de me trouver dans des circonstances simples je pars d'une fonction rationnelle $\Phi(s)$ de degré n. Alors il est clair que je puis partager le plan des s en n domaines ayant la propriété que la fonction $\Phi(s)$ prend chaque valeur une et une seule fois dans chaque domaine. J'appelle ces domaines des domaines élémentaires.

Je suppose maintenant que le demi-plan supérieur des s se trouve à l'intérieur d'un des domaines élémentaires et de plus que la fonction $\Phi(s)$ ne devienne pas infinie dans ce demi-plan. En partant d'une fonction rationnelle quelconque on peut toujours par un changement linéaire de la variable s obtenir que les hypothèses soient vérifiées.

Nous allons maintenant nous occuper du calcul des noyaux itérés de l'équation (I). Pour ce but je pose

$$x(s) + i\,y(s) = \Phi(s),$$

$$x(s) - i\,y(s) = \bar{\Phi}(s).$$

Parce que $f(t, s)$ est le coefficient de i dans

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s} \log\ (\Phi(s) - \Phi(t))$$

on a

$$f(t, s) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s) - \Phi(t)} - \frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t)}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial s} \log\ g(t, s)$$

$$g(t, s) = \frac{\Phi(s) - \Phi(t)}{\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t)}$$

et ainsi $f(t, s)$ est une fonction rationnelle de s et t.

Pour étudier les pôles de $f(t, s)$ posons

$$\Phi(t) = \frac{g(t)}{h(t)}.$$

Alors on obtient

$$\frac{\partial}{\partial s} \log \left(\Phi(s) - \Phi(t)\right) = \frac{\partial}{\partial s} \log \frac{h(t)\,g(s) - h(s)\,g(t)}{h(s)\,h(t)} =$$

$$= \frac{h(t)\,g'(s) - h'(s)\,g(t)}{h(t)\,g(s) - h(s)\,g(t)} - \frac{h'(s)}{h(s)},$$

d'où l'on voit que pour un t donné les valeurs qui rendent cette fonction infinie sont les valeurs de s satisfaisant aux équations

$$\Phi(s) = \Phi(t),$$
$$h(s) = 0.$$

Appelons ces racines

$$t_0 = t,\ t_1,\ t_2, \ldots, t_{n-1}$$

et

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}.$$

Les pôles de la fonction

$$\frac{\partial}{\partial s} \log \left(\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t)\right)$$

sont

$$\bar{t}_0 = t,\ \bar{t}_1,\ \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{n-1}$$

et

$$\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1},$$

où nous avons indiqué la quantité conjuguée par un trait.

Observons que parmi ces quantités $s = t$ n'est pas un pôle de $f(t, s)$ et que les t_ν $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ et a_ν ont des parties imaginaires négatives.

Quant aux valeurs infinies il est facile de voir que $f(t, s)$ pour $s = \infty$ a un zéro d'ordre deux.

Cela posé, on voit que

$$f_2(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) f(x, s)\, dx$$

se calcule simplement en prenant la somme des résidus correspondants aux pôles dont les parties imaginaires soient positives.

D'après ce qui vient d'être dit les pôles sont, pour $f(t, x)$

$$x = \bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{n-1}$$

$$x = \bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}$$

et pour $f(x, s)$ les racines de l'équation

$$\bar{\Phi}(x) = \Phi(s),$$

que nous appelons

$$\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_{n-1}.$$

Parce que l'on a

$$\lim_{x=\bar{t}_\nu} (x - \bar{t}_\nu)\, 2\pi i f(t, x) = -\lim_{x=\bar{t}_\nu} (x - \bar{t}_\nu) \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x) - \bar{\Phi}(t)} = -1,$$

$$\lim_{x=\bar{a}_\nu} (x - \bar{a}_\nu)\, 2\pi i f(t, x) = -\lim_{x=\bar{a}_\nu} (x - \bar{a}_\nu) \frac{\bar{\Phi}'(x)}{\bar{\Phi}(x) - \bar{\Phi}(t)} = +1$$

on voit que la somme des résidus correspondants aux infinis de $f(t, x)$ est

$$-\sum_{\nu=1}^{n-1} f(\bar{t}_\nu, s) + \sum_{\nu=0}^{n-1} f(a_\nu, s).$$

Parce que de plus

$$\lim_{x=\bar{s}_\nu} (x - \bar{s}_\nu)\, 2\pi i f(x, s) = -\lim (x - \bar{s}_\nu) \frac{\Phi'(s)}{\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(x)} = \frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}'(\bar{s}_\nu)}$$

on trouve pour la somme des résidus correspondants aux infinis de $f(x, s)$ l'expression

$$\bar{\Phi}'(s) \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{f(t, \bar{s}_\nu)}{\bar{\Phi}'(\bar{s}_\nu)}.$$

Ainsi on a d'abord

$$2\pi i f_2(t, s) = -\sum_{\nu=1}^{n-1} \left[\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s) - \Phi(\bar{t}_\nu)} - \frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t)} \right] +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[\frac{\Phi'(\bar{s}_\nu)}{\Phi(\bar{s}_\nu) - \Phi(t)} - \frac{\bar{\Phi}'(\bar{s}_\nu)}{\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t)} \right] \frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}'(\bar{s}_\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s) - \Phi(\bar{a}_\nu)}$$

ce qui s'écrit après une réduction simple

$$2\pi i f_2(t,s) = -\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)-\Phi(\bar t_\nu)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Phi'(\bar s_\nu)}{\Phi(\bar s_\nu)-\Phi(t)} \frac{\bar\Phi'(s)}{\bar\Phi'(\bar s_\nu)} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)-\Phi(\bar a_\nu)}.$$

Observant maintenant que

$$\Phi(\bar s_\nu) = \bar\Phi(s),$$

on trouve

$$\frac{\bar\Phi'(s)}{\bar\Phi'(\bar s_\nu)} = \frac{d\bar s_\nu}{ds}$$

et par conséquent

$$(2) \qquad 2\pi i f_2(t,s) = -\frac{d}{ds} \log \prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(s)-\Phi(\bar t_\nu)) + \frac{d}{ds} \log \prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(\bar s_\nu)-\Phi(t)) +$$

$$+ \frac{d}{ds} \log \prod_{\nu=0}^{n-1} (\Phi(s)-\Phi(\bar a_\nu)).$$

Pour transformer cette expression dans une forme plus commode pour la suite je considère les racines $u = \bar t_\nu$ de l'équation

$$\bar\Phi(u) = \bar\Phi(t)$$

et parce qu'elles sont fonctions de t, je les désigne par

$$\bar\psi_0(t) = t, \bar\psi_1(t), \bar\psi_2(t), \ldots, \bar\psi_{n-1}(t).$$

Il s'ensuit que les racines $u = t_\nu$ de l'équation

$$\Phi(u) = \Phi(t)$$

sont

$$\psi_0(t) = t, \psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_{n-1}(t),$$

$\bar\psi_\nu$ étant la fonction conjuguée de ψ_ν.

Cela posé, considérons le produit

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(\bar t_\nu) - \Phi(s)),$$

qui évidemment est une fonction rationnelle de s. Ses zéros doivent d'après nos conventions être désignés par

$$\psi_0(\bar{t}_\nu), \psi_1(\bar{t}_\nu), \ldots, \psi_{n-1}(\bar{t}_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

ou bien aussi par la formule

$$\psi_i(\bar{\psi}_k(t)) \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ k = \ 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Les pôles de notre produit sont $a_0, \ldots, a_n$ chacun comptant $(n-1)$ fois. Ainsi on a

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(\bar{t}_\nu) - \Phi(s)) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}(s - \psi_i(\bar{\psi}_k(t))}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(s - a_\nu)^{n-1}} F(t),$$

où $F(t)$ est une fonction qui ne dépend pas de s.

Traitons de la même manière le produit

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(\bar{s}_\nu) - \Phi(t)).$$

Ses zéros s'obtiennent en cherchant les valeurs de $\bar{s}_\nu$ satisfaisant à l'équation

$$\Phi(\bar{s}_\nu) = \Phi(t).$$

Or cela nous donne d'abord

$$\bar{s}_\nu = \psi_k(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Parce que $u = \bar{s}_\nu$ est une racine de l'équation

$$\bar{\Phi}(u) = \bar{\Phi}(s)$$

j'obtiens pour les racines en s de notre produit

$$s = \bar{\psi}_i(\psi_k(t)) \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ i = \ 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Les pôles sont les valeurs $\bar{s}_\nu$ de s pour lesquelles

$$\Phi(\bar{s}_\nu) = \infty \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

c'est-à-dire

$$\bar{s}_\nu = a_k \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1),$$

d'où il s'ensuit que les pôles cherchés sont donnés par la formule

$$\bar{\psi}_i(a_k) \qquad \begin{pmatrix} k = 0, \ldots, n-1 \\ i = 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on peut poser

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(\bar{s}_\nu) - \Phi(t)) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} \prod\limits_{k=0}^{n-1} (s - \bar{\psi}_i(\psi_k(t)))}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} \prod\limits_{k=0}^{n-1} (s - \bar{\psi}_i(a_k))} G(t),$$

où $G(t)$ ne dépend pas de s.

Enfin, pour le produit

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} (\Phi(s) - \Phi(\bar{a}_\nu))$$

nous obtenons par des considérations analogues l'expression

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1} \prod\limits_{k=0}^{n-1} (s - \psi_i(\bar{a}_k))}{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1} (s - a_\nu)_n} H(t).$$

En introduisant ces expressions dans la formule (2) on obtient

$$(3) \qquad 2\pi i f_2(t, s) = -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \bar{\psi}_k t} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \psi_k t} \right)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i(\bar{a}_k)} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i(a_k)} \right).$$

Pour contrôler cette expression j'observe que l'on a pour t réel

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t, s)\, ds = 1,$$

m étant quelconque.

En appliquant cela au noyau f_2 il s'agit d'abord de connaître les pôles de f_2 dont la partie imaginaire soit positive.

Or nous savons que si t est réel ou positivement imaginaire $\psi_i(t)$ est négativement imaginaire; au contraire si t est réel ou négativement imaginaire $\overline{\psi}_i(t)$ est positivement imaginaire. Cela posé, il est clair que les pôles de $f_2(t, s)$ qui se trouvent dans le demi-plan positif des s, sont

$$\begin{array}{ll} \overline{\psi}_i \psi_k t & (i, k = 1, \ldots, n-1) \\ \overline{a}_k & (k = 0, 1, \ldots, n-1) \\ \overline{\psi}_i(a_k) & \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Les nombres de ces pôles étant $(n-1)^2$, n, $n(n-1)$ respectivement on obtient en tenant compte des signes des fractions simples dans (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t, s)\, ds = (n-1)^2 - n(n-1) + n = 1.$$

Il convient maintenant de mettre $f(t, s)$ sous une forme analogue à la formule (3). Parce que nous avons

$$2\pi i f(t, s) = \frac{\partial}{\partial s}[\log(\Phi(s) - \Phi(t)) - \log(\overline{\Phi}(s) - \overline{\Phi}(t))]$$

et parce que

$$\Phi(s) - \Phi(t) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(s - \psi_i(t))}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(s - a_k)} \cdot F(t),$$

$$\overline{\Phi}(s) - \overline{\Phi}(t) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(s - \overline{\psi}_i(t))}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(s - \overline{a}_k)} \cdot \overline{F}(t)$$

il vient

$$(5)\qquad 2\pi i f(t,s)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{s-\psi_i t}-\frac{1}{s-\bar{\psi}_i t}\right)$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{s-a_k}-\frac{1}{s-\bar{a}_k}\right).$$

La comparaison des expressions de f_2 et f porte à croire que $f_r(t,s)$ pourra être exprimé par une formule de la forme

$$(6)\qquad 2\pi i f_r(t,s)=\varepsilon_r\sum_{(\xi_r)}\left(\frac{1}{s-\xi_r t}-\frac{1}{s-\bar{\xi}_r t}\right)$$
$$+\sum_{(\alpha_r)}\left(\frac{1}{s-\alpha_r}-\frac{1}{s-\bar{\alpha}_r}\right)-\sum_{(\beta_r)}\left(\frac{1}{s-\beta_r}-\frac{1}{s-\bar{\beta}_r}\right),$$

où $(\xi_r t)$ représente la totalité des pôles dont la partie imaginaire soit positive et qui dépendent de t, (α_r) et (β_r) désignent les autres pôles. Je les ai ordonnés dans deux groupes suivant que la fraction simple correspondant est positive ou négative. Les traits signifient que α et $\bar{\alpha}$ sont conjugués, et ε_r est $+1$ ou -1. Cela posé, considérons la formule

$$f_{r+1}(t,s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t,x)f(x,s)\,dx$$

sous l'hypothèse que $f_r(t,x)$ soit donné par la formule (6). Dans ce cas nous pouvons exécuter l'intégration comme plus haut en prenant la somme des résidus de la fonction rationnelle $f_r(t,x)f(x,s)$ pour les infinis qui se trouvent dans le demi-plan supérieur des x. En tenant compte des pôles de f_r on obtient ainsi la somme de résidus

$$\varepsilon_r\sum_{(\xi_r)}f(\xi_r t, s)+\sum_{(\alpha_r)}f(\alpha_r,s)-\sum_{(\beta_r)}f(\beta_r,s)$$

et pour les pôles de $f(x,s)$ la somme

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}f_r(t,\bar{s}_\nu)\frac{d\bar{s}_\nu}{ds}.$$

Ainsi

$$f_{r+1}(t,s) = \varepsilon_r \sum_{(\xi_r)} f(\xi_r t, s) + \sum_{(\alpha_r)} f(\alpha_r, s) - \sum_{(\beta_r)} f(\beta_r, s) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \dot{f}_r(t, \bar{s}_\nu) \frac{d\bar{s}_\nu}{ds}. \tag{7}$$

Considérons d'abord les trois premières sommes dans le second membre de cette équation.

Si nous employons pour $f(t, s)$ la formule (5) nous obtenons

$$2\pi i\, \varepsilon_r \sum_{(\xi_r)} f(\xi_r t, s) = \varepsilon_r \sum_{(\xi_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \xi_r t} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \xi_r t} \right)$$

$$- \varepsilon_r M_r \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{s - a_k} - \frac{1}{s - \bar{a}_k} \right),$$

$$2\pi i \sum_{(\alpha_r)} f(\alpha_r, s) = \sum_{(\alpha_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \alpha_r} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \alpha_r} \right)$$

$$- N_r \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{s - a_k} - \frac{1}{s - \bar{a}_k} \right),$$

$$-2\pi i \sum_{(\beta_r)} f(\beta_r, s) = - \sum_{(\beta_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \beta_r} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \beta_r} \right)$$

$$+ P_r \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{s - a_k} - \frac{1}{s - \bar{a}_k} \right),$$

où M_r, N_r, P_r désignent les nombres des ξ_r, α_r, β_r respectivement. A cause de la relation (4) on a cependant

$$\varepsilon_r M_r + N_r - P_r = 1$$

et à cause de cela on obtient

$$2\pi i \left(\varepsilon_r \sum_{(\xi_r)} f(\xi_r t, s) + \sum_{(\alpha_r)} f(\alpha_r, s) - \sum_{(\beta_r)} f(\beta_r, s) \right) =$$

$$= \varepsilon_r \sum_{(\xi_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \xi_r t} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \xi_r t} \right) + \sum_{(\alpha_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \alpha_r} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \alpha_r} \right) - \tag{8}$$

$$- \sum_{(\beta_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \beta_r} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \beta_r} \right)$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{s - a_k} - \frac{1}{s - \bar{a}_k} \right),$$

Pour transformer la dernière somme dans (7) nous considérons d'abord l'expression

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\bar{s}_\nu - \lambda} \frac{d\bar{s}_\nu}{ds} = \frac{d}{ds} \log \prod_{\nu=1}^{n-1} (\bar{s}_\nu - \lambda).$$

Comme le produit dans le second membre est une fonction symétrique des racines de l'équation en u

$$\frac{\bar{\Phi}(u) - \bar{\Phi}(s)}{u - s} = 0,$$

le produit est une fonction rationnelle en s. Les zéros de cette fonction sont les valeurs de s qui rendent $\bar{s}_\nu = \lambda$ c'est-à-dire

$$s = \bar{\psi}_i \lambda \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Les infinis sont les valeurs de s pour lesquelles $\bar{s}_\nu = \infty$ c'est-à-dire

$$s = \bar{\psi}_i(\infty) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ainsi

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\bar{s}_\nu - \lambda} \frac{d\bar{s}_\nu}{ds} = \frac{d}{ds} \log \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(s - \bar{\psi}_i \lambda)}{(s - \bar{\psi}_i(\infty))} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \bar{\psi}_i \lambda} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i(\infty)} \right).$$

Appliquant ce résultat à la quatrième somme de la formule (7) et en observant que les pôles de la forme $\psi_i(\infty)$ se détruisent on obtient

$$(9) \quad 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n-1} f_r(t, \bar{s}_\nu) \frac{d\bar{s}_\nu}{ds} =$$

$$= \varepsilon_r \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(\xi_r)} \left(\frac{1}{s - \bar{\psi}_i \xi_r t} - \frac{1}{s - \psi_i \bar{\xi}_r t} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(\alpha_r)} \left(\frac{1}{s - \bar{\psi}_i \alpha_r} - \frac{1}{s - \psi_i \bar{\alpha}_r} \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(\beta_r)} \left(\frac{1}{s - \bar{\psi}_i \beta_r} - \frac{1}{s - \psi_i \bar{\beta}_r} \right).$$

En réunissant cette expression à (8) on trouve en ayant égard aux sommes qui se détruisent

$$(10)\qquad 2\pi i f_{r+1}(t,s) = \varepsilon_r \sum_{(\xi_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s-\psi_i \xi_r t} - \frac{1}{s-\overline{\psi}_i \overline{\xi}_r t}\right)$$

$$+ \sum_{(\alpha_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s-\psi_i \alpha_r} - \frac{1}{s-\overline{\psi}_i \overline{\alpha}_r}\right) - \sum_{(\beta_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s-\psi_i \beta_r} - \frac{1}{s-\overline{\psi}_i \overline{\beta}_r}\right)$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{s-a_k} - \frac{1}{s-\overline{a}_k}\right).$$

En se rappelant maintenant que les $\xi_r t, \alpha_r, \beta_r$ ont des parties imaginaires positives on voit que les infinis à parties imaginaires positives de $f_{r+1}(t,s)$ sont

$$\begin{aligned} &\overline{\psi}_i \overline{\xi}_r \\ & & (i = 1, \ldots, n-1) \\ &\overline{\psi}_i \overline{\alpha}_r,\ \overline{\psi}_i \beta_r \\ &\overline{a}_k & (k = 0, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

Il est ainsi facile de voir que le groupe des $\xi_{r+1} t$ est la totalité des quantités $\overline{\psi}_i \overline{\xi}_r t$, le groupe des α_{r+1} est la totalité des quantités $\overline{\psi}_i \overline{\beta}_r$ augmentée des quantités $\overline{a}_k$ et enfin le groupe β_{r+1} est la totalité des quantités $\overline{\psi}_i \overline{\alpha}_r$. Enfin si

$$\varepsilon_{r+1} = -\varepsilon_r$$

on voit que la forme supposée de $f_r(t,s)$ est correcte si

$$\varepsilon_r = (-1)^r.$$

Quant aux nombres M_r, N_r et P_r on voit que

$$M_{r+1} = (n-1) M_r,$$

$$N_{r+1} = (n-1) P_r + n,$$

$$P_{r+1} = (n-1) N_r.$$

Parce que l'on a $M_1 = n-1$, $N_1 = n$, $P_1 = 0$ il s'ensuit que

$$M_r = (n-1)^r,$$

$$N_r - P_r = 1 - (-1)^r (n-1)^r.$$

On a ainsi

$$\varepsilon_r M_r + N_r - P_r = (-1)^r (n-1)^r + 1 - (-1)^r (n-1)^r = 1$$

ce qui peut servir de contrôle.

En comparant maintenant les formules (6) et (10), on trouve d'abord que le groupe des points $\xi_r t$ est la totalité des points qu'on obtient du point t en y appliquant r transformations ψ de sorte que l'on peut écrire

$$(\xi_r t) = (\bar{\psi}_{i_1} \psi_{i_2} \bar{\psi}_{i_3} \ldots \psi_{i_r} t), \text{ si } r \text{ est pair,}$$

$$(\xi_r t) = (\bar{\psi}_{i_1} \psi_{i_2} \bar{\psi}_{i_3} \ldots \bar{\psi}_{i_r} t), \text{ si } r \text{ est impair,}$$

les indices i_ν parcourant tous la suite $1, 2, \ldots, n-1$.

Le nombre de ces points ainsi, comme nous l'avons déjà trouvé, est égal à $(n-1)^r$.

Pour les groupes (α), (β), $(\bar{\alpha})$, $(\bar{\beta})$ on obtient d'abord en comparant les formules (6) et (10) les formules de récursion

$$(\alpha_{r+1}) = (\bar{\psi}_i \beta_r) + (\bar{a}_k)$$

qui signifie que le groupe des α_{r+1} s'obtient en appliquant à chacun des points $\bar{\beta}_r$ chacune des transformations $\bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}$ et en y ajoutant les n pôles $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$.

Pour les autres groupes on obtient facilement des formules de récursion analogues que je réunis avec la formule trouvée tout à l'heure,

$$(\alpha_{r+1}) = (\bar{\psi}_i \bar{\beta}_r) + (\bar{a}_k),$$

$$(\beta_{r+1}) = (\bar{\psi}_i \bar{\alpha}_r),$$

$$(\bar{\alpha}_{r+1}) = (\psi_i \beta_r) + (a_k),$$

$$(\bar{\beta}_{r+1}) = (\psi_i \alpha_r).$$

En appliquant ces formules et en tenant compte des groupes déjà connus on trouve les expressions explicites des groupes (α), (β):

pour r nombre pair

$$(\alpha_r) = \bar{a} + (\xi_1 \bar{a}) + \cdots + (\xi_{r-1} \bar{a}),$$

$$(\bar{\alpha}_r) = a + (\bar{\xi}_1 a) + \cdots + (\bar{\xi}_{r-1} a),$$

$$(\beta_r) = \qquad (\xi_1 a) + \cdots + (\xi_r a),$$

$$(\bar{\beta}_r) = \qquad (\bar{\xi}_1 \bar{a}) + \cdots + (\bar{\xi}_r \bar{a}).$$

Pour r impair on trouve

$$(\alpha_r) = \bar{a} + (\xi_1 \bar{a}) + \cdots + (\xi_r \bar{a}),$$

$$(\bar{\alpha}_r) = a + (\bar{\xi}_1 a) + \cdots + (\bar{\xi}_r a),$$

$$(\beta_r) = \qquad (\xi_1 a) + \cdots + (\xi_{r-1} a),$$

$$(\bar{\beta}_r) = \qquad (\bar{\xi}_1 \bar{a}) + \cdots + (\bar{\xi}_{r-1} \bar{a}),$$

où j'ai désigné par a celui des pôles de la fonction $\Phi(s)$ qui se trouve dans le domaine élémentaire contenant l'axe réelle dans son intérieur.

$\bar{a}$ est la quantité conjuguée de a.

Pour abréger je vais appeler le point qui s'obtient en appliquant r transformations $\psi, \bar{\psi}$ à un point quelconque α l'image d'ordre r de α.

Des développements qui précèdent il s'ensuit que les noyaux itérés sont des fonctions rationnelles.

Pour en avoir une expression commode introduisons les notations abrégées

$$\Omega_\nu(t, s) = \sum_{i_1 \ldots i_\nu} \frac{1}{s - \psi_{i_1} \bar{\psi}_{i_2} \psi_{i_3} \ldots (t)}$$

et

$$\bar{\Omega}_\nu(t, s) = \sum_{i_1 \ldots i_\nu} \frac{1}{s - \bar{\psi}_{i_1} \psi_{i_2} \bar{\psi}_{i_3} \ldots (t)},$$

où $i, \ldots i_\nu$ prennent indépendamment les valeurs $1, \ldots, n-1$. Alors on peut écrire si r est un nombre pair

$$(11) \qquad 2\pi i f_r(t, s) = \bar{\Omega}_r(t, s) - \Omega_r(t, s)$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r-1} [\bar{\Omega}_\nu(\bar{a}, s) - \Omega_\nu(a, s)] - \sum_{\nu=1}^{r} [\bar{\Omega}_\nu(a, s) - \Omega_\nu(\bar{a}, s)]$$

et si r est un nombre impair

$$(12)\qquad 2\pi i f_r(t, s) = -\bar{\Omega}_r(t, s) + \Omega_r(t, s) + \sum_{\nu=0}^{r} [\bar{\Omega}_\nu(\bar{a}, s) - \Omega_\nu(a, s)] - \sum_{\nu=1}^{r-1} [\bar{\Omega}_\nu(a, s) - \Omega_\nu(\bar{a}, s)].$$

Par rapport à la formule pour le noyau $f_r(t, s)$

$$(13)\qquad f_r(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x_1) f(x_1, x_2) \ldots f(x_{r-1}, s)\, d x_1 \ldots d x_{r-1}$$

il est important de savoir dans quelles conditions il est permis de donner des valeurs complexes aux variables t et s jusqu'ici supposées réelles.

Pour répondre à cette question on doit se rendre compte des pôles que nous avons rencontrés en exécutant successivement les intégrations dans la formule précédente et qui sont les images successives des points t et s. Or si nous considérons la partie commune F des domaines élémentaires des fonctions $\Phi(s)$ et $\bar{\Phi}(s)$ qui contiennent l'axe des s réelles nous voyons facilement que si s est un point dans F, toutes les images de s se trouvent en dehors de F. Ainsi nous pouvons faire varier t et s dans le domaine F sans que l'expression (13) cesse de représenter la même fonction analytique. On voit aussi qu'il existe dans ces conditions une limite supérieure finie pour $f(t, x)$ et $f(x, s)$ pourvu qu'on exclue du domaine de s un voisinage des pôles a et $\bar{a}$ et x est une quantité réelle. Ainsi l'expression du noyau résolvant est valable quand t et s se trouvent dans le domaine F.

Le problème électrostatique.

Appelant σ la longueur de l'arc de la courbe C, $\varepsilon(\sigma)$ la densité de l'électricité en équilibre sur C nous aurons

$$\varepsilon(\sigma)\, d\sigma = \omega(s)\, d s,$$

où $\omega(s)$ est la solution de l'équation intégrale homogène

$$\omega(s) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s)\, \omega(t)\, d t = 0.$$

La fonction $\omega(s)$ peut être déterminée par l'équation

$$\omega(s) = \lim_{r=\infty} f_r(t, s).$$

Pour déterminer le potentiel de l'électricité en équilibre soit $\zeta = \xi + i\eta = \Phi(s)$ un point sur la courbe C et $z = x + iy$ un point à l'extérieur de C le potentiel cherché V est déterminé par la formule

$$V = \int_C \log r\, \varepsilon(\sigma)\, d\sigma,$$

où r est la distance des points ζ et z. Je puis aussi écrire

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \log r\, \omega(s)\, ds.$$

Mais puisque $\log r$ est la partie réelle de $\log(z - \zeta) = \log(z - \Phi(s))$ on peut aussi écrire

$$V = R \int_{-\infty}^{+\infty} \log(z - \Phi(s))\, \omega(s)\, ds,$$

où R désigne qu'il faut prendre la partie réelle de l'intégrale.

Pour les calculs suivants il vaut mieux considérer l'intégrale

$$K(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(s)\, ds}{z - \Phi(s)}, \tag{14}$$

dont les parties réelle et imaginaire nous donnent les dérivées premières de V.

Pour des points z extérieurs à la courbe C $K(z)$ est une fonction analytique, tandis que pour des points intérieurs on a $K(z) = 0$.

Pour avoir le prolongement analytique de $K(z)$ à l'intérieur de C il ne faut que changer le chemin d'intégration d'une manière convenable afin d'éviter le point singulier s_0 dans le demi-plan supérieur des s qui satisfait à l'équation

$$\Phi(s_0) = z.$$

On obtient ainsi la relation

$$2\pi i \frac{\omega(s_0)}{\Phi'(s_0)} = K(z),$$

d'où l'on voit qu'il ne faut aucune intégration pour avoir $K(z)$ si on connait $\omega(s)$. On peut aussi écrire la relation entre $K(z)$ et $\omega(s)$

$$2\pi i\, \omega(s)\, ds = K(z)\, dz,$$

où $z = \Phi(s)$. Cette équation n'est du reste que la relation connue de la théorie du potentiel entre la dérivée normale et la densité de l'électricité.

Pour avoir une expression analytique de $K(z)$ j'en calcule d'abord une expression approchée $K_r(z)$ introduisant dans la formule (14) au lieu de $\omega(s)$ $f_r(t, s)$.

Alors j'obtiens si r est un nombre pair

$$K_r(z) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{(\xi_\nu)} \frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu \bar{a})} - \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{(\xi_\nu)} \frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu a)}$$

$$+ \sum_{(\xi_r)} \frac{1}{z - \Phi(\xi_r t)}.$$

Si on donne à t la valeur $\bar{a}$ nous pouvons écrire

$$K_r(z) = \frac{1}{z - \Phi(\bar{a})} + \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{(\xi_\nu)} \left(\frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu \bar{a})} - \frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu a)}\right)$$

et en faisant $r = \infty$

$$K(z) = \frac{1}{z - \Phi(\bar{a})} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{(\xi_\nu)} \left(\frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu \bar{a})} - \frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu a)}\right).$$

Posant

$$K(z) = \frac{F'(z)}{F(z)},$$

on sait que $F(z)$ nous donne la représentation conforme de l'extérieur du domaine D sur un cercle. La fonction $F(\Phi(z))$ jouit d'une propriété intéressante qu'on peut mettre en évidence de la manière suivante.

Partons d'une fonction $F(\Phi)$ qui nous donne la représentation conforme de l'extérieur du domaine D sur le demi-plan inférieur.

Puisque $\Phi(z)$ parcourt la frontière de D quand z décrit l'axe réel, il est clair que $f(z) = F(\Phi(z))$ parcourt l'axe réel quand z parcourt les valeurs réelles. Du principe de Schwarz il s'ensuit alors que si z et $\bar{z}$ sont des imaginaires conjuguées, $f(z)$ et $f(\bar{z})$ sont aussi des quantités conjuguées.

En se rappelant maintenant que $\Phi(z)$ prend chaque valeur une fois et une seule à l'extérieur du domaine D, si z parcourt en partie E'_0 du domaine élémentaire E_0 qui se trouve dans le demi-plan inférieur, on conclut que $f(z)$ prend toute valeur négativement imaginaire une et une seule fois, dans E'_0. A cause de la propriété de symétrie de $f(z)$ on voit dès lors que la réunion F de E'_0 et de son symétrique $\bar{E}'_0$ par rapport à l'axe réel constitue un domaine élémentaire pour la fonction $f(z)$.

On a par définition

$$\Phi(\psi_\nu(z)) = \Phi(z)$$

et par suite

$$F(\Phi(\psi_\nu(z))) = F(\Phi(z))$$

ou encore

$$f(\psi_\nu(z)) = f(z).$$

En changeant ψ_ν en $\bar{\psi}_\nu$ et z en $\bar{z}$, on aura aussi

$$f(\bar{\psi}_\nu(\bar{z})) = f(\bar{z})$$

ou bien puisque $\bar{z}$ est une quantité arbitraire

$$f(\bar{\psi}_\nu(z)) = f(z).$$

La fonction reste donc invariable pour les transformations ψ_ν et $\bar{\psi}_\nu$ ce qui permet de la prolonger analytiquement en dehors du domaine F.

Mais il est aussi facile de voir que $f(z)$ est une fonction uniforme, car, en formant les images successives du domaine élémentaire F, on voit que chaque image présente dans son intérieur un contour libre auquel s'applique des images d'ordre supérieur, de sorte que les images de F ne sauraient couvrir le plan plus d'une fois. Il est facile aussi de voir que $f(z)$ existe dans tout le plan.

ZUR THEORIE DER FAST PERIODISCHEN FUNKTIONEN.

I.

Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen.

Von

HARALD BOHR

in Kopenhagen.

Meinem Lehrer und Freund Professor Edmund Landau zu seinem 25-jährigen Doktorjubiläum gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

In zwei Abhandlungen unter dem gemeinsamen obigen Titel, von denen ich hier die erste vorlege, werde ich die Theorie einer gewissen Klasse von Funktionen einer reellen Variabeln entwickeln.[1] Obwohl die beiden Abhandlungen innerlich mit einander verbunden sind und die zweite auf den Resultaten der ersten basiert, wird jede der Abhandlungen doch insoferne ein Ganzes bilden, als sie ihre besondere Problemstellung behandelt.

1°. Es sei $f(x)$ eine Funktion der reellen Variabeln x, die *im ganzen Intervalle* $-\infty < x < \infty$ *definiert und stetig ist.* Der bequemeren Formulierung halber werde ich die Funktion $f(x)$ nicht als reell voraussetzen, sondern zulassen, dass $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ ist, wo $u(x)$ und $v(x)$ stetige reelle Funktionen der reellen Variabeln x bedeuten. Wenn, bei einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$, die reelle Zahl $\tau = \tau(f, \varepsilon)$ für alle x der Ungleichung

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon$$

genügt, werde ich τ eine *zu der gegebenen Zahl* ε *gehörige Verschiebungszahl der Funktion* $f(x)$ nennen. Die Definition unserer Funktionenklasse lautet nun folgendermassen:

Eine (für $-\infty < x < \infty$ *stetige) Funktion* $f(x)$ *soll* **fast periodisch** *heissen, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Länge* $l = l(\varepsilon) > 0$ *derart gibt, dass jedes Intervall* $\alpha < x < \beta$ *der Länge* $\beta - \alpha = l$ *mindestens eine Verschiebungszahl* $\tau = \tau(f, \varepsilon)$ *enthält.*

Mit anderen Worten: zu jedem festen ε soll es unendlich viele Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ geben, und die Menge dieser Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ soll nirgends beliebig grosse Lücken aufweisen. Ich füge gleich hinzu, dass es diese letzte Forderung (also die Forderung der Existenz der Zahlen $l(\varepsilon)$) ist, welche erst die ganze Theorie ermöglicht. In dem ersten der Zusätze, welche dieser Abhandlung hinzugefügt sind, will ich auf diese Frage näher eingehen.

Es ist klar, dass die (stetigen) rein periodischen Funktionen in der Klasse der fast periodischen Funktionen enthalten sind; denn es können ja, falls $f(x)$ rein periodisch mit der Periode p ist, für jedes ε die sämtlichen Perioden np ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) als Verschiebungszahlen verwendet werden, und es kann also hier die Länge $l = l(\varepsilon)$ sogar von ε unabhängig (etwa $l = 2p$) gewählt werden.

[1] Eine kurze Mitteilung über einige der wesentlichsten Resultate habe ich in zwei Noten in den Comptes rendus der Pariser Akademie »Sur les fonctions presque périodiques« (22. Okt. 1923) und »Sur l'approximation des fonctions presque périodiques par des sommes trigonométriques« (26. Nov. 1923) gegeben.

2°. Das Hauptresultat unserer Untersuchungen besteht in dem Nachweis, dass — allgemein gesprochen — die fast periodischen Funktionen mit denjenigen Funktionen übereinstimmen, welche *in eine abzählbare (oder endliche) Anzahl von periodischen Schwingungen* $a_n e^{i\lambda_n x}$ *aufgelöst werden können*, wobei die Exponenten λ_n ganz beliebige reelle Zahlen sind. Ebenso wie die rein periodischen Funktionen als diejenigen Funktionen charakterisiert werden können, welche in eine harmonische Folge von Schwingungen, d. h. in Schwingungen $a_n e^{inkx}$, zerlegt werden können, ergibt uns also die Klasse der fast periodischen Funktionen $f(x)$ die Klasse derjenigen Funktionen, welche in eine beliebige (harmonische oder unharmonische) Folge von Schwingungen $a_n e^{i\lambda_n x}$ aufgelöst werden können.

3°. Die vorliegende erste Abhandlung bringt eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen rein periodischer Funktionen. Als Hauptsatz dieser letzteren Theorie mag der folgende bekannte Satz bezeichnet werden:

Zu jeder rein periodischen (stetigen) Funktion $f(x)$ *mit der Periode* $p=\frac{2\pi}{k}$ *gehört eine bestimmte Reihe der Form* $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inkx}$, *die Fourierreihe der Funktion, welche ihrerseits die Funktion* $f(x)$ *eindeutig bestimmt, und die im Mittel gegen* $f(x)$ *konvergiert in dem Sinne, dass der Ausdruck*

$$S_N=\frac{1}{p}\int_0^p \left| f(x)-\sum_{-N}^{N} a_n e^{inkx}\right|^2 dx$$

für $N\to\infty$ *gegen* o *konvergiert.*

Das Ziel dieser ersten Abhandlung ist vor allem die Herleitung des folgenden Satzes über fast periodische Funktionen, welcher das vollständige Analogon des eben erwähnten Satzes über rein periodische Funktionen bildet.

Zu jeder fast periodischen Funktion $f(x)$ *gehört eine eindeutig bestimmte Folge von reellen Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *und eine Reihe der Form* $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$, *die »Fourierreihe» der Funktion* $f(x)$. *Diese Fourierreihe bestimmt ihrerseits die Funktion* $f(x)$ *in eindeutiger Weise und konvergiert im Mittel gegen* $f(x)$ *in dem Sinne, dass der Ausdruck*

$$S_N=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left| f(x)-\sum_{1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}\right|^2 dx$$

für $N\to\infty$ *gegen* o *konvergiert.*

Dagegen braucht die zu einer fast periodischen Funktion $f(x)$ gehörige Fourierreihe nicht im gewöhnlichen Sinne zu konvergieren; es gibt ja schon unter den stetigen rein periodischen Funktionen $f(x)$ Beispiele von Funktionen, deren Fourierreihe nicht überall konvergiert. Es scheint mir aber von einem gewissen Interesse zu sein, dass in der allgemeinen Klasse der fast periodischen Funktionen — im Gegensatze zu der spezielleren Klasse der rein periodischen — die Nichtkonvergenz einer Fourierreihe doch gewissermassen als ein »Ausnahmefall» betrachtet werden kann; in der Tat kann, wenn $f(x)$ eine »ganz beliebige» fast periodische Funktion und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ihre zugehörige Exponentenfolge ist, »im Allgemeinen» erwartet werden, dass keinerlei lineare Verknüpfungen zwischen den λ bestehen, d. h. dass die Grössen λ_n *linear unabhängig* sind, und in diesem Falle werden wir beweisen, *dass die Fourierreihe* $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ *im gewöhnlichen Sinne gegen* $f(x)$ *konvergiert, sogar gleichmässig im ganzen Intervalle* $-\infty < x < \infty$.

4°. Wenn es sich bei einer Untersuchung über rein periodische Funktionen, etwa mit der Periode $p = \frac{2\pi}{k}$, speziell darum handelt die überall stetigen Funktionen $f(x)$ herauszugreifen und zu charakterisieren, ist die Betrachtung der Fourierreihe bekanntlich kein besonders geeignetes Mittel, weil man ja keine einfache notwendige und hinreichende Bedingung kennt, welche eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ erfüllen muss um die Folge der Fourierkonstanten einer stetigen Funktion zu sein. Hier ist ein wesentlich andersartiges Verfahren bequemer, nämlich dasjenige, bei dem man die Funktion $f(x)$ nicht gerade durch die Abschnitte $\sum_{-N}^{N} a_n e^{inkx}$ ihrer Fourierreihe, sondern durch ganz beliebige trigonometrische Polynome $\sum_{-N}^{N} b_n e^{inkx}$ zu approximieren sucht und dabei die Güte der Approximation nicht durch die Grösse des mittleren Fehlers

$$\frac{1}{p}\int_0^p \left| f(x) - \sum_{-N}^{N} b_n e^{inkx} \right|^2 dx,$$

sondern einfach durch die obere Grenze des absoluten Wertes der Differenz

$$f(x) - \sum_{-N}^{N} b_n e^{inkx}$$

beurteilt. Es gilt nämlich nach WEIERSTRASS der Satz, *dass eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Funktion* $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *eine überall stetige rein periodische Funktion der Periode* $\frac{2\pi}{k}$ *ist, darin besteht, dass* $f(x)$ *durch eine Folge von trigonometrischen Polynomen der Form* $\sum_{-N}^{N} b_n e^{inkx}$ *gleichmässig approximiert werden kann.*

Eine Verallgemeinerung dieses letzten Satzes wurde von BOHL in seiner sehr interessanten Magisterdissertation[1] gegeben. BOHL stellt sich dort die folgende Aufgabe: *Es sei eine endliche Anzahl von positiven Grössen* $k_1, k_2, \ldots, k_q$ *gegeben; dann soll die Klasse derjenigen stetigen Funktionen* $f(x)$ *charakterisiert werden, welche sich durch eine Folge von trigonometrischen Summen der Form*

$$\sum b_n e^{i(n_1 k_1 + \cdots + n_q k_q)x}$$

gleichmässig approximieren lassen.

Diese Aufgabe wurde von BOHL dadurch gelöst, dass er die folgende Antwort gab:

Dafür, dass die Funktion $f(x)$ *der erwähnten Forderung genüge, ist notwendig und hinreichend, dass sie die folgende »quasi-periodische» Eigenschaft besitzt: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *soll es ein* $\delta > 0$ *geben, derart, dass die Ungleichung*

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon \qquad (-\infty < x < \infty)$$

bei jedem τ *besteht, für welches sich die* q *Grössen* $k_1\tau, k_2\tau, \ldots, k_q\tau$ *von ganzen Multipla von* 2π *um weniger als* δ *unterscheiden.* Mit anderen Worten, es soll jedes τ mit der erwähnten Eigenschaft eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(f, \varepsilon)$ sein.

Man sieht somit, dass schon in den Untersuchungen von BOHL die Idee der Einführung der Verschiebungszahlen den Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung des Begriffes der reinen Periodizität bildet. Aber ganz abgesehen davon, dass die Exponenten λ_n in den von BOHL betrachteten trigonometrischen Summen nicht, wie bei uns, beliebige reelle Zahlen sind, sondern Zahlen der speziellen Art, als lineare Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten einer endlichen Anzahl von Grössen $k_1, \ldots, k_q$ darstellbar zu sein, besteht ein prinzipieller

[1] P. BOHL, Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten (Dorpat, 1893). Ich verdanke es einer freundlichen Mitteilung von Herrn HADAMARD, auf die schönen Untersuchungen von BOHL (und die später zu erwähnenden von ESCLANGON) aufmerksam geworden zu sein, welche mir bei der Einsendung meiner ersten Comptes rendus Note unbekannt geblieben waren.

Unterschied zwischen den Problemstellungen der BOHL'schen Theorie und der hier zu entwickelnden. Bei BOHL werden nämlich die Exponenten λ_n (d. h. bei ihm die Grössen $k_1, \ldots, k_q$) als im voraus gegebene Zahlen angesehen, in dem Sinne, dass diese Zahlen in der oben angeführten quasiperiodischen Charakterisierung seiner Funktionen explizite auftreten, während in unserer Definition einer fast periodischen Funktion von den Exponenten λ_n gar nicht die Rede ist, und es bei uns vielmehr eine Hauptaufgabe ist zu zeigen, dass zu jeder fast periodischen Funktion $f(x)$ eine bestimmte Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ gehört.

Die vorliegende erste Abhandlung, wo es sich um die Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen handelt, hat fast gar keine Berührungspunkte mit der BOHL'schen Untersuchung. Ganz anders verhält es sich mit den Untersuchungen, welche wir in der zweiten Abhandlung bringen werden, wo es sich darum handeln wird, eine fast periodische Funktion $f(x)$ durch beliebige trigonometrische Summen der Form $\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}$, und nicht gerade durch die Abschnitte der Fourierreihe der Funktion, zu approximieren, und wo wir u. a. den folgenden allgemeinen Satz beweisen werden:

Für die Fastperiodizität einer Funktion $f(x)$ ist notwendig und hinreichend, dass sie sich durch irgend eine Folge von trigonometrischen Summen $\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}$ (wo den reellen Exponenten λ_n gar keine Bedingungen auferlegt sind) gleichmässig approximieren lässt.

Es wird daher zweckmässig sein, bis zu der zweiten Abhandlung damit zu warten, auf die Untersuchung von BOHL — und einige damit eng zusammenhängende Untersuchungen von ESCLANGON — näher einzugehen, und zu zeigen, wie das oben erwähnte BOHL'sche Resultat sich von selbst in den Rahmen der allgemeinen Theorie der fast periodischen Funktionen einordnet.

5°. Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Theorie der fast periodischen Funktionen wichtige Anwendungen auf die Theorie der Dirichlet'schen Reihen erlaubt und vor allem dazu dienen kann, Licht über die bisher nur sehr ungenügend aufgeklärte Frage zu werfen, welche Eigenschaften eine analytische Funktion besitzen muss um in eine Dirichlet'sche Reihe entwickelbar zu sein. Von dieser Anwendung — wie auch von etwaigen Anwendungen auf Probleme der Mechanik — werde ich aber in diesen beiden Abhandlungen ganz absehen, hoffe aber bei einer späteren Gelegenheit ausführlich darauf eingehen zu können.

KAPITEL I.

Die allgemeine Theorie der Fourierreihen fast periodischer Funktionen.

§ 1. Die Invarianz der Fastperiodizität gegenüber einfachen Rechenoperationen.

Wir werden zunächst zwei Sätze beweisen, welche zeigen, dass gewisse Eigenschaften von Funktionen die in einem endlichen (abgeschlossenen) Intervall stetig sind, also auch von stetigen rein periodischen Funktionen, ebenfalls unseren fast periodischen Funktionen zukommen. Die sehr einfachen Beweise beruhen auf der in der Definition einer fast periodischen Funktion geforderten Existenz der Länge $l=l(\varepsilon)$; aus der Eigenschaft dieser Zahl $l=l(\varepsilon)$ folgt nämlich sofort, dass wir, falls wir ein festes Intervall I der Länge l betrachten, z. B. das Intervall $-\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2}$, im Stande sind (siehe Fig. 1) zu jeder beliebig gegebenen Zahl x_0 eine Verschiebungszahl $\tau=\tau(\varepsilon)=\tau(\varepsilon, x_0)$ so zu finden, dass x_0 bei einer Verschiebung

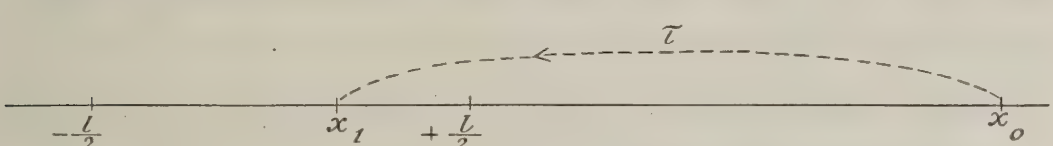


Fig. 1.

um τ in einen Punkt $x_1=x_0+\tau$ dieses Intervalles I übergeht — wir haben ja nur die Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon)$ so zu wählen, dass sie dem Intervalle $-x_0-\frac{l}{2}<x<-x_0+\frac{l}{2}$ der Länge l angehört — wodurch es bei den Beweisen ermöglicht wird die Betrachtungen so zu sagen auf ein festes endliches Intervall zu beschränken.

Satz I. *Jede fast periodische Funktion $f(x)$ ist beschränkt*, d. h. es gibt eine Konstante $G=G(f)$ derart, dass die Ungleichung $|f(x)|\leqq G$ für alle x besteht.

Beweis. Es sei ε etwa gleich 1 gewählt und $l=l(1)$ die zugehörige Länge. Es bezeichne ferner g das Maximum der stetigen Funktion $|f(x)|$ im endlichen (abgeschlossenen) Intervall $-\frac{l}{2}\leqq x\leqq\frac{l}{2}$. Dann hat offenbar die Zahl $G=g+1$ die erwünschte Eigenschaft; denn zu jedem beliebig gegebenen x_0 lässt sich ja (siehe

Fig. 1) eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(1)$ so bestimmen, dass die Zahl $x_1 = x_0 + \tau$ im Intervalle $-\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2}$ gelegen ist und daher

$$|f(x_0)| \leqq |f(x_1)| + |f(x_0) - f(x_1)| \leqq g + 1 = G.$$

Satz II. *Jede fast periodische Funktion $f(x)$ ist gleichmässig stetig im ganzen Intervalle* $-\infty < x < \infty$, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für jedes Punktepaar x', x'' mit $|x' - x''| < \delta$ die Ungleichung $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ besteht.

Beweis. Zu der gegebenen Zahl $\frac{\varepsilon}{3}$ bestimmen wir die Länge $l = l\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, betrachten das abgeschlossene Intervall $-\frac{l}{2} - 1 \leqq x \leqq \frac{l}{2} + 1$ und bestimmen eine Zahl $\delta < 1$ derart, dass für jedes Punktepaar y', y'' mit einem Abstand $|y' - y''| < \delta$, welches in dem festen Intervalle $\left(-\frac{l}{2} - 1, \frac{l}{2} + 1\right)$ gelegen ist, die Ungleichung $|f(y') - f(y'')| < \frac{\varepsilon}{3}$ besteht. Dann genügt dieses δ offenbar der Bedingung des Satzes. Denn für ein beliebiges Punktepaar x', x'' mit $|x' - x''| < \delta$ können wir eine zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörige Verschiebungszahl $\tau = \tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ so wählen, dass die Zahl $y' = x' + \tau$ in das Intervall $\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$ fällt; dann liegt (wegen $|x' - x''| < 1$) die Zahl $y'' = x'' + \tau$ gewiss im Intervall $\left(-\frac{l}{2} - 1, \frac{l}{2} + 1\right)$, und es ist

$$|f(x') - f(x'')| \leqq |f(x') - f(y')| + |f(x'') - f(y'')| + |f(y') - f(y'')| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Aus dem Satze II folgt sofort das in der Folge sehr oft zu benutzende

Corollar. *Es sei $f(x)$ eine fast periodische Funktion und $\varepsilon_1 > 0$ sowie $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ derart, dass, falls τ_1 irgend eine zu ε_1 gehörige Verschiebungszahl unserer Funktion $f(x)$ ist, jede Zahl τ_2, deren Abstand von τ_1 kleiner als δ ist, eine zu ε_2 gehörige Verschiebungszahl sein muss.*

In der Tat brauchen wir nur (mit Hilfe des Satzes II) die Zahl $\delta > 0$ so zu wählen, dass für jedes Punktepaar x', x'' mit $|x' - x''| < \delta$ die Ungleichung $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ besteht. Falls nämlich τ_1 eine zu ε_1 gehörige Verschiebungszahl ist, gilt ja für jedes τ_2 mit $|\tau_2 - \tau_1| < \delta$ (und alle x) die Ungleichung

$$|f(x+\tau_2)-f(x)| \leqq |f(x+\tau_2)-f(x+\tau_1)| + |f(x+\tau_1)-f(x)| < (\varepsilon_2-\varepsilon_1)+\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Nach den obigen vorbereitenden Sätzen gehen wir nunmehr zum Beweise des folgenden ersten Hauptsatzes über.[1]

Satz III. *Die Summe zweier fast periodischer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist wieder eine fast periodische Funktion.*

Beweis. Der Satz wird offenbar bewiesen sein, falls wir zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ eine Länge $l = l\,(f, g, \varepsilon)$ derart angeben können, dass jedes Intervall $\alpha < x < \beta$ der Länge l mindestens einen Punkt τ^* enthält, welcher gleichzeitig eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist; denn ein solches τ^* wird ja, wegen der für alle x giltigen Ungleichung

$$|\{f(x+\tau^*)+g(x+\tau^*)\}-\{f(x)+g(x)\}| \leqq |f(x+\tau^*)-f(x)| + |g(x+\tau^*)-g(x)|,$$

gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Summe $f(x)+g(x)$ sein. Um die Existenz solcher gemeinsamer Verschiebungszahlen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ zu beweisen, werden wir natürlich gewisse charakteristische Eigenschaften der von den Verschiebungszahlen einer fast periodischen Funktion gebildeten Menge heranziehen müssen; die wesentlichste Eigenschaft (neben der im obigen Corollar ausgesprochenen »Unbestimmtheit» der Verschiebungszahlen), die wir zu benutzen haben, ist die folgende: sind τ_1 und τ_2 zwei beliebige zu einer Zahl ε_0 gehörige Verschiebungszahlen einer fast periodischen Funktion $f(x)$, so wird die Summe $\tau_1+\tau_2$ und daher auch (da mit τ_2 auch $-\tau_2$ eine Verschiebungszahl ist) die Differenz $\tau_1-\tau_2$ wiederum eine Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ sein, die zwar nicht zu ε_0 zu gehören braucht, wohl aber zu $2\,\varepsilon_0$.

Der Beweis verläuft nun folgendermassen: Nach dem Corollar des Satzes II wird die Zahl δ so bestimmt, dass, falls τ eine beliebige zu $\frac{\varepsilon}{4}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist, jede Zahl $\tau+\delta'$ mit $|\delta'| < \delta$ eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl dieser Funktion $f(x)$ darstellt. Und es wird ferner — was nach der Definition der fast periodischen Funktionen möglich ist — die Länge $l_0 = l_0(f, g, \varepsilon)$ so bestimmt, dass jedes Intervall der Länge l_0 sowohl eine zu $\frac{\varepsilon}{8}$

---

[1] Es sei ausdrücklich bemerkt, dass die Richtigkeit dieses Satzes wesentlich durch die, in der Definition geforderte, Existenz einer Länge $l = l(\varepsilon)$ bedingt ist (vgl. Zusatz 1).

gehörige Verschiebungszahl $\tau_f = \tau_f\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$ der Funktion $f(x)$ als auch eine zu $\frac{\varepsilon}{4}$ gehörige Verschiebungszahl $\tau_g = \tau_g\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ der Funktion $g(x)$ enthält.

Wir betrachten nunmehr (siehe Fig. 2) die sämtlichen Intervalle I_n der Form $n l_0 < x < (n+1) l_0$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ und bestimmen in jedem dieser Intervalle I_n zwei Verschiebungszahlen $\tau_f = \tau_f\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$ und $\tau_g = \tau_g\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$, die wir mit $\tau_f^{(n)}$ und $\tau_g^{(n)}$ bezeichnen. Wir bilden die Differenzen $d^{(n)} = \tau_f^{(n)} - \tau_g^{(n)}$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$, welche

Fig. 2.

sämtlich numerisch kleiner als l_0 sind, d. h. im Intervalle $-l_0 < x < l_0$ liegen. Das Intervall $-l_0 < x < l_0$ teilen wir in eine endliche Anzahl, M, gleiche Teile, wobei M so gross gewählt ist, dass die Teillänge $\frac{2\, l_0}{M}$ kleiner als die obige Zahl δ ist, und sehen bei jeder der unendlich vielen Differenzen $d^{(n)}$ nach, in welches der M Teilintervalle $i_1, i_2, \ldots, i_M$ der Form $\alpha_m \leqq x < \alpha_m + \frac{2\, l_0}{M}$ sie fällt. Es seien $i_{m_1}, i_{m_2}, \ldots, i_{m_P}$ (wo $1 \leqq P \leqq M$ ist) diejenigen der Teilintervalle i_m, in welche überhaupt eine der unendlich vielen Differenzen $d^{(n)}$ zu liegen kommt, und es sei die Zahl $X > l_0$ so gross gewählt, dass unter den im Intervalle $(-X, X)$ enthaltenen Intervallen I_n gewiss P solche existieren, deren entsprechende Differenzen $d^{(n)}$ je in eines der obigen P Teilintervalle $i_{m_1}, i_{m_2}, \ldots, i_{m_P}$ fallen, also dass jede überhaupt mögliche Differenz $d^{(n)}$ bereits im Intervalle $(-X, X)$ »vertreten» ist.

Ich behaupte alsdann, dass die Länge $l = 4\, X$ die gewünschte Eigenschaft besitzt, d. h. dass in einem beliebigen Intervall dieser Länge, etwa dem Intervalle $(\alpha - 2\, X, \alpha + 2\, X)$, eine Zahl τ^* existiert, welche eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige gemeinsame Verschiebungszahl der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist. Wir betrachten das mittlere Intervall $(\alpha - X, \alpha + X)$ der Länge $2\, X$; dies enthält gewiss (da seine Länge $> 2\, l_0$ ist) eines der Intervalle I_n, etwa das Intervall I_p (siehe Fig. 3).

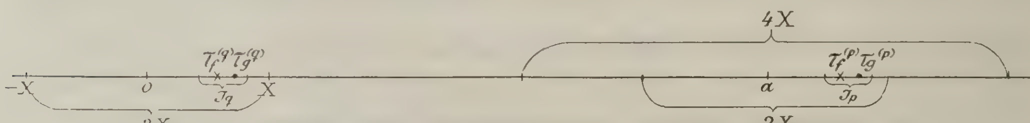


Fig. 3.

Danach wählen wir, was nach dem obigen möglich ist, in dem festen Intervalle $(-X, X)$ ein solches Intervall I_n, etwa I_q, dass die zu I_q gehörige Differenz $d^{(q)}=\tau_f^{(q)}-\tau_g^{(q)}$ demselben Teilintervalle i_{m_r} angehört wie die zu I_p gehörige Differenz $d^{(p)}=\tau_f^{(p)}-\tau_g^{(p)}$. Dann ist $|d^{(p)}-d^{(q)}|<\delta$ und somit

$$|(\tau_f^{(p)}-\tau_f^{(q)})-(\tau_g^{(p)}-\tau_g^{(q)})|=|d^{(p)}-d^{(q)}|<\delta.$$

Ich werde zeigen, dass die Zahl $\tau_g^{(p)}-\tau_g^{(q)}=\tau^*$ von der gewünschten Art ist. In der Tat:

1) Diese Zahl $\tau^*=\tau_g^{(p)}-\tau_g^{(q)}$ liegt im Intervalle $(-\alpha+2X, \alpha+2X)$, weil $\tau_g^{(p)}$ im Intervalle $(\alpha-X, \alpha+X)$ und $\tau_g^{(q)}$ im Intervalle $(-X, X)$ gelegen sind.

2) Es ist $\tau^*=\tau_g^{(p)}-\tau_g^{(q)}$ eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $g(x)$, weil $\tau_g^{(p)}$ und $\tau_g^{(q)}$ beide Verschiebungszahlen dieser Funktion $g(x)$ sind, welche zu $\frac{\varepsilon}{4}$ gehören.

3) Es ist aber τ^* auch eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$; denn die Zahl $\tau_f^{(p)}-\tau_f^{(q)}$ ist eine zu $\frac{\varepsilon}{4}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$, weil sowohl $\tau_f^{(p)}$ wie $\tau_f^{(q)}$ Verschiebungszahlen dieser Funktion sind, welche zu $\frac{\varepsilon}{8}$ gehören, und es wird daher nach der Bestimmung von δ, da die Zahl $\tau^*=\tau_g^{(p)}-\tau_g^{(q)}$ von der Zahl $\tau_f^{(p)}-\tau_f^{(q)}$ um weniger als δ abweicht, die Zahl τ^* eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ sein.

Aus dem Satze III folgt sofort, dass die Summe einer beliebigen endlichen Anzahl von fast periodischen Funktionen wieder eine fast periodische Funktion ist. Da eine rein periodische stetige Funktion einen Spezialfall einer fast periodischen Funktion darstellt, ist hierin das Corollar enthalten:

Corollar. *Die Summe einer endlichen Anzahl von stetigen rein periodischen Funktionen — also speziell jede Summe* $\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n x}$, *wo die* λ_n *beliebige reelle Zahlen sind — ist eine fast periodische Funktion.*

Dieses Corollar hat eine interessante Beziehung zur Theorie der diophantischen Approximationen, indem man zeigen kann, dass es seinem eigentlichen Inhalte nach mit einem bekannten DIRICHLET-KRONECKER'schen Satze dieser Theorie — in einer von BOHL und WENNBERG verschärften Form — übereinstimmt. Um den Gang der Entwicklung nicht zu unterbrechen, werde ich aber erst in Zusatz 2 am Ende der Abhandlung auf diese Beziehung näher eingehen.

Mit Hilfe des Satzes III beweist man leicht, unter Benutzung eines bekannten Kunstgriffes, den folgenden

Satz IV. *Das Produkt zweier fast periodischer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist wieder fast periodisch.*

Beweis: In dem Spezialfall, wo der eine Faktor eine Konstante ist, ist der Satz trivial. Es ist also mit $g(x)$ auch $-g(x)$ eine fast periodische Funktion, und nach dem Satze III daher auch jede der beiden Funktionen $f(x)+g(x)$ und $f(x)-g(x)$. Nun gilt aber die Identität

$$f(x)\,g(x)=\frac{1}{4}\{(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2\},$$

und es genügt daher zu beweisen, dass das Quadrat einer beliebigen fast periodischen Funktion $\varphi(x)$ wieder fast periodisch ist. Dies ist aber sofort klar; denn nach dem Satze I ist $\varphi(x)$ beschränkt, etwa $|\varphi(x)|\leqq G$, und es ist daher bei jedem τ

$$|\{\varphi(x+\tau)\}^2-\{\varphi(x)\}^2|=|\varphi(x+\tau)+\varphi(x)|\cdot|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|\leqq 2\,G\,|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|,$$

aus welcher Ungleichung hervorgeht, dass die Zahl τ gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\{\varphi(x)\}^2$ ist, falls sie eine zu $\frac{\varepsilon}{2G}$ gehörige Verschiebungszahl der ursprünglichen Funktion $\varphi(x)$ ist, womit die Fastperiodizität von $\{\varphi(x)\}^2$ offenbar bewiesen ist.

Corollar. *Mit $f(x)$ ist auch $|f(x)|^2$ fast periodisch.*

Denn aus der Ungleichung $||f(x+\tau)|-|f(x)||\leqq|f(x+\tau)-f(x)|$ folgt sofort, dass mit $f(x)$ auch $|f(x)|$ und daher, nach dem Satze IV, auch das Quadrat $|f(x)|^2$ fast periodisch ist. Wir hätten natürlich auch so schliessen können: Es ist $|f(x)|^2=f(x)\bar{f}(x)$, wo $\bar{f}(x)$ die zu der Funktion $f(x)=u(x)+i\,v(x)$ konju-

gierte Funktion $u(x)-iv(x)$ bezeichnet, welche offenbar gleichzeitig mit $f(x)$ fast periodisch ist.

Satz V. *Ist $f(x)$ fast periodisch und die untere Grenze g von $|f(x)|$ grösser als* 0, *so ist auch $\frac{1}{f(x)}$ fast periodisch.*

Beweis. Bei jedem τ ist

$$\left|\frac{1}{f(x+\tau)}-\frac{1}{f(x)}\right|=\left|\frac{f(x+\tau)-f(x)}{f(x)f(x+\tau)}\right|\leqq\frac{1}{g^2}|f(x+\tau)-f(x)|,$$

und es ist somit die Zahl τ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\frac{1}{f(x)}$, falls sie eine zu $g^2\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der ursprünglichen Funktion $f(x)$ ist.

Aus den Sätzen III, IV und V folgt, *dass jede rationale Operation mit fast periodischen Funktionen immer wieder zu fast periodischen Funktionen führt, wenn nur nicht durch Funktionen, die beliebig nahe an Null kommen, dividiert wird.*

Wir beweisen schliesslich den

Satz VI. *Die Grenzfunktion $F(x)$ einer im ganzen Intervalle $-\infty<x<\infty$ gleichmässig konvergenten Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, deren einzelne Funktionen $f_n(x)$ fast periodisch sind, ist wieder eine fast periodische Funktion.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass, wegen der Stetigkeit der Funktionen $f_n(x)$, die Grenzfunktion $F(x)$ gewiss auch stetig ist. Es sei nunmehr $\varepsilon>0$ beliebig gegeben. Wir wählen die Zahl $N=N(\varepsilon)$ so gross, dass für alle x die Ungleichung $|F(x)-f_N(x)|\leqq\frac{\varepsilon}{3}$ besteht. Dann gilt offenbar für jedes τ die Ungleichung

$$|F(x+\tau)-F(x)|\leqq|f_N(x+\tau)-f_N(x)|+\frac{2\varepsilon}{3}\qquad(-\infty<x<\infty).$$

Es ist daher jede zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f_N(x)$ gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl unserer Funktion $F(x)$; und weil $f_N(x)$ fast periodisch ist, gibt es also eine Länge $l=l(\varepsilon)$ derart, dass jedes Intervall dieser Länge eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $F(x)$ enthält.

Corollar. *Jede für $-\infty<x<\infty$ gleichmässig konvergente Reihe der Form*

$\sum\limits_{1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$, *wo die Exponenten* λ_n *beliebige reelle Zahlen sind, stellt durch ihre Summe* $F(x)$ *eine fast periodische Funktion dar.*

Denn die Abschnitte $f_n(x)$ der Reihe sind ja nach dem Corollar des Satzes III fast periodische Funktionen, und nach Voraussetzung konvergiert $f_n(x)$ für $n \to \infty$ gleichmässig gegen $F(x)$.

§ 2.

Der Mittelwertsatz.

Wir beweisen nunmehr den folgenden Satz, welcher uns (zusammen mit dem Satze IV) den Schlüssel zu der Auflösung einer fast periodischen Funktion in rein periodische Schwingungen gibt.

Satz VII. (Mittelwertsatz.) *Für jede fast periodische Funktion* $f(x)$ *existiert der »Mittelwert«*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx,$$

d. h. der Ausdruck $\frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx$ *strebt für* $T \to \infty$ *gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert, den wir mit* $M\{f(x)\}$ *bezeichnen werden.*

Beweis. Wir wenden das allgemeine Konvergenzprinzip an. Es sei also $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; wir haben die Existenz einer Zahl $T_0 = T_0(\varepsilon)$ derart zu zeigen, dass für $T_1 > T_0$, $T_2 > T_0$ die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(x)\, dx - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

besteht.

Zunächst bestimmen wir die Länge $l_0 = l_0(\varepsilon)$ derart, dass jedes Intervall dieser Länge eine zu $\frac{\varepsilon}{10}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ enthält. Nachdem l_0 festgelegt ist, bestimmen wir die positive Zahl X so gross, dass

$$\frac{l_0 G}{X} < \frac{\varepsilon}{10}$$

ist, wo G die obere Grenze der (beschränkten) Funktion $|f(x)|$ bezeichnet. Und schliesslich sei $T_0 > X$ so gewählt, dass auch

$$\frac{XG}{T_0} < \frac{\varepsilon}{10}$$

ist. Ich behaupte, dass T_0 die gewünschte Eigenschaft besitzt; dies wird offenbar nachgewiesen sein, falls wir gezeigt haben, dass bei jedem $T > T_0$ der Ausdruck $\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)\,dx$ von der (von T unabhängigen) Zahl

$$\frac{1}{X}\int\limits_0^X f(x)\,dx = U$$

um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ abweicht.

Es sei also $T > T_0$. Wir bestimmen (durch successive Wahl) eine Folge $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ von zu $\frac{\varepsilon}{10}$ gehörigen Verschiebungszahlen der Funktion $f(x)$ derart, dass $\tau_0 = 0$ ist und $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ respektive in den Intervallen der Länge l_0

$$(X, X+l_0), \qquad (\tau_1 + X, \tau_1 + X + l_0), \qquad (\tau_2 + X, \tau_2 + X + l_0), \ldots$$

liegen (siehe Fig. 4),

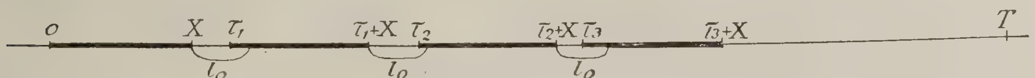


Fig. 4.

und schreiben

$$\int\limits_0^T f(x)\,dx = \int\limits_0^X + \int\limits_X^{\tau_1} + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_1+X} + \int\limits_{\tau_1+X}^{\tau_2} + \int\limits_{\tau_2}^{\tau_2+X} + \cdots + \int^T f(x)\,dx.$$

Es bezeichne M die Anzahl der Intervalle der Länge X, d. h. der Intervalle $(0, X)$, $(\tau_1, \tau_1 + X), \ldots$, so dass $(\tau_{M-1}, \tau_{M-1} + X)$ das letzte dieser Intervalle ist. Dann ist

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{1}{T}\left\{\int_0^X + \int_{\tau_1}^{\tau_1+X} + \int_{\tau_2}^{\tau_2+X} + \cdots + \int_{\tau_{M-1}}^{\tau_{M-1}+X} f(x)\,dx\right\} + R_1,$$

wo das Restglied — weil die Gesamtlänge der »Restintervalle» offenbar kleiner als $M l_0 + X$ ist — der Ungleichung

$$|R_1| \leqq \frac{1}{T}\cdot G(Ml_0+X) \leqq \frac{1}{MX}\cdot G\,M\,l_0 + \frac{1}{T_0}\cdot GX < \frac{\varepsilon}{10}+\frac{\varepsilon}{10}=\frac{\varepsilon}{5}$$

genügt. Ferner ist

$$\frac{1}{T}\left\{\int_0^X + \int_{\tau_1}^{\tau_1+X} + \cdots + \int_{\tau_{M-1}}^{\tau_{M-1}+X} f(x)\,dx\right\} = \frac{1}{T}\int_0^X \{f(x)+f(x+\tau_1)+\cdots+f(x+\tau_{M-1})\}\,dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^X M f(x)\,dx + R_2,$$

wo

$$|R_2| \leqq \frac{1}{T}\cdot X\cdot(M-1)\frac{\varepsilon}{10} < \frac{MX}{T}\cdot\frac{\varepsilon}{10} < \frac{\varepsilon}{10}$$

ist, und schliesslich haben wir

$$\frac{1}{T}\int_0^X M f(x)\,dx = \frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx + R_3,$$

mit

$$|R_3| = \left|\frac{1}{X}\int_0^X f(x)\left\{\frac{MX}{T}-1\right\}dx\right| \leqq G\cdot\left(1-\frac{MX}{T}\right) = G\,\frac{T-MX}{T}$$

$$\leqq G\,\frac{M\,l_0+X}{T} \leqq G\,\frac{M\,l_0}{MX} + G\,\frac{X}{T_0} < \frac{\varepsilon}{10}+\frac{\varepsilon}{10}=\frac{\varepsilon}{5}.$$

Es ist also, indem wir die obigen Ungleichungen zusammenfassen,

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx - \frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx\right| \leqq |R_1|+|R_2|+|R_3| < \frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{10}+\frac{\varepsilon}{5}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

In dem Satze VII war, bei dem Grenzübergang $T\to\infty$, der Mittelwert gerade über das Intervall $0<x<T$ genommen; es ist aber, weil $f(x)$ beschränkt ist, unmittelbar klar, dass wir ebensogut den Mittelwert über das Intervall $\alpha<x<\alpha+T$ hätten nehmen können, wo α eine beliebige Konstante bedeutet. Für eine spätere Anwendung (beim Beweise des Hilfsatzes 2 in § 7) ist es aber von wesentlicher Bedeutung, dass die Limesgleichung $\lim \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = M\{f(x)\}$ auch gilt, wenn α, statt einer Konstanten, eine ganz beliebige Funktion von T ist; oder anders ausgedrückt:

Satz VIII. (Verschärfter Mittelwertsatz.) *Die bei jedem festen α gültige Limesgleichung*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = M\{f(x)\}$$

gilt gleichmässig in α.

Beweis. Es sei $\varepsilon>0$ beliebig gegeben; die Aufgabe besteht darin die Existenz einer solchen Zahl $T_0=T_0(\varepsilon)$ zu beweisen, dass für $T>T_0$ und jedes α die Ungleichung

$$\left|\frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx - M\{f(x)\}\right| < \varepsilon$$

besteht, wo $M\{f(x)\}$ die Zahl $\lim \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx$ des Satzes VII bezeichnet. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die Zahl T_1 derart, dass für $T>T_1$

$$\left|\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx - M\{f(x)\}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist, und ferner die Zahl $l_0=l_0(\varepsilon)$ so, dass jedes Intervall der Länge l_0 eine zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ enthält. Ich behaupte, dass eine Zahl T_0, welche $>T_1$ und $>l_0$ ist und der Ungleichung

$$T_0 > \frac{6\,l_0 G}{\varepsilon}$$

genügt, wo G die obere Grenze von $|f(x)|$ bezeichnet, die gewünschte Eigenschaft besitzt. In der Tat, es sei α eine beliebige Zahl und $T > T_0$. Wir wählen eine Verschiebungszahl $\tau = \tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ im Intervalle $(\alpha, \alpha + l_0)$ und finden zunächst

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(x)\,dx + R_1,$$

wo

$$|R_1| = \left|\frac{1}{T}\left\{\int_{\alpha}^{\tau} f(x)\,dx - \int_{\alpha+T}^{\tau+T} f(x)\,dx\right\}\right| \leqq \frac{1}{T_0}(l_0 G + l_0 G) < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Ferner ergibt sich

$$\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,dx + R_2$$

mit

$$|R_2| = \left|\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\{f(x+\tau) - f(x)\}\,dx\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3},$$

und, wegen $T > T_1$,

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,dx = M\{f(x)\} + R_3$$

mit $|R_3| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$ Durch Zusammenfassung erhalten wir nun sofort die gesuchte Ungleichung

$$\left|\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx - M\{f(x)\}\right| \leqq |R_1| + |R_2| + |R_3| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Corollar. *Es ist*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(x)\,dx = M\{f(x)\} \quad \textit{und} \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = M\{f(x)\}.$$

§ 3.

Herleitung der Fourierreihe und Aufstellung des Fundamentalsatzes.

Es sei $f(x)$ eine gegebene fast periodische Funktion; dann ist, bei jedem reellen λ, die Funktion $g(x) = f(x)\, e^{-i\lambda x}$ als Produkt der fast periodischen Funktion $f(x)$ und der rein periodischen Funktion $e^{-i\lambda x}$ wieder eine fast periodische Funktion (Satz IV); es existiert somit (Satz VII) der Mittelwert

$$M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Wir bezeichnen diese Zahl $M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\}$ mit $a(\lambda)$, wodurch also *eine zu der gegebenen fast periodischen Funktion* $f(x)$ *gehörige Funktion* $a(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *definiert wird.*

Aus der bekannten Limesgleichung (wo μ eine reelle Zahl bedeutet)

$$M\{e^{i\mu x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\mu x}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad \mu = 0 \end{cases}$$

ergibt sich sofort, nach einer in der Theorie der orthogonalen Funktionen geläufigen Schlussweise, der

Satz IX. *Es sei* $f(x)$ *eine fast periodische Funktion,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *beliebige untereinander verschiedene reelle Zahlen und* $b_1, \ldots, b_N$ *beliebige komplexe Zahlen. Dann ist*

$$(1) \qquad M\Big\{\Big|f(x) - \sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}\Big|^2\Big\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_1^N |a(\lambda_n)|^2 + \sum_1^N |b_n - a(\lambda_n)|^2,$$

wobei $a(\lambda)$ *die obige Bedeutung* $a(\lambda) = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\}$ *hat.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die in der Formel (1) vorkommenden beiden Mittelwerte einen Sinn haben; denn die beiden Funktionen $f(x)$ und $f(x) - \sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}$, und daher auch (nach dem Corollar des Satzes IV) die Quadrate ihrer absoluten Beträge, sind ja fast periodische Funktionen. Es folgt nunmehr

durch eine einfache Rechnung, in welcher das Überstreichen einer Grösse den Übergang zu der konjugierten Grösse bedeutet,

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\}=M\left\{\left(f(x)-\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}\right)\left(\bar f(x)-\sum_1^N \bar b_n e^{-i\lambda_n x}\right)\right\}$$

$$=M\{f(x)\bar f(x)\}-\sum_1^N \bar b_n M\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\}-\sum_1^N b_n M\{\bar f(x)e^{i\lambda_n x}\}$$

$$+\sum_{n_1=1}^N\sum_{n_2=1}^N b_{n_1}\bar b_{n_2} M\{e^{i(\lambda_{n_1}-\lambda_{n_2})x}\},$$

also, wegen

$$M\{e^{i(\lambda_{n_1}-\lambda_{n_2})x}\}=\begin{cases}0 & \text{für} \quad n_1 \neq n_2\\ 1 & \text{für} \quad n_1 = n_2\end{cases},$$

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\}=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N \bar b_n a(\lambda_n)-\sum_1^N b_n \bar a(\lambda_n)+\sum_{n=1}^N b_n \bar b_n$$

$$=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N a(\lambda_n)\bar a(\lambda_n)+\sum_1^N (b_n-a(\lambda_n))(\bar b_n-\bar a(\lambda_n))$$

$$=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N |a(\lambda_n)|^2+\sum_1^N |b_n-a(\lambda_n)|^2.$$

Werden in der Formel (1) die Konstanten b_n speziell gleich den Zahlen $a(\lambda_n)$ gewählt, geht (1) in die Formel

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N a(\lambda_n)e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\}=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N |a(\lambda_n)|^2 \tag{2}$$

über.

Da die auf der linken Seite der Formel (2) stehende Grösse — als Mittelwert einer reellen, nicht negativen Funktion — offenbar ein reelle, nicht negative Zahl ist, ergibt uns die Formel (2) sofort die Ungleichung

$$\sum_1^N |a(\lambda_n)|^2 \leqq M\{|f(x)|^2\}, \tag{3}$$

und aus dieser Ungleichung, in welcher die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ ganz beliebige (unter einander verschiedene) reelle Zahlen in beliebiger Anzahl sind, folgt weiter, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens eine endliche Anzahl von Zahlen λ geben kann, für die $|a(\lambda)| > \varepsilon$ ist, nämlich höchstens $\frac{1}{\varepsilon^2} M\{|f(x)|^2\}$. Hieraus schliessen wir, indem ε successiv etwa gleich $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ gewählt wird, das folgende fundamentale Resultat:

Satz X. *Zu jeder fast periodischen Funktion $f(x)$ gibt es höchstens eine* **abzählbar** *unendliche Anzahl von Zahlen λ, für welche der Mittelwert*

$$a(\lambda) = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\}$$

von 0 verschieden ist.

Wir bezeichnen diese λ (in einer beliebigen Reihenfolge) mit

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$$

und die zugehörigen Mittelwerte $a(\Lambda_1), a(\Lambda_2), \ldots, a(\Lambda_n), \ldots$ mit

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots.$$

Die mittels dieser Zahlen Λ_n und A_n gebildete Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ werden wir *die zu $f(x)$ gehörige »Fourierreihe»* nennen; wir schreiben (nach dem Vorgang von Hurwitz für gewöhnliche Fourierreihen)

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}.$$

Ferner werden wir die Grössen Λ_n und A_n als die *»Fourierexponenten»* bzw. *»Fourierkoeffizienten»* der fast periodischen Funktion $f(x)$ bezeichnen.

Um den Gebrauch des Wortes »Fourierreihe» für unsere Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ zu rechtfertigen haben wir vor allem den folgenden Satz zu beweisen.

Satz XI. *In dem Spezialfalle, wo die gegebene fast periodische Funktion $f(x)$ rein periodisch ist, etwa mit der Periode $p = \frac{2\pi}{k}$, stimmt unsere »Fourierreihe» $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ mit der gewöhnlichen Fourierreihe*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inkx}$$

dieser Funktion überein (wenn in dieser letzteren Reihe eventuelle Glieder $\alpha_n\ ^{inkx}$ mit $\alpha_n = 0$ weggelassen werden[1]).

Beweis. Es handelt sich darum zu zeigen, dass

$$a(\lambda) = M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\} = \begin{cases} \alpha_n & \text{für} \quad \lambda = nk \\ 0 & \text{für} \quad \lambda \neq nk \end{cases}$$

ist. Dass $a(\lambda) = \alpha_n$ ist für $\lambda = nk$, folgt sofort aus der Definition der Fourierkonstanten α_n:

$$\alpha_n = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,e^{-inkx}\,dx;$$

denn aus der Periodizität von $f(x)\,e^{-inkx}$ ergibt sich ja:

$$a(nk) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-inkx}\,dx = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{mp}\int_0^{mp} f(x)\,e^{-inkx}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,e^{-inkx}\,dx = \alpha_n.$$

Und dass andererseits $a(\lambda) = 0$ ist für jedes λ, welches **kein** ganzzahliges Multiplum von k ist, folgt z. B. daraus, dass die rein periodische (stetige) Funktion $f(x)$ bekanntlich mit beliebiger Genauigkeit durch ein trigonometrisches Polynom der Form $\sum_{-N}^{N}\beta_n e^{inkx}$ approximiert werden kann; d. h. bei einem vorgegebenen ε lässt sich ein Polynom so wählen, dass

$$f(x) = \sum_{-N}^{N}\beta_n e^{inkx} + R(x)$$

ist, wo $|R(x)| < \varepsilon$ ist für alle x. Denn hieraus folgt ja, dass bei festem $\lambda \neq nk$

$$a(\lambda) = M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\} = \sum_{-N}^{N}\beta_n\,M\{e^{i(nk-\lambda)x}\} + M\{R(x)\,e^{-i\lambda x}\} = M\{R(x)\,e^{-i\lambda x}\}$$

ist, also dass $|a(\lambda)| \leqq \varepsilon$, d. h. $a(\lambda) = 0$ ist.

Zur weiteren Verdeutlichung des Begriffes der Fourierreihe einer fast periodischen Funktion schieben wir hier den folgenden Satz ein.

---

[1] Der Grund, weshalb wir in unseren »allgemeinen» Fourierreihen, im Gegensatz zu den »gewöhnlichen» Fourierreihen, Glieder mit Nullkoeffizienten nicht zulassen, ist ein prinzipieller. Weil nämlich hier die Menge der grundsätzlich möglichen Exponenten aus dem Kontinuum **sämtlicher** reellen Zahlen besteht und somit nicht abzählbar ist, können sie nicht alle als »Fourierexponenten» herangezogen werden, während zu einer bestimmten Auswahl natürlich kein Grund vorliegt.

Satz XII. *Es sei die Reihe $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$, wo die (reellen) Exponenten λ_n alle unter einander verschieden und die Koeffizienten a_n alle $\neq 0$ sind, im Intervalle $-\infty < x < \infty$ gleichmässig konvergent (oder sie bestehe aus nur endlich vielen Gliedern), und also ihre Summe $f(x)$ (nach den Corollaren der Sätze III und VI) eine fast periodische Funktion. Dann ist die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ dieser Funktion $f(x)$ mit der gegebenen Reihe $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ identisch.*

Beweis. Die Behauptung lautet, dass

$$a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \begin{cases} a_n & \text{für } \lambda = \lambda_n \\ 0 & \text{für } \lambda \neq \lambda_n \end{cases}$$

ist. Die Richtigkeit dieser Gleichung folgt aber sofort aus der Voraussetzung, dass die Reihe $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$, falls sie unendlich viele Glieder enthält, im ganzen Intervalle $-\infty < x < \infty$ gleichmässig gegen $f(x)$ konvergiert. In der Tat folgt offenbar aus dieser Annahme, dass der Prozess $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T$ für die Reihe $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ gliedweise ausgeführt werden darf, dass also — da die Hinzufügung eines Faktors $e^{-i\lambda x}$ die gleichmässige Konvergenz nicht stört — bei jedem festen λ gilt:

$$a(\lambda) = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda x} \sum a_n e^{i\lambda_n x} dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sum a_n e^{i(\lambda_n-\lambda)x} dx$$

$$= \sum a_n \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda_n-\lambda)x} dx = \begin{cases} a_n & \text{für } \lambda = \lambda_n \\ 0 & \text{für } \lambda \neq \lambda_n. \end{cases}$$

Corollar. *Die Fourierexponenten Λ_n einer fast periodischen Funktion sind keinerlei Bedingungen unterworfen, in dem Sinne, dass wir jede beliebig gegebene (endliche oder abzählbare) Folge von reellen unter einander verschiedeaen Zahlen λ_n als Fourierexponenten einer passend gewählten fast periodischen Funktion erhalten können.* (Es kann also z. B. die Exponentenfolge $\{\Lambda_n\}$ sehr wohl Häufungspunkte im Endlichen besitzen, oder sogar im ganzen Intervalle $-\infty < \lambda < \infty$ überall dicht liegen.)

Falls nämlich zu den beliebig gegebenen Exponenten λ_n die Koeffizienten $a_n \neq 0$ so gewählt werden, dass $\Sigma |a_n|$ konvergiert, wird ja die Reihe $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ gewiss

eine »Fourierreihe» sein, nämlich (nach dem Satze XII) die Fourierreihe ihrer Summe $f(x)=\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$.

Nach dieser Einschaltung nehmen wir den Faden der Entwicklung wieder auf, d. h. wir betrachten nunmehr wieder eine beliebige fast periodische Funktion $f(x)\sim\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$. Wir wenden die Ungleichung (3) an und finden, bei der Wahl $\lambda_n=\Lambda_n$, dass bei jedem N

$$\sum_{n=1}^{N}|A_n|^2\leqq M\{|f(x)|^2\}$$

ist, also

Satz XIII. *Die aus den Quadraten der absoluten Beträge der Fourierkoeffizienten A_n einer fast periodischen Funktion $f(x)$ gebildete Reihe $\Sigma|A_n|^2$ ist konvergent*[1] *— falls sie überhaupt unendlich viele Glieder besitzt — und ihre Summe ist $\leqq M\{|f(x)|^2\}$.*

In dem speziellen Fall, wo die fast periodische Funktion $f(x)$ rein periodisch ist, etwa mit der Periode p, besagt ein Fundamentalsatz aus der Theorie der gewöhnlichen Fourierreihen (der Parseval'sche Satz), dass $\Sigma|A_n|^2$ immer gleich dem Mittelwert $\frac{1}{p}\int_0^p|f(x)|^2\,dx$, also auch gleich unserem Mittelwert $M\{|f(x)|^2\}$ $=\lim\frac{1}{T}\int_0^T|f(x)|^2\,dx$ ist. Wir werden in Kapitel II den Beweis dafür erbringen, dass auch in dem allgemeinen Fall der fast periodischen Funktionen der analoge Satz besteht, d. h. wir werden den folgenden Satz beweisen:

Satz XIV. (Fundamentalsatz.) *Für jede fast periodische Funktion $f(x)$ mit der Fourierentwicklung $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ gilt die Gleichung*

$$\sum|A_n|^2=M\{|f(x)|^2\}.$$

Ganz wie bei den gewöhnlichen Fourierreihen rein periodischer Funktionen können wir auch hier bei den allgemeinen fast periodischen Funktionen dem Fundamentalsatz eine andersartige Formulierung geben, aus welcher seine zentrale Stellung in der Theorie deutlicher hervorgeht. In der Tat ersieht man aus der Formel

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\}=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N|A_n|^2,$$

[1] Hierin ist speziell enthalten, dass $A_n\to 0$ für $n\to\infty$.

welche aus der Formel (2) bei der Wahl $\lambda_n = \varLambda_n$ hervorgeht, dass der Inhalt des Fundamentalsatzes, d. h. die Relation $\Sigma |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}$, in dem speziellen Fall, wo die Fourierreihe nur endlich viele Glieder, etwa N_0 Glieder, enthält, mit der Gleichung

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_1^{N_0} A_n e^{i\varLambda_n x}\right|^2\right\} = 0,$$

und in dem allgemeinen Fall, wo die Fourierreihe unendlich viele Glieder enthält, mit der Limesgleichung

$$\lim_{N\to\infty} M\left\{\left|f(x) - \sum_1^{N} A_n e^{i\varLambda_n x}\right|^2\right\} = 0$$

gleichbedeutend ist, welch letztere besagt, dass die Abschnitte der Fourierreihe »im Mittel» gegen $f(x)$ konvergieren. Wir sprechen den Fundamentalsatz in dieser Formulierung so aus:

Satz XV. (Satz von der mittleren Konvergenz.) *Die zu einer fast periodischen Funktion $f(x)$ gehörige Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\varLambda_n x}$ konvergiert im Intervalle $-\infty < x < \infty$ im Mittel gegen die Funktion $f(x)$.*

Wir bemerken noch zur Orientierung, dass man — ganz unabhängig von dem tiefliegenden Fundamentalsatz, welcher die Frage erledigt, ob es möglich ist eine fast periodische Funktion mit beliebiger Genauigkeit durch die Abschnitte ihrer Fourierreihe im Mittel zu approximieren — aus der Formel (1) S. 47 sofort schliessen kann, *dass man, wenn man eine fast periodische Funktion $f(x)$ durch eine endliche trigonometrische Summe $\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}$ im Mittel zu approximieren wünscht, die Glieder $b_n e^{i\lambda_n x}$ unter den Gliedern der Fourierreihe der Funktion wählen muss.* Denn einerseits zeigt ja die Formel (1), dass man die Exponenten λ_n unter den Fourierexponenten $\varLambda_n$ wählen soll, weil man eine bessere Approximation, d. h. einen kleineren mittleren Fehler, erhält, wenn etwaige Glieder $b_n e^{i\lambda_n x}$, für welche λ_n keiner der Fourierexponenten ist, einfach aus der Summe weggelassen werden; und andererseits besagt sie, dass man, nachdem die Exponenten λ_n alle unter den Fourierexponenten $\varLambda_n$ gewählt sind, die Koeffizenten b_n gleich den entsprechenden Fourierkoeffizienten A_n wählen soll, weil jede andere Wahl der Zahlen b_n offenbar ein schlechteres Approximationsresultat ergibt.

Ehe wir dazu übergehen den recht schwierigen Beweis des Fundamentalsatzes anzufangen, werden wir zunächst in den beiden folgenden Paragraphen über einige weitere Konsequenzen des Fundamentalsatzes berichten.

§ 4.

Der Eindeutigkeitssatz.

Bei der näheren Untersuchung des Zusammenhanges einer fast periodischen Funktion $f(x)$ mit ihrer Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ erhebt sich zunächst die fundamentale Frage, ob eine Funktion durch ihre Fourierreihe eindeutig bestimmt wird, d. h. *ob zu zwei verschiedenen fast periodischen Funktionen immer zwei verschiedene Fourierreihen gehören.* Da die Fourierreihe der Differenz $f(x)-g(x)$ zweier fast periodischer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, wegen der Gleichung

$$M\{(f(x)-g(x))\,e^{-i\lambda x}\}=M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\}-M\{g(x)\,e^{-i\lambda x}\},$$

offenbar durch formale Subtraktion der beiden zu $f(x)$ und $g(x)$ gehörigen Fourierreihen entsteht, kann diese Frage auch so gestellt werden, *ob es eine nicht identisch verschwindende fast periodische Funktion gibt, deren Fourierreihe gar keine Glieder enthält.*

Im Gegensatz zu dem Spezialfall der rein periodischen (stetigen) Funktionen, wo diese Frage sehr leicht direkt zu lösen ist, scheint die Antwort für die allgemeine Klasse der fast periodischen Funktionen ziemlich tief zu liegen. Wenn wir aber den — erst im Kapitel II zu beweisenden — Fundamentalsatz heranziehen, können wir die Frage sofort erledigen, und zwar durch den folgenden

Satz XVI. (Eindeutigkeitssatz.) *Eine fast periodische Funktion $f(x)$, welche der Bedingung $a(\lambda)=0$ für alle λ genügt, muss für alle x gleich 0 sein.*

Beweis. In der Tat folgt aus dem Fundamentalsatz, dass $f(x)$ die Bedingung $M\{|f(x)|^2\}=0$ erfüllen muss, so dass es sich also nur darum handelt zu beweisen, dass eine fast periodische Funktion $f(x)$, für die $M\{|f(x)|^2\}=0$ ist, identisch (d. h. für alle x) verschwinden muss.

Wir führen den Beweis dadurch, dass wir zeigen, dass, falls $f(x)$ nicht identisch 0 ist, die Zahl $M\{|f(x)|^2\}$ gewiss grösser als 0 ist. Es existiere also ein Punkt x_0 mit $f(x_0)\neq 0$, und es sei die Zahl $f(x_0)$ mit c bezeichnet. Da $f(x)$ stetig ist, können wir ein Intervall (x_0-h, x_0+h) so wählen, dass $|f(x)|$ überall in diesem

Intervall $> \frac{1}{2}|c|$ ist. Wegen der Fastperiodizität von $f(x)$ können wir ferner eine Länge l_0 so bestimmen, dass jedes Intervall der Länge l_0 eine zu $\varepsilon = \frac{1}{4}|c|$

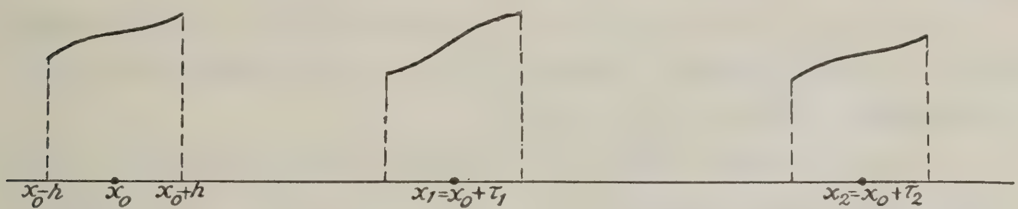


Fig. 5.

gehörige Verschiebungszahl $\tau=\tau(\varepsilon)$ der Funktion $f(x)$ enthält, so dass wir eine Folge von (zu ε gehörigen) Verschiebungszahlen $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n<\cdots$ successive so wählen können, dass, für alle $n \geqq 1$,

$$\tau_{n-1}+2\,h<\tau_n<\tau_{n-1}+2\,h+l_0$$

ist, d. h. (siehe Fig. 5) dass die Differenz x_n-x_{n-1} zweier aufeinander folgender Zahlen der Folge

$$x_0, \quad x_1=x_0+\tau_1, \quad x_2=x_0+\tau_2, \ldots, \quad x_n=x_0+\tau_n, \ldots$$

zwischen $2\,h$ und $2\,h+l_0$ liegt. Nun gilt aber bei jedem n im ganzen Intervalle $(x_n-h,\, x_n+h)$ die Ungleichung

$$|f(x)| \geqq |f(x-\tau_n)| - |f(x)-f(x-\tau_n)| > \frac{|c|}{2} - \frac{|c|}{4} = \frac{|c|}{4};$$

da ferner die betrachteten Intervalle $(x_n-h,\, x_n+h)$ der Länge $2\,h$ nicht über einander greifen, weil ja $x_n-x_{n-1}>2\,h$ ist, und der Abstand x_n-x_{n-1} zwischen den Mittelpunkten zweier auf einander folgender Intervalle kleiner als $2\,h+l_0$ ist, ergibt sich hieraus sofort, dass

$$M\{|f(x)|^2\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx \geqq \frac{2\,h}{2\,h+l_0}\cdot\frac{|c|^2}{16}$$

ist, also dass $M\{|f(x)|^2\}$ gewiss grösser als 0 ist.

Als eine unmittelbare Folge des Eindeutigkeitssatzes nennen wir das

Corollar. *Falls die zu einer gegebenen fast periodischen Funktion $f(x)$ gehörige Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ für alle x gleichmässig konvergiert (oder nur endlich viele Glieder enthält), ist $f(x)$ gleich der Summe $S(x)$ dieser Reihe.*

Denn nach dem Satze XII hat ja die Summe $S(x)$ dieselbe Fourierreihe, $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$, wie die gegebene Funktion $f(x)$, und es muss daher nach dem Eindeutigkeitssatz $S(x)$ mit $f(x)$ identisch sein.

Es seien die beiden folgenden Bemerkungen zur Ergänzung hinzugefügt.

1°. Aus dem Eindeutigkeitssatze folgt sofort — da man bei Bestimmung des Mittelwertes $a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ ein nur nach der einen Seite ins Unendliche reichendes Intervall, etwa $c < x < \infty$, zu betrachten braucht, und da die fast periodische Funktion $f(x)$ nach dem Eindeutigkeitssatz durch die Funktion $a(\lambda)$ eindeutig bestimmt ist — *dass zwei fast periodische Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die nur in einem nach der einen Seite ins Unendliche reichenden Intervall, etwa $c < x < \infty$, zusammenfallen, überhaupt identisch sind.* Die Richtigkeit dieser Bemerkung geht übrigens auch aus der Definition der Fastperiodizität in Verbindung mit dem Satze, dass die Differenz zweier fast periodischer Funktionen wieder eine solche ergibt, hervor; denn eine fast periodische Funktion $f(x)$ (in unserem Falle die Funktion $f_1(x) - f_2(x)$), welche im ganzen Intervalle $c < x < \infty$ gleich 0 ist, muss offenbar überall 0 sein, da ja zu jedem festen Punkte x_0 des Intervalles $-\infty < x \leqq c$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ bestimmt werden kann, für die $x_0 + \tau$ im Intervalle $c < x < \infty$ liegt, weshalb schliesslich $|f(x_0)| \leqq |f(x_0) - f(x_0 + \tau)| + |f(x_0 + \tau)| \leqq \varepsilon$ d. h. $f(x_0) = 0$ ist.

2°. Wenn $f(x)$ $(0 < x < \infty)$ eine beliebige (d. h. nicht notwendig fast periodische) stetige Funktion ist, *von der nur bekannt ist, dass bei jedem reellen λ der Mittelwert $M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$ gleich 0 ist,* kann man natürlich nicht schliessen, dass $f(x)$ identisch 0 ist. In der Tat hat z. B. jede stetige Funktion $f(x)$, die für $x \to \infty$ gegen 0 strebt, die erwähnte Eigenschaft. Von grösserem Interesse mag vielleicht die Bemerkung sein, *dass man aus dieser Voraussetzung auch nicht schliessen darf, dass der Mittelwert $M\{|f(x)|^2\} = \lim \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\, dx$ gleich 0 ist.* So hat z. B., wie durch eine einfache Abschätzung einzusehen ist, jede der beiden Funktionen $f(x) = e^{i\sqrt{x}}$ und $f(x) = e^{ix^2}$

(von denen die erste »sehr langsame», die zweite »sehr schnelle» Schwingungen ausführt) die Eigenschaft, dass $M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\}$ bei jedem reellen λ gleich 0 ist; und trotzdem ist $M\{|f(x)|^2\}=1$, da ja $|f(x)|$ überall gleich 1 ist.

§ 5.

Das Rechnen mit Fourierreihen.

Wir stellen zunächst einige Sätze zusammen, deren Beweise aus der Definition der Zahlen $a(\lambda)$, d. h. aus der Gleichung $a(\lambda)=M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\}$, unmittelbar folgen.

Satz XVII. *Die Fourierreihe der Summe $f(x)+g(x)$ von zwei fast periodischen Funktionen entsteht durch formale Addition der beiden zu $f(x)$ und $g(x)$ gehörigen Fourierreihen.*

Satz XVIII. *Aus $f(x)\sim\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ folgt*

$$c\,f(x)\sim\sum c\,A_n e^{i\Lambda_n x},$$

wo c eine beliebige Konstante $\neq 0$ bedeutet.

Aus den Sätzen XVII und XVIII folgt z. B., was wir schon in § 4 erwähnt haben, dass die Fourierreihe der Differenz $f(x)-g(x)$ durch formale Subtraktion der Fourierreihen von $f(x)$ und $g(x)$ ensteht.

Satz XIX. *Aus $f(x)\sim\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ folgt*

$$e^{i\nu x}f(x)\sim\sum A_n e^{i(\Lambda_n+\nu)x},$$

wo ν eine beliebige reelle Zahl bedeutet.

Satz XX. *Aus $f(x)\sim\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ folgt*

$$\overline{f}(x)\sim\sum\overline{A}_n e^{i(-\Lambda_n)x}.$$

Von diesen Sätzen behandeln zwei (XVIII und XIX) die Multiplikation einer beliebigen fast periodischen Funktion mit einer ganz speziellen solchen Funktion. Im Gegensatze zu diesen beiden Sätzen, die ja ganz auf der Oberfläche liegen, ist der folgende allgemeine Multiplikationssatz ein tiefliegender

Satz. In der Tat werden wir zeigen — durch eine bei den rein periodischen Funktionen bekannte Schlussweise — dass der Multiplikationssatz mit dem Fundamentalsatz inhaltlich ganz aequivalent ist.

Satz XXI. *Die zu dem Produkte $f(x)\,g(x)$ zweier fast periodischer Funktionen gehörige Fourierreihe $\Sigma\, C_n e^{i\,\mathrm{N}_n x}$ entsteht durch formale Multiplikation der zu den beiden Faktoren $f(x)$ und $g(x)$ gehörigen Fourierreihen $\Sigma\, A_n e^{i\,\Lambda_n x}$ und $\Sigma\, B_n e^{i\,\mathrm{M}_n x}$, d. h. der Exponent N_n durchläuft die Zahlen der Form $\Lambda_p + \mathrm{M}_q$, und der entsprechende Koeffizient C_n ist durch die Summe*

$$C_n = \sum_{\Lambda_p + \mathrm{M}_q = \mathrm{N}_n} A_p\, B_q$$

gegeben, wo die letzte Reihe, falls sie unendlich viele Glieder enthält, absolut konvergiert (und wo natürlich eventuelle Glieder $C_n e^{i\,\mathrm{N}_n x}$ mit $C_n = 0$ weggelassen werden sollen).

Beweis. Der Satz besagt offenbar, dass bei jedem reellen ν die Gleichung

$$M\{f(x)\,g(x)\,e^{-i\nu x}\} = \sum_{\Lambda_p + \mathrm{M}_q = \nu} A_p\, B_q \tag{4}$$

besteht (wo die rechte Seite die Zahl 0 bedeutet, falls die Summe leer ist), und dass die Reihe rechts absolut konvergiert, falls sie unendlich viele Glieder enthält. Wir bemerken zunächst, dass es genügt die Gleichung (4) (und die absolute Konvergenz der rechten Seite) für den speziellen Wert $\nu = 0$ zu beweisen, wo es sich um das konstante Glied der Fourierreihe $\Sigma\, C_n e^{i\,\mathrm{N}_n x}$ handelt; denn die allgemeine Gleichung (4) geht — unter Verwendung des Satzes XIX — offenbar aus der spezielleren Gleichung

$$M\{f(x)\,g(x)\} = \sum_{\Lambda_p + \mathrm{M}_q = 0} A_p\, B_q \tag{5}$$

hervor, falls in (5) die Funktion $f(x)$ durch $f(x)\,e^{-i\nu x}$ ersetzt wird.

Mit Hilfe der Zerspaltungen

$$f(x) = \frac{f(x) + \bar{f}(x)}{2} + i\,\frac{f(x) - \bar{f}(x)}{2i}, \qquad g(x) = \frac{g(x) + \bar{g}(x)}{2} + i\,\frac{g(x) - \bar{g}(x)}{2i}$$

ersieht man ferner durch eine einfache Betrachtung (unter Benutzung der obigen Sätze XVII, XVIII, XX), dass es genügt die Gleichung (5) für den Fall zu beweisen, wo $f(x)$ und $g(x)$ beide reelle Funktionen sind, und aus der schon früher benutzten Identität

$$f(x)\,g(x)=\frac{1}{4}\{(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2\}$$

folgt weiter, ebenfalls durch eine triviale Betrachtung, dass man in (5), statt des Produktes zweier beliebiger fast periodischer Funktionen, nur das Quadrat einer solchen Funktion zu betrachten braucht. Wir dürften uns somit beim Beweise der Gleichung (5) auf den Fall beschränken, wo $f(x)$ und $g(x)$ beide reell wären, und $f(x)=g(x)$ wäre. Es ist aber bequemer den etwas allgemeineren Fall zu betrachten, wo $f(x)$ eine beliebige (also nicht reell angenommene) fast periodische Funktion ist, und $g(x)=\overline{f}(x)$ ist. Die zu beweisende Gleichung (5) nimmt hier, wegen

$$\overline{f}(x)\sim\sum\overline{A}_n e^{i(-\Lambda_n)x},$$

die Gestalt

$$M\{f(x)\,\overline{f}(x)\}=\sum_{\Lambda_p+(-\Lambda_q)=0}A_p\,\overline{A}_q$$

d. h. die Gestalt

$$M\{|f(x)|^2\}=\sum|A_n|^2$$

an, wo die letzte Summe über alle Fourierkoeffizienten A_n zu erstrecken ist (und wo absolute Konvergenz der Reihe mit gewöhnlicher Konvergenz gleichbedeutend ist, da die Glieder sämtlich positiv sind). Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung der Aequivalenz des Multiplikationssatzes mit dem Fundamentalsatz nachgewiesen, und somit — unter Annahme der Richtigkeit des Fundamentalsatzes — der Beweis des Multiplikationssatzes vollendet.

Wir erwähnen schliesslich noch einige Sätze über das formale Rechnen mit Fourierreihen, deren Beweise unmittelbar — ohne Gebrauch des Fundamentalsatzes — zu führen sind.

Satz XXII. *Es sei $f(x)$ eine fast periodische Funktion und $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ ihre Fourierentwicklung. Dann ist, bei jedem reellen c, die Funktion $f(x+c)$ ebenfalls fastperiodisch und ihre Fourierentwicklung lautet*

$$f(x+c)\sim\sum A_n e^{i\Lambda_n c}\cdot e^{i\Lambda_n x}.$$

Beweis. Dass $f(x+c)$ fast periodisch ist, ist klar; sie hat ja sogar, bei jedem ε, dieselben Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ wie die gegebene Funktion $f(x)$. Und dass $f(x+c)$ die angegebene Fourierentwicklung besitzt, ergibt sich sofort durch die folgende Rechnung (in welcher λ eine beliebige reelle Zahl bedeutet)

$$M\{f(x+c)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x+c)e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(x)e^{-i\lambda(x-c)}\,dx$$

$$= e^{i\lambda c} M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}.$$

Satz XXIII. *Aus* $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ *folgt, bei jedem reellen* $c \neq 0$, *die Relation*

$$f(cx) \sim \sum A_n e^{i(\Lambda_n c)x}.$$

Beweis. Die Funktion $g(x) = f(cx)$ ist offenbar wieder fast periodisch, und bei jedem reellen λ gilt die Gleichung

$$M\{g(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{cT}\int_0^{cT} f(x)e^{-i\frac{\lambda}{c}x}\,dx = M\{f(x)e^{-i\frac{\lambda}{c}x}\}.$$

Satz XXIV. *Es sei* $f(x)$ *fast periodisch und* $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$. *Dann ist bei jedem positiven* c *das Integral*

$$F(x) = \int_x^{x+c} f(y)\,dy$$

wieder eine fast periodische Funktion, und ihre Fourierentwicklung lautet

$$F(x) \sim \sum A_n \frac{e^{i\Lambda_n c} - 1}{i\Lambda_n} \cdot e^{i\Lambda_n x},$$

wo, falls ein konstantes Glied Ae^{i0x} *in der Fourierreihe* $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ *vorkommt, der entsprechende Faktor* $\frac{e^{i0c}-1}{i0}$ *durch die Zahl* c *zu ersetzen ist* (und eventuelle sonstige Glieder, für welche der Faktor $(e^{i\Lambda_n c}-1)$ verschwindet, natürlich weggelassen werden sollen).

Beweis. Dass $F(x)$ fast periodisch ist, ist klar; denn $F(x)$ ist stetig, und es ist offenbar jede zu $\frac{\varepsilon}{c}$ gehörige Verschiebungszahl der ursprünglichen Funktion $f(x)$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $F(x)$, wie aus der Ungleichung

$$|F(x+\tau)-F(x)| = \left|\int_{x+\tau}^{x+\tau+c} f(y)\,dy - \int_{x}^{x+c} f(y)\,dy\right| = \left|\int_{x}^{x+c} \{f(y+\tau)-f(y)\}\,dy\right| \leqq c\cdot\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

hervorgeht. Um nunmehr die Fourierreihe von $F(x)$ herzuleiten, haben wir bei jedem reellen λ die Zahl

$$b(\lambda) = M\{F(x)e^{-i\lambda x}\}$$

zu berechnen. Wir finden (siehe Fig. 6)

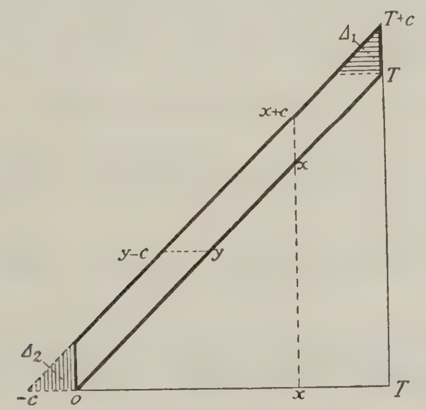


Fig. 6.

$$b(\lambda) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda x}\,dx\int_x^{x+c} f(y)\,dy$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\{\int_0^T f(y)\,dy\int_{y-c}^{y} e^{-i\lambda x}\,dx + R_1 - R_2\right\},$$

wo R_1 und R_2 die Doppelintegrale der Funktion $f(y)e^{-i\lambda x}$ über das Dreieck Δ_1 bzw. Δ_2 bezeichnen. Jedes dieser Doppelintegrale R_1 und R_2 ist aber numerisch kleiner als eine feste (d. h. von T unabhängige) Konstante, nämlich $\leqq \frac{1}{2}c^2 G$,

wo G die obere Grenze von $|f(x)|$ bezeichnet; es dürfen daher die Restglieder R_1 und R_2 beim Grenzübergang $T \to \infty$ einfach vernachlässigt werden, d. h. es ist

$$b(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(y)\,dy \int_{y-c}^{y} e^{-i\lambda x}\,dx.$$

Hieraus folgt für $\lambda \neq 0$

$$b(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(y) \frac{e^{-i\lambda y}(1-e^{i\lambda c})}{-i\lambda}\,dy = \frac{1-e^{i\lambda c}}{-i\lambda} M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \frac{1-e^{i\lambda c}}{-i\lambda} a(\lambda)$$

und für $\lambda = 0$

$$b(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T c f(y)\,dy = c M\{f(x)\} = c\,a(0),$$

womit der Satz bewiesen ist. Es sei noch bemerkt, dass das »gewöhnliche» Integral $\int_c^x f(y)\,dy$ einer fast periodischen Funktion im Allgemeinen nicht wieder eine fast periodische Funktion ergibt; auf diese Frage werden wir in Zusatz 3 zurückkommen.

Wir betrachten zuletzt eine fast periodische Funktion $f(x)$, die als Grenzfunktion einer gleichmässig konvergenten Folge von fast periodischen Funktionen $f_m(x)$ entstanden ist (vgl. Satz VI), und fragen, wie ihre Fourierentwickelung aus denen der Funktionen $f_m(x)$ abgeleitet werden kann. Es lautet die Antwort:

Satz XXV. *Es sei eine Folge von fast periodischen Funktionen*

$$f_m(x) \sim \sum A_n^{(m)} e^{i\Lambda_n^{(m)} x} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

gegeben, die gleichmässig für alle x einer Grenzfunktion $f(x)$ zustrebt. Dann lässt sich die Fourierentwicklung $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ dieser Funktion $f(x)$ durch den formalen Grenzübergang

$$\sum A_n e^{i\Lambda_n x} = \lim_{m\to\infty} \sum A_n^{(m)} e^{i\Lambda_n^{(m)} x}$$

ableiten, in dem Sinne, dass bei jedem festen λ die Limesgleichung

$$M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{m \to \infty} M\{f_m(x)e^{-i\lambda x}\}$$

gilt (übrigens gleichmässig für alle λ).

Beweis. Es ist

$$M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda x} \lim_{m \to \infty} f_m(x)\,dx.$$

Hier dürfen aber, wegen der im ganzen Intervalle $-\infty < x < \infty$ bestehenden gleichmässigen Konvergenz von $f_m(x)e^{-i\lambda x}$, die beiden Grenzübergänge vertauscht werden, d. h. es ist (sogar gleichmässig in λ)

$$M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{m \to \infty} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda x} f_m(x)\,dx = \lim_{m \to \infty} M\{f_m(x)e^{-i\lambda x}\}.$$

KAPITEL II.

Beweis des Fundamentalsatzes.

§ 6.

Angabe der Beweismethode und Einführung der rein periodischen Hilfsfunktionen $f_T(x)$.

Wir gehen jetzt zu dem schwierigeren Teil der Untersuchungen über, nämlich zu dem Beweis des Fundamentalsatzes:

$$\sum |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}.$$

Es seien zunächst zur Orientierung einige Worte vorausgeschickt über die Wege, welche, bei einem Versuch den Beweis dieses Satzes zu erbringen, einzuschlagen am naheliegendsten wäre. Es werde die Differenz

$$M\{|f(x)|^2\}-\sum|A_n|^2$$

mit D bezeichnet; wir wissen (Satz XIII), dass $D\geqq 0$; es handelt sich darum zu beweisen, dass $D=0$ ist. Aus der Formel

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\}=M\{|f(x)|^2\}-\sum_1^N|A_n|^2$$

geht hervor, dass die Zahl D auch als die untere Grenze des Mittelwertes $M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\}$ charakterisiert werden kann, wenn $\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}$ alle Summen durchläuft, welche aus einer endlichen Anzahl von Gliedern der Fourierreihe bestehen. Von dieser Charakterisierung der Zahl D aus zu einem Beweis der Gleichung $D=0$ zu gelangen — d. h. direkt nachzuweisen, dass die Abschnitte der Fourierreihe im Mittel gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren — scheint aber ziemlich hoffnungslos zu sein; es ist ja bekanntlich selbst in dem Spezialfall der rein periodischen Funktionen nicht gelungen den Beweis des Fundamentalsatzes in dieser Weise zu führen. Ein etwas anderer Versuch könnte darauf basiert werden, dass, nach den Ergebnissen des § 3, die obige Differenz D auch als die untere Grenze des mittleren Fehlers $M\left\{\left|f(x)-\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\}$ charakterisiert werden kann, wenn $\sum_1^N b_n e^{i\lambda_n x}$ sämtliche trigonometrischen Summen überhaupt durchläuft, und nicht nur solche, die aus Gliedern der Fourierreihe besteht. Obwohl wir wissen, dass Summen dieser letzten spezielleren Art die »besten» Approximationen liefern, wäre es ja sehr wohl möglich, dass es bei gewissen anderen trigonometrischen Summen viel einfacher wäre zu beweisen, dass sie die Funktion $f(x)$ gut approximieren, weil sie z. B. nicht nur im Mittel, sondern in jedem Punkt gegen $f(x)$ konvergierten. Auf diesem Wege wird bekanntlich der Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der rein periodischen Funktionen geführt, indem man dort ziemlich leicht Folgen von trigonometrischen Polynomen $P_N(x)$ auffinden kann, die sogar gleichmässig gegen $f(x)$ konvergieren, woraus sofort folgt, dass der mittlere Fehler $M\{|f(x)-P_N(x)|^2\}$ gegen 0 strebt, und dass somit die Zahl D gleich 0 ist; als solche Polynome $P_N(x)$ kann man z. B., nach dem Fejér'schen Satze über die gleichmässige Césàro-Summabilität einer gewöhnlichen Fourierreihe, einfach die

arithmetischen Mitteln der Abschnitte der Fourierreihe benutzen; oder man kann zunächst die Funktion $f(x)$ durch eine »einfache» Kurve (z. B. einen Polygonzug) annähern, und dann wieder diese einfache Kurve durch ein trigonometrisches Polynom approximieren. Wenn man in dem allgemeinen Fall der fast periodischen Funktionen versuchen wollte diesen Weg einzuschlagen, stösst man aber auf grosse Schwierigkeiten, die zu überwinden mir nicht gelungen ist. Einerseits haben wir nicht, wie bei den rein periodischen Funktionen, einen Summabilitätssatz wie den Fejér'schen zur Verfügung; und eine allgemeine Summationsmethode auszubilden — ohne den Fundamentalsatz zur Verfügung zu haben — scheint mir hier eine schwer anzugreifende Aufgabe. Andererseits treten auch grosse Hindernisse auf, wenn man versucht die beliebig gegebene fast periodische Funktion $f(x)$ durch eine »einfache» fast periodische Funktion $g(x)$ (d. h. eine solche, für welche man direkt trigonometrische Annäherungssummen auffinden könnte) derart zu approximieren, dass der mittlere Fehler $M\{|f(x)-g(x)|^2\}$ klein wird. Hierbei muss man nämlich vor allem bedenken, dass es, wegen der Relation $M\{|f(x)-g(x)|^2\} \geqq \Sigma |C_n|^2$ wo $\Sigma C_n e^{i\mathrm{N}_n x}$ die Fourierreihe der Differenz $f(x)-g(x)$ bedeutet, von vorneherein klar ist, dass die »einfache» Funktion $g(x)$ gewiss so gewählt werden muss, dass ihre Fourierreihe $\Sigma B_n e^{i\mathrm{M}_n x}$ (vielleicht abgesehen von belanglosen Gliedern) genau dieselben Exponenten wie die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ der gegebenen Funktion $f(x)$ besitzen muss, damit überhaupt die Möglichkeit eines kleinen mittleren Fehlers $M\{|f(x)-g(x)|^2\}$ besteht; und schon diese Bedingung macht das Aufsuchen solcher Funktionen $g(x)$ zu einem unangenehmen Unternehmen.[1]

Ich habe daher einen ganz anderen Weg einschlagen müssen, dessen Ausgangspunkt die folgende Überlegung ist. Für jede fast periodische Funktion $f(x)$ konvergiert die Quadratsumme $\Sigma |A_n|^2$ der absoluten Beträge ihrer Fourierkoeffizienten, so dass die Summe $S = \Sigma |A_n|^2$ eine für die Menge E aller fast periodischen Funktionen $f(x)$ definierte »Funktionenfunktion» (oder Funktional) ist, die wir mit $\Phi(f(x))$ bezeichnen. Es handelt sich darum zu beweisen, dass für die ganze Funktionenmenge E die Gleichung $\Phi(f(x)) = M\{|f(x)|^2\}$ besteht. Nun gibt es aber in der Funktionenmenge E eine spezielle Klasse

---

[1] Wie in der Einleitung erwähnt, werden wir uns in der Abhandlung II mit der Aufgabe beschäftigen, eine beliebige fast periodische Funktion $f(x)$ mit vorgegebener Genauigkeit (und zwar nicht nur im Mittel, sondern sogar gleichmässig für alle x) durch eine endliche trigonometrische Summe zu approximieren. Wir bemerken aber sogleich, dass uns die Lösung dieser Aufgabe nur dadurch gelingt, dass wir den Fundamentalsatz benutzen, und es somit unerlaubt wäre die Resultate der Abhandlung II zum Beweise des Fundamentalsatzes heranzuziehen.

von Funktionen $f(x)$, nämlich die Klasse E^* der rein periodischen (stetigen) Funktionen, für welche wir schon wissen, dass der Fundamentalsatz gilt, d. h. dass $\Phi(f(x))=M\{|f(x)|^2\}$ ist. Und es ist daher naheliegend zu fragen, ob nicht die genannte spezielle Funktionenklasse E^* vielleicht in einem gewissen (unserer Aufgabe entsprechenden) Sinne überall dicht in der Gesamtmenge E aller fast periodischen Funktionen liegt, d. h. ob man nicht die Richtigkeit der Gleichung $\Phi(f(x))=M\{|f(x)|^2\}$ für eine beliebige Funktion $f(x)$ der Menge E durch Stetigkeitsbetrachtungen aus ihrer bekannten Gültigkeit für die Funktionen der spezielleren Klasse E^* ableiten könnte. Es zeigt sich, dass es in der Tat so ist, dass man also den Fundamentalsatz für den allgemeinen Fall einer fast periodischen Funktion $f(x)$ dadurch beweisen kann, dass man sie durch rein periodische Funktionen annähert. Um Missverständnisse zu verhüten, sei aber sogleich hinzugefügt, dass der Begriff der »Annäherung» hierbei in einem ganz anderen (und viel weiteren) Sinne aufzufassen ist, als der, von welchem oben die Rede war; weil nämlich die Fourierexponenten einer rein periodischen Funktion $p(x)$ immer eine Differenzenreihe bilden, können wir prinzipiell nicht erreichen, dass sie mit den Fourierexponenten Λ_n der gegebenen fast periodischen Funktion $f(x)$ übereinstimmen, und es ist daher (nach einer obigen Bemerkung) von vorneherein ausgeschlossen, dass der Mittelwert $M\{|f(x)-p(x)|^2\}$ klein ausfällt.

Die rein periodischen Funktionen, mit welchen wir die gegebene fast periodische Funktion $f(x)$ annähern werden, hängen von einem Parameter $T>0$ ab, der die Periodenlänge angibt (und welcher nachher ins Unendliche wächst). Die zum Parameterwert T gehörige Funktion, $f_T(x)$, wird einfach so definiert, *dass $f_T(x)$ in dem Periodenintervall $0<x<T$ gleich der gegebenen Funktion $f(x)$ ist*, also:

$$f_T(x)=f(x) \qquad \text{für } 0<x<T; \qquad\qquad f_T(x+T)=f_T(x).$$

Diese Funktionen $f_T(x)$ sind (abgesehen von gewissen speziellen Werten von T) nicht überall stetige, sondern nur streckenweise stetige Funktionen von x, weil sie ja in den »Periodenpunkten» nT ($n=0, \pm 1, \ldots$) Sprünge aufweisen; dies schadet aber gar nicht, da der Fundamentalsatz ja auch für solche Funktionen (sowie überhaupt für alle im Lebesgue'schen Sinne quadratisch integrierbaren rein periodischen Funktionen) gültig ist.[1] Wir entwickeln, bei einem

[1] Man könnte übrigens die Benutzung von unstetigen rein periodischen Funktionen $f_T(x)$ leicht umgehen, was aber kein weiteres Interesse darbietet.

beliebigen $T > 0$, die rein periodische Funktion $f_T(x)$ in ihre (gewöhnliche) Fourierreihe:

$$f_T(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\mu_n x},$$

wo nicht nur die Exponenten

$$\mu_n = \frac{2\pi}{T} n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

sondern auch die Koeffizienten

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_0^T f_T(x) e^{-i\mu_n x} dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\mu_n x} dx$$

von dem Parameter T abhängen. Hierbei gilt, weil $f_T(x)$ rein periodisch ist, die Relation

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f_T(x)|^2 dx = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx,$$

und wir sehen somit unmittelbar, weil ja die rechte Seite der letzten Gleichung für $T \to \infty$ gegen $M\{|f(x)|^2\}$ konvergiert, *dass die Summe* $\Sigma |\alpha_n|^2$ *für* $T \to \infty$ *einem bestimmten Grenzwert, nämlich dem Grenzwert* $M\{|f(x)|^2\}$ *zustrebt.* Es ist daher der Beweis des Fundamentalsatzes: $\Sigma |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}$ damit gleichbedeutend zu zeigen, dass die Fourierreihe $\Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$ der Funktion $f_T(x)$ für $T \to \infty$ in solcher Art in die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ von $f(x)$ »übergeht», *dass die Limesgleichung* $\lim\limits_{T\to\infty} \Sigma |\alpha_n|^2 = \Sigma |A_n|^2$ *besteht.* Nun wissen wir aber schon (Satz XIII), dass $\Sigma |A_n|^2 \leqq M\{|f(x)|^2\}$, also dass $\Sigma |A_n|^2 \leqq \lim\limits_{T\to\infty} \Sigma |\alpha_n|^2$ ist, und es genügt daher nachzuweisen, dass $\Sigma |A_n|^2 \geqq \lim\limits_{T\to\infty} \Sigma |\alpha_n|^2$ ist. Mit anderen Worten: *Unsere Aufgabe, den Fundamentalsatz zu beweisen, ist gelöst, wenn wir zeigen können, dass es zu jedem* $\delta_0 > 0$ *ein* $T_0 = T_0(\delta_0) > 0$ *derart gibt, dass für* $T > T_0$ *die Ungleichung*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \sum |A_n|^2 + \delta_0 \tag{6}$$

besteht.

§ 7.

Zurückführung des Fundamentalsatzes auf ein Lemma über $f_T(x)$ (Lemma I).

Es sei, wie überall in diesem Kapitel,

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$$

eine beliebig gegebene fast periodische Funktion, und

$$f_T(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\mu_n x} \qquad \left(\mu_n = \frac{2\pi}{T} n\right)$$

die »zugehörige» rein periodische Funktion der Periode T, welche durch die Gleichung

$$f_T(x) = f(x) \qquad \text{für } 0 < x < T$$

bestimmt ist. Wir haben (nach § 6) zu beweisen, dass für hinreichend grosse T die Ungleichung $\Sigma|\alpha_n|^2 < \Sigma|A_n|^2 + \delta_0$ besteht, und müssen also die Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$ nach oben abschätzen. Zu diesem Zwecke werden wir zunächst drei Hilfssätze beweisen:

Hilfssatz 1. *Zu jedem $\delta > 0$ lassen sich die Zahlen $\Omega > 0$ und $T_0 > 0$ so wählen, dass für $T > T_0$ die Ungleichung*

$$(7) \qquad \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\alpha_n|^2 < \delta$$

besteht. Mit anderen Worten, bei jedem hinreichend grossen T geben diejenigen Glieder der Fourierentwicklung $f_T(x) \sim \Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$, welche den sehr grossen Werten von $|\mu_n|$ (d. h. den sehr schnellen Schwingungen) entsprechen, fast keinen Beitrag zur Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$.

Beweis. Wenn man den Beitrag der sehr schnellen Schwingungen abzuschätzen wünscht, liegt es nahe zunächst eine Differentiation vorzunehmen; denn durch eine (formale) Differentiation der Fourierreihe $\Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$ treten ja die Faktoren $i\mu_n$ hinzu, so dass gerade diejenigen Glieder, welche den grossen Werten von $|\mu_n|$ entsprechen, bevorzugt werden. Nun ist es aber nicht erlaubt die Relation $f_T(x) \sim \Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$ ohne weiteres formal zu differentieren; es braucht ja die Funktion $f_T(x)$ überhaupt nicht differentierbar zu sein. Wir müssen daher

zunächst unsere Funktion $f_T(x)$ durch eine andere (ebenfalls mit der Periode T periodische) Funktion $\varphi(x)$ approximieren, die so beschaffen ist, dass ihre Fourierentwicklung $\varphi(x) \sim \Sigma \beta_n e^{i\mu_n x}$ formal differentiert werden darf; wir benutzen einen möglichst einfachen Typus einer solchen Funktion $\varphi(x)$, nämlich eine Funktion, welche überall stetig[1] ist (also nicht, wie $f_T(x)$, in den Punkten nT Sprünge aufweist) und im Periodenintervall $0 \leqq x \leqq T$ streckenweise linear ist.

Um den Kernpunkt des Beweises, nämlich die Benutzung der gleichmässigen Stetigkeit (vergl. Satz II) unserer fast periodischen Funktion $f(x)$, deutlich hervortreten zu lassen, werden wir zunächst die Funktion $f(x)$ selbst (und nicht die Funktion $f_T(x)$) durch eine überall stetige, streckenweise lineare Funktion $\psi(x)$ approximieren. Zu diesem Zwecke bestimmen wir, mit Hilfe der gleichmässigen Stetigkeit von $f(x)$, zu dem gegebenen δ eine positive Zahl $\gamma = \gamma(\delta) < 1$ derart, dass für jedes Punktepaar x', x'' mit $|x' - x''| \leqq \gamma$ die Ungleichung

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{5}}$$

besteht, und definieren dann die Approximationsfunktion $\psi(x)$ dadurch, dass sie in den Punkten $x = n\gamma$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$) mit der Funktion $f(x)$ zusammenfällt, während

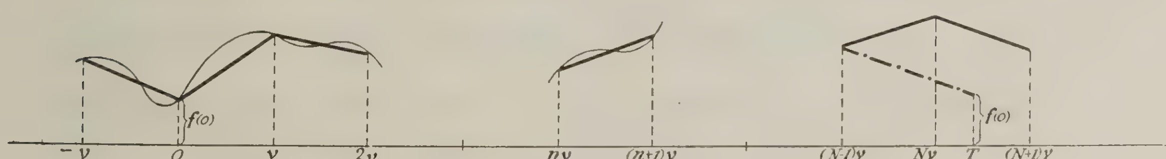


Fig. 7.

sie zwischen zwei Punkten $n\gamma$ und $(n+1)\gamma$ linear verläuft (siehe Fig. 7, wo $f(x)$ reell angenommen ist). Es ist klar, dass diese Funktion $\psi(x)$ für alle x numerisch $\leqq G$ ist, wo G (wie überall im Folgenden) die obere Grenze von $|f(x)|$ bezeichnet, und dass $\psi(x)$ unsere Funktion $f(x)$ bis auf $\sqrt{\frac{\delta}{5}}$ approximiert, d. h. dass in jedem Punkte x die Ungleichung

$$|f(x) - \psi(x)| < \sqrt{\frac{\delta}{5}}$$

besteht; denn, falls x im Intervalle $n\gamma < x < (n+1)\gamma$ liegt, ist ja

[1] Vergl. A. Hurwitz, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, Math. Ann. Bd. 57, (1903), S. 425—446. (Siehe insbesondere S. 440.)

$$|f(x)-\psi(x)| \leqq |f(x)-f(n\gamma)| + |\psi(x)-f(n\gamma)| \leqq |f(x)-f(n\gamma)| + |f((n+1)\gamma)-f(n\gamma)|$$
$$< \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{5}} = \sqrt{\frac{\delta}{5}}.$$

Was ferner den (streckenweise konstanten) Differentialquotienten $\psi'(x)$ anbelangt, so erfüllt er offenbar für alle $x \neq n\gamma$ (d. h. abgesehen von den Ecken von $\psi(x)$) die Ungleichung

$$|\psi'(x)| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{5}} : \gamma = \frac{\sqrt{\delta}}{2\gamma\sqrt{5}}.$$

Wir betrachten nunmehr, vorläufig bei einem beliebigen $T > 2$, die rein periodische Funktion $f_T(x)$ und definieren ihre approximierende (ebenfalls rein periodische) Funktion $\varphi(x)$ folgendermassen: Es sei $N(>2)$ die grösste ganze Zahl, für die $N\gamma < T$ ist (siehe Fig. 7); dann wird $\varphi(x)$ im Periodenintervall $0 \leqq x \leqq T$ dadurch bestimmt, dass sie im Intervalle $0 \leqq x \leqq (N-1)\gamma$ mit $\psi(x)$ zusammenfällt, im Punkte $x=T$ gleich $f(0)$ ist (damit die Gleichung $\varphi(T)=\varphi(0)$ bestehe) und zwischen $(N-1)\gamma$ und T linear verläuft. Diese Funktion $\varphi(x)$ genügt offenbar, wie die Funktion $\psi(x)$, der Ungleichung $|\varphi(x)| \leqq G$, und ihr Differentialquotient $\varphi'(x)$ ist im Intervalle $0 < x < (N-1)\gamma$ gleich $\psi'(x)$ und im »Restintervalle« $(N-1)\gamma < x < T$, wo $\varphi(x)$ linear verläuft, numerisch $\leqq \frac{2G}{T-(N-1)\gamma} \leqq \frac{2G}{\gamma}$, so dass $\varphi'(x)$ überall im Periodenintervall $(0, T)$, bis auf die Ecken, der Ungleichung

$$(8) \qquad |\varphi'(x)| \leqq \operatorname{Max}\left\{\frac{\sqrt{\delta}}{2\gamma\sqrt{5}}, \frac{2G}{\gamma}\right\} = c$$

genügt, wo c nur von δ, d. h. nicht von T abhängt.

Wir vergleichen nun die beiden Fourierentwicklungen

$$f_T(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\mu_n x} \quad \text{und} \quad \varphi(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_n e^{i\mu_n x}$$

und finden

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f_T(x)-\varphi(x)|^2\,dx = \frac{1}{T}\int_0^{(N-1)\gamma} |f(x)-\psi(x)|^2\,dx + \frac{1}{T}\int_{(N-1)\gamma}^{T} |f(x)-\varphi(x)|^2\,dx$$
$$< \frac{(N-1)\gamma}{T}\left(\sqrt{\frac{\delta}{5}}\right)^2 + \frac{T-(N-1)\gamma}{T}(2G)^2 < \frac{\delta}{5} + \frac{2\gamma}{T}4G^2;$$

und es gilt daher für jedes $T > T_0$, falls $T_0 (> 2)$ so gross gewählt wird, dass $\frac{8\gamma G^2}{T_0} < \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{5}$ ist, die Ungleichung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|^2 < \frac{\delta}{4}. \tag{9}$$

Wir benutzen nunmehr, dass die Fourierentwicklung des (streckenweise konstanten) Differentialquotienten $\varphi'(x)$ aus der Fourierentwicklung $\Sigma \beta_n e^{i\mu_n x}$ der Funktion $\varphi(x)$ selbst durch formale Differentiation hervorgeht, dass also

$$\varphi'(x) \sim \sum i\,\mu_n \beta_n e^{i\mu_n x}$$

ist, und dass somit, wegen (8),

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\mu_n \beta_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\varphi'(x)|^2 \, dx \leqq c^2$$

ist. Hieraus folgt, falls $\Omega = \Omega(\delta)$ gleich $\sqrt{\frac{4c^2}{\delta}}$ gewählt wird, dass

$$\sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\beta_n|^2 \leqq \frac{1}{\Omega^2} \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\mu_n \beta_n|^2 \leqq \frac{1}{\Omega^2} \sum_{-\infty}^{\infty} |\mu_n \beta_n|^2 \leqq \frac{\delta}{4c^2} \cdot c^2 = \frac{\delta}{4} \tag{10}$$

ist. Für dieses Ω und das obige T_0 ist dann offenbar die Ungleichung (7) für $T > T_0$ erfüllt; denn aus (9) und (10) ergibt sich sofort, nach der Ungleichung $|a + b|^2 \leqq 2(|a|^2 + |b|^2)$, dass

$$\sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\alpha_n|^2 \leqq 2 \left\{ \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\beta_n|^2 + \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\alpha_n - \beta_n|^2 \right\} \leqq 2 \left\{ \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\beta_n|^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|^2 \right\}$$
$$< 2\left(\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4}\right) = \delta.$$

Hilfssatz 2. *Es sei λ_0 eine feste Zahl, die von den sämtlichen Fourierexponenten Λ_n der Funktion $f(x)$ verschieden ist, d. h. es sei $a(\lambda_0) = M\{f(x) e^{-i\lambda_0 x}\} = 0$.*

Dann lässt sich zu jedem $\delta > 0$ ein $\omega > 0$ und ein $T_0 > 0$ derart finden, dass für $T > T_0$ die Ungleichung

$$\sum_{|\mu_n - \lambda_0| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 < \delta \tag{11}$$

besteht.

Beweis. Wir teilen den Beweis in zwei Teile, indem wir zunächst den Spezialfall $\lambda_0 = 0$ betrachten, und dann den allgemeinen Fall auf diesen zurückführen.

I. Es sei $\lambda_0 = 0$ angenommen. Der Satz besagt hier, dass, falls die Fourierentwicklung $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ kein konstantes Glied enthält, für hinreichend grosse T diejenigen Glieder der Fourientwicklung $f_T(x) \sim \Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$, welche den sehr kleinen Werten von $|\mu_n|$ (d. h. den sehr langsamen Schwingungen) entsprechen, fast keinen Beitrag zur Quadratsumme $\Sigma |\alpha_n|^2$ geben.

Während der Beweis des vorhergehenden Hilfssatzes (wo von den schnellen Schwingungen die Rede war) auf einer Differentiation beruhte, wird der jetzige Beweis auf einer Integration der Reihe $\Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$ basieren; bei einer solchen wird ja das Gewicht, durch die hinzukommenden Faktoren $\frac{1}{i\mu_n}$, eben auf die langsamen Schwingungen gelegt. Diese Integration werden wir aber nicht in der Form $\int_c^x$, sondern in der Form $\int_x^{x+c}$ ansetzen, weil wir dabei die Voraussetzung: $a(\lambda_0) = a(0) = M\{f(x)\} = 0$ sofort ausnützen können; in der Tat folgt aus dem Satze VIII (verschärfter Mittelwertssatz), dass wir zu dem gegebenen δ eine feste, d. h. von x unabhängige, Zahl $c = c(\delta)$ so gross bestimmen können, dass die Funktion (der Mittelwert)

$$F(x) = \frac{1}{c} \int_x^{x+c} f(y)\,dy$$

für alle x der Ungleichung

$$|F(x)| < \sqrt{\frac{\delta}{3}}$$

genügt. Es ist aber nicht die Funktion $f(x)$ selbst, sondern die Funktion $f_T(x)$,

wo T vorläufig eine beliebige Zahl $>c$ bezeichne, auf welche wir die Integration anwenden sollen, weshalb wir die Funktion

$$\Phi(x)=\frac{1}{c}\int_x^{x+c} f_T(y)\,dy \qquad (-\infty<x<\infty)$$

zu betrachten haben. Weil $f_T(x)$ periodisch mit der Periode T ist, wird $\Phi(x)$ offenbar wieder periodisch mit der Periode T sein (und $\Phi(x)$ wird sogar überall stetig, und nicht, wie $f_T(x)$, nur streckenweise stetig sein); wir bekommen nach einem bekannten Satz über die Integration einer gewöhnlichen Fourierreihe, die Fourierentwicklung von $\Phi(x)$ durch gliedweise Integration[1] der Fourierentwicklung $\Sigma a_n e^{i\mu_n x}$ des Integranden $f_T(x)$, d. h. es ist

$$\Phi(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \frac{e^{i\mu_n c}-1}{i\mu_n c} e^{i\mu_n x},$$

wo der Faktor $\dfrac{e^{i\mu_n c}-1}{i\mu_n c}$ für $n=0$ (d. h. $\mu_n=0$) die Zahl 1 bedeuten soll. Hieraus folgt

$$(12) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty}\left|a_n \frac{e^{i\mu_n c}-1}{i\mu_n c}\right|^2=\frac{1}{T}\int_0^T |\Phi(x)|^2\,dx.$$

Nun ist aber, wegen $f_T(x)=f(x)$ für $0<x<T$, die Funktion $\Phi(x)$ im Intervalle $0<x<T-c$ mit der Funktion $F(x)$ identisch, und daher $|\Phi(x)|<\sqrt{\frac{\delta}{3}}$ für $0<x<T-c$; weil ferner, wie sofort ersichtlich, die Funktion $|\Phi(x)|$ überall $\leqq G$ ist, ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\Phi(x)|^2 dx<\frac{1}{T}\left\{\int_0^{T-c}\left(\sqrt{\frac{\delta}{3}}\right)^2 dx+\int_{T-c}^{T} G^2\,dx\right\}<\frac{\delta}{3}+\frac{cG^2}{T};$$

somit ist nach (12) für jedes $T>T_0$, falls $T_0(>c)$ so gewählt wird, dass

---

[1] Vergl. HURWITZ, a. a. O. S. 438. Wäre $f_T(x)$ eine überall stetige — und nicht nur streckenweise stetige — Funktion, so könnten wir übrigens die Entwicklung von $\Phi(x)$ auch direkt aus dem Satze XXIV über die Integration von fast periodischen Funktionen entnehmen, weil ja dann $f_T(x)$ ein Spezialfall einer fast periodischen Funktion wäre.

$$\frac{cG^2}{T_0} < \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{3}$$

ist, die Ungleichung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \left| \frac{e^{i\mu_n c} - 1}{i\mu_n c} \right|^2 < \frac{\delta}{2}$$

erfüllt. Wir bestimmen nunmehr das $\omega = \omega(c) = \omega(\delta) > 0$ derart, dass für $|\mu| \leqq \omega$ die Ungleichung

$$\left| \frac{e^{i\mu c} - 1}{i\mu c} \right|^2 > \frac{1}{2}$$

besteht; dies ist möglich, denn für $\mu \to 0$ strebt die Zahl auf der linken Seite gegen den Grenzwert 1 (und für $\mu = 0$ bedeutet sie die Zahl 1 selbst). Für dieses ω und das obige T_0 ist dann die Ungleichung (11) für $T > T_0$ erfüllt; denn es ist

$$\sum_{|\mu_n| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 \leqq 2 \sum_{|\mu_n| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 \left| \frac{e^{i\mu_n c} - 1}{i\mu_n c} \right|^2 \leqq 2 \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \left| \frac{e^{i\mu_n c} - 1}{i\mu_n c} \right|^2 < 2\,\frac{\delta}{2} = \delta.$$

II. Nachdem der Hilfssatz 2 für den Fall $\lambda_0 = 0$ bewiesen ist, betrachten wir nunmehr den Fall eines beliebigen $\lambda_0 \neq 0$. Wir setzen

$$f(x) = e^{i\lambda_0 x} g(x) \qquad \text{d. h.} \qquad g(x) = f(x)\, e^{-i\lambda_0 x}.$$

Dann erfüllt, nach Voraussetzung, die (fast periodische) Funktion $g(x)$ die Bedingung

$$M\{g(x)\} = M\{f(x)\, e^{-i\lambda_0 x}\} = 0,$$

und wir wissen daher (nach dem schon bewiesenen Fall $\lambda_0 = 0$), dass, falls die zu $g(x)$ »gehörige» rein periodische Funktion $g_T(x)$ in ihre Fourierreihe

$$g_T(x) \sim \sum \beta_n e^{i\mu_n x}$$

entwickelt wird, die Summe $\Sigma |\beta_n|^2$, erstreckt über die »sehr kleinen» μ_n, einen »sehr kleinen» Wert ergibt. Wir wollen die Entwicklung $f_T(x) \sim \Sigma \alpha_n e^{i\mu_n x}$ auf die von $g_T(x)$ zurückführen. Dazu muss zunächst die zu dem Faktor $e^{i\lambda_0 x}$ »gehörige», mit der Periode T periodische, Funktion $e_T^{i\lambda_0 x}$ in ihre Fourierreihe

$$e_T^{i\lambda_0 x} \sim \sum \gamma_n e^{i\mu_n x}$$

entwickelt werden; denn nach dem Multiplikationssatz der gewöhnlichen Fourier-

reihen (der auf streckenweise stetige Funktionen angewandt werden darf) erhalten wir, wegen der Identität $f_T(x)=g_T(x)e_T^{i\lambda_0 x}$, die gesuchte Entwicklung $\Sigma\alpha_n e^{i\mu_n x}$ von $f_T(x)$ durch formale Multiplikation der beiden Entwicklungen $\Sigma\beta_n e^{i\mu_n x}$ und $\Sigma\gamma_n e^{i\mu_n x}$ von $g_T(x)$ bzw. $e_T^{i\lambda_0 x}$. Was die Entwicklung $\Sigma\gamma_n e^{i\mu_n x}$ von $e_T^{i\lambda_0 x}$ betrifft, werden wir zeigen, dass nur endlich viele Glieder $\gamma_n e^{i\mu_n x}$, und zwar diejenigen für welche μ_n »sehr nahe» an λ_0 liegen, eine »merkbare» Rolle spielen. Dazu haben wir den Ausdruck

$$\gamma_n = \frac{1}{T}\int_0^T e_T^{i\lambda_0 x}\, e^{-i\mu_n x}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\lambda_0 x}\, e^{-i\mu_n x}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda_0-\mu_n)x}\, dx$$

abzuschätzen; wir finden, dass für $\mu_n \neq \lambda_0$

$$|\gamma_n| = \left|\frac{1}{T}\,\frac{e^{i(\lambda_0-\mu_n)T}-1}{i(\lambda_0-\mu_n)}\right| \leqq \frac{1}{T}\left|\frac{2}{\lambda_0-\frac{2\pi}{T}n}\right| = \frac{\frac{1}{\pi}}{\left|\frac{T\lambda_0}{2\pi}-n\right|}$$

ist, woraus $\left(\text{wegen der Konvergenz der Reihe } \Sigma\frac{1}{n^2}\right)$ sofort erhellt, dass wir eine von T unabhängige ganze Zahl $N=N(\delta)$ so bestimmen können, dass, falls $n_0=n_0(T)$ denjenigen Index bezeichnet, für welchen $\mu_{n_0} \leqq \lambda_0 < \mu_{n_0+1}$, d. h. $n_0 \leqq \frac{T\lambda_0}{2\pi} < n_0+1$ ist, die Ungleichung

$$\sum_{|n-n_0|>N} |\gamma_n|^2 < \frac{\delta}{4G^2}$$

besteht. Wir teilen daher die (übrigens konvergente) Fourierreihe $\Sigma\gamma_n e^{i\mu_n x}$ von $e_T^{i\lambda_0 x}$ in zwei Teile:

$$e_T^{i\lambda_0 x} = \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} \gamma_q e^{i\mu_q x} + \sum_{|n-n_0|>N} \gamma_n e^{i\mu_n x} = H(x)+R(x).$$

Hierbei ist

$$\frac{1}{T}\int_0^T |R(x)|^2 dx = \sum_{|n-n_0|>N} |\gamma_n|^2 < \frac{\delta}{4G^2},$$

und, wegen

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |e^{i\lambda_0 x}|^2 dx = 1,$$

ist

$$\sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} |\gamma_q|^2 \leqq 1\,.$$

Wir bilden nun das Produkt

$$f_T(x) = g_T(x)\, e_T^{i\lambda_0 x} = g_T(x)\, H(x) + g_T(x)\, R(x)$$
$$\sim \sum \alpha_n' e^{i\mu_n x} + \sum \alpha_n'' e^{i\mu_n x} \qquad (\alpha_n' + \alpha_n'' = \alpha_n),$$

wo, wegen $|g(x)| = |f(x)| \leqq G$, die Fourierentwicklung des »Restes» $g_T(x) R(x)$ der Ungleichung

$$(13) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n''|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |g_T(x) R(x)|^2 dx \leqq G^2 \cdot \frac{1}{T}\int_0^T |R(x)|^2 dx < \frac{\delta}{4}$$

genügt. Die Koeffizienten α_m' der Entwicklung des »Hauptgliedes» $g_T(x) H(x)$ bestimmen wir direkt durch formale Multiplikation der Fourierreihe $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \beta_n e^{i\mu_n x}$ mit der endlichen Summe $\sum\limits_{n_0-N}^{n_0+N} \gamma_q e^{i\mu_q x}$; wir finden, unter Benutzung der Gleichung $\mu_n + \mu_q = \mu_{n+q}$, den Ausdruck

$$\alpha_m' = \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} \gamma_q \beta_{m-q}\,,$$

und hieraus, mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung,

$$(14) \qquad |\alpha_m'|^2 \leqq \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} |\gamma_q|^2 \cdot \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} |\beta_{m-q}|^2 \leqq \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} |\beta_{m-q}|^2.$$

Wir wählen nun das $\omega = \omega(\delta)$ und $T_1 = T_1(\delta)$ derart, dass für $T > T_1$

$$\sum_{|\mu_n| \leqq 2\omega} |\beta_n|^2 < \frac{\delta}{4(2N+1)}$$

ist, und setzen $T_0 = \operatorname{Max}\left(T_1, \frac{2\pi(N+1)}{\omega}\right)$. Die letzte Forderung $T_0 \geqq \frac{2\pi(N+1)}{\omega}$ ist so gewählt, dass für $T > T_0$ jede der $2N+1$ Differenzen $|\mu_q - \lambda_0|$, die offenbar

alle $\leqq (N+1)\frac{2\pi}{T}$ sind, kleiner als ω ausfällt; hieraus können wir nämlich schliessen, dass, falls μ_m im Intervalle $|\mu-\lambda_0| \leqq \omega$ liegt, die $2N+1$ Zahlen μ_{m-q} alle in das Intervall $|\mu| \leqq 2\omega$ fallen; in der Tat folgt ja aus $|\mu_q-\lambda_0| \leqq \omega$ und $|\mu_m-\lambda_0| \leqq \omega$, dass

$$|\mu_{m-q}| = |\mu_m-\mu_q| \leqq |\mu_m-\lambda_0| + |\mu_q-\lambda_0| \leqq 2\omega$$

ist. Aus der Ungleichung (14) folgt nunmehr durch Summation, dass

$$\sum_{|\mu_m-\lambda_0| \leqq \omega} |\alpha'_m|^2 \leqq \sum_{|\mu_m-\lambda_0| \leqq \omega} \sum_{q=n_0-N}^{n_0+N} |\beta_{m-q}|^2, \tag{15}$$

wo, nach der vorhergehenden Bemerkung, für jeden Index $m-q$ auf der rechten Seite die Ungleichung $|\mu_{m-q}| \leqq 2\omega$ gilt, falls $T > T_0$ gewählt ist. Da ferner ein Glied $|\beta_n|^2$ offenbar höchstens $(2N+1)$ Mal auf der rechten Seite auftritt, können wir aus (15) folgern, dass für $T > T_0$

$$\sum_{|\mu_m-\lambda_0| \leqq \omega} |\alpha'_m|^2 \leqq (2N+1) \sum_{|\mu_n| \leqq 2\omega} |\beta_n|^2 < (2N+1)\frac{\delta}{4(2N+1)} = \frac{\delta}{4} \tag{16}$$

ist. Hiermit sind wir am Ende des Beweises; denn aus (13) und (16) folgt, für jedes $T > T_0$,

$$\sum_{|\mu_n-\lambda_0| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 = \sum_{|\mu_n-\lambda_0| \leqq \omega} |\alpha'_n + \alpha''_n|^2 \leqq 2\left\{\sum_{|\mu_n-\lambda_0| \leqq \omega} |\alpha'_n|^2 + \sum_{|\mu_n-\lambda_0| \leqq \omega} |\alpha''_n|^2\right\}$$

$$\leqq 2\left\{\sum_{|\mu_n-\lambda_0| \leqq \omega} |\alpha'_n|^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha''_n|^2\right\} < 2\left\{\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4}\right\} = \delta.$$

Hilfssatz 3. *Es sei Λ_m ein Fourierexponent der Funktion $f(x)$, also*

$$M\{f(x)e^{-i\Lambda_m x}\} = A_m \neq 0.$$

Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $\omega > 0$ und ein $T_0 > 0$ derart, dass bei jedem $T > T_0$ die Ungleichung

$$\sum_{|\mu_n-\Lambda_m| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 < |A_m|^2 + \delta \tag{17}$$

besteht.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satz folgt leicht aus dem vorigen Hilfssatz. Wir setzen

$$f(x)=A_m e^{i A_m x}+g(x), \quad \text{also} \quad g(x)=f(x)-A_m e^{i A_m x},$$

und bilden, vorläufig bei einem beliebigen $T>0$, die Fourierentwicklungen der drei rein periodischen Funktionen mit der Periode T:

$$f_T(x) \sim \sum \alpha_n e^{i\mu_n x}, \quad g_T(x) \sim \sum \beta_n e^{i\mu_n x}, \quad (A_m e^{i A_m x})_T \sim \sum \gamma_n e^{i\mu_n x},$$

wo die erste Entwicklung durch formale Addition der beiden letzten entsteht, d. h. wo $\alpha_n=\beta_n+\gamma_n$ ist. Nun erfüllt aber die Funktion $g(x)$ für $\lambda_0=\Lambda_m$ die Bedingung des Hilfssatzes 2, d. h. es ist

$$M\{g(x)\, e^{-i A_m x}\} = M\{f(x) e^{-i A_m x}\} - A_m = 0,$$

und es lässt sich daher zu dem gegebenen $\delta>0$ ein ω und ein T_0 so bestimmen, dass

$$\sum_{|\mu_n - \Lambda_m| \leqq \omega} |\beta_n|^2 < \frac{\delta^2}{2\delta+4|A_m|^2}$$

ist. Ferner ist

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |A_m e^{i A_m x}|^2 dx = |A_m|^2.$$

Um bei der Abschätzung von $|\alpha_n|^2=|\beta_n+\gamma_n|^2$ den Faktor 2 zu vermeiden, der auftritt, wenn man die Ungleichung $|a+b|^2 \leqq 2(|a|^2+|b|^2)$ verwendet, bedienen wir uns hier der etwas allgemeineren Ungleichung

$$|a+b|^2 \leqq (1+c)\,|a|^2 + \left(1+\frac{1}{c}\right)|b|^2,$$

wo c eine beliebige Zahl >0 bedeutet. Wir setzen $c=\frac{2|A_m|^2}{\delta}$ und erhalten

$$\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega} |\alpha_n|^2 = \sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega} |\beta_n+\gamma_n|^2 \leqq (1+c)\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega} |\beta_n|^2 + \left(1+\frac{1}{c}\right)\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega} |\gamma_n|^2$$

$$\leqq (1+c)\sum_{|\mu_n-\Lambda_m|\leqq\omega} |\beta_n|^2 + \left(1+\frac{1}{c}\right)\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 <$$

$$\left(1+\frac{2|A_m|^2}{\delta}\right)\frac{\delta^2}{2\delta+4|A_m|^2} + \left(1+\frac{\delta}{2|A_m|^2}\right)|A_m|^2 = \frac{\delta}{2} + \left(|A_m|^2+\frac{\delta}{2}\right) = |A_m|^2+\delta.$$

Mit diesen drei Hilfssätzen sind wir offenbar ein Stück auf dem Wege nach unserem Ziel vorwärts gekommen: dem Beweis, dass für hinreichend grosse Werte von T die Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$ nicht »merkbar» grösser als $\Sigma|A_n|^2$ ist; wir haben ja durch diese Sätze erkannt, 1) dass die Glieder $\alpha_n e^{i\mu_n x}$ mit sehr grossen μ_n nichts wesentliches zur Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$ beitragen, 2) dass die Glieder $\alpha_n e^{i\mu_n x}$, für welche μ_n in der unmittelbaren Umgebung einer von den Fourierexponenten Λ_n verschiedenen Zahl λ_0 liegen, auch nichts wesentliches beitragen, und 3) dass die Glieder, für welche die zugehörigen μ_n in der unmittelbaren Umgebung eines Fourierexponenten Λ_m liegen, nicht mehr beitragen, als sie »dürfen», d. h. nicht wesentlich mehr als die Zahl $|A_m|^2$.

Der Inhalt dieser drei Hilfssätze reicht aber andererseits lange nicht aus um den Beweis unserer Behauptung, $\Sigma|\alpha_n|^2 < \Sigma|A_n|^2+\delta$ (für $T>T_0$), streng zu führen. In der Tat wäre ja für alle grossen Werte von T, d. h. für enge aneinander liegende μ_n, z. B. das folgende Verhalten der Reihe $\Sigma\alpha e^{i\mu_n x}$ mit diesen drei Sätzen vereinbar: Für alle μ_n, die in einem gewissen Intervall, z. B. dem Intervalle $0<\mu<1$, liegen, in welches etwa gar keine Fourierexponenten Λ_m fallen, sei $\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{N}}$, wo N die (mit T ins Unendliche wachsende) Anzahl der im betrachteten Intervalle gelegenen Exponenten μ_n bezeichnet. Dann gäben diejenigen μ_n, welche in einem Teilintervalle der Länge ω gelegen sind, einen Beitrag zur Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$, der asymptotisch (d. h. für $T\to\infty$) gleich $N\omega\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2=\omega$ wäre, so dass, in Übereinstimmung mit dem Hilfssatze 2, eine »unendliche kleine» Umgebung eines beliebigen Punktes λ_0 unseres Intervalles nur einen »unendlich kleinen» Beitrag zur Quadratsumme liefern würde; trotzdem gäbe aber das Gesamtintervall $0<\mu<1$, obwohl es gar keine Fourierexponenten Λ_m enthält, einen Beitrag, der nicht mit $T\to\infty$ unendlich klein würde, nämlich den konstanten Beitrag 1.

Was uns fehlt, ist offenbar ein Satz, welcher besagt, dass für grosse Werte von T der »wesentliche» Beitrag zur Summe $\Sigma|\alpha_n|^2$ nur von Gliedern $\alpha_n e^{i\mu_n x}$ herrührt, deren Exponenten μ_n in der Umgebung gewisser einzelner Punkte liegen, und somit eine Möglichkeit wie die des obigen »Beispieles», wo ein wesentlicher Beitrag von einer ganzen Strecke kam, ausschliesst. Wir werden nun in der Tat (in den nächsten Paragraphen) einen solchen Satz beweisen nämlich das folgende

Lemma I. (Lemma über $f_T(x)$.) *Zu jedem gegebenen $\delta^*>0$ und $\Omega>0$ gibt es in dem abgeschlossenen Intervalle $-\Omega\leqq\mu\leqq\Omega$ eine endliche Anzahl $M=M(\delta^*,\Omega)$*

von Punkten (Zahlen) $P_1, P_2, \ldots, P_M$, *mit der folgenden Eigenschaft: Falls* ω *beliebig klein gewählt wird, gilt für alle hinreichend grossen* T, *d. h. für jedes* $T > T_0 = T_0(\omega)$, *die Ungleichung*

$$\sum{}^* |\alpha_n|^2 < \delta^*,$$

wo Σ^* *bedeutet, dass nur über diejenigen* n *summiert werden soll, für welche die Exponenten* μ_n *innerhalb des Intervalles* $(-\Omega, \Omega)$ *aber ausserhalb der* M *Intervalle* $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ $(m = 1, 2, \ldots, M)$ *gelegen sind.*

Wir schliessen diesen Paragraph mit dem Nachweis, *dass der Beweis des Fundamentalsatzes, wenn wir das obige Lemma vorweg nehmen, unmittelbar zu Ende zu führen ist.* Es sei also $\delta_0 > 0$ beliebig gegeben; wir haben die Existenz eines T_0 derart zu beweisen, dass für $T > T_0$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \sum |A_n|^2 + \delta_0$$

ist. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst nach dem Hilfssatze 1 das $\Omega > 0$ derart, dass für $T > T_1$ die Ungleichung

$$\sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\alpha_n|^2 < \frac{\delta_0}{3}$$

besteht. Danach setzen wir $\delta^* = \frac{\delta_0}{3}$ und bestimmen zu diesem δ^* und dem obigen Ω eine endliche Anzahl von Punkten $P_1, \ldots, P_M$ im Sinne von Lemma I. Diese M Punkte teilen wir in zwei Klassen, indem wir in die erste Klasse diejenigen aufnehmen, welche Fourierexponenten der gegebenen Funktion $f(x)$ sind, etwa

$$P'_1 = \Lambda_{m_1}, P'_2 = \Lambda_{m_2}, \ldots, P'_R = \Lambda_{m_R},$$

und in die zweite Klasse diejenigen, welche nicht Fourierexponenten sind, etwa

$$P''_1 = \lambda_1, P''_2 = \lambda_2, \ldots, P''_S = \lambda_S \qquad (R + S = M).$$

Wir wählen nun, nach den Hilfssätzen 3 und 2, das ω so klein, dass für jedes $T > T_2 = T_2(\omega)$ die M Ungleichungen

$$\sum_{|\mu_n - \Lambda_{m_r}| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 < |A_{m_r}|^2 + \frac{\delta_0}{3M} \qquad (r = 1, 2, \ldots, R)$$

und

$$\sum_{|\mu_n - \lambda_s| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 < \frac{\delta_0}{3M} \qquad (s = 1, 2, \ldots, S)$$

bestehen, und wählen schliesslich zu diesem ω, nach dem Lemma, ein $T_0 (> T_1, T_2)$ derart, dass für $T > T_0$ die Ungleichung

$$\sum{}^* |\alpha_n|^2 < \delta^* = \frac{\delta_0}{3}$$

besteht, wo Σ^* im Sinne von Lemma I bedeutet, dass über alle diejenigen n zu summieren ist, für welche μ_n innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ liegen. Hiermit ist der Beweis zu Ende; denn für jedes $T > T_0$ haben wir ja die Ungleichung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \leqq \sum{}^* |\alpha_n|^2 + \sum_{|\mu_n| \geqq \Omega} |\alpha_n|^2 + \sum_{r=1}^{R} \sum_{|\mu_n - \Lambda_{m_r}| \leqq \omega} |\alpha_n|^2 + \sum_{s=1}^{S} \sum_{|\mu_n - \lambda_s| \leqq \omega} |\alpha_n|^2$$

$$< \frac{\delta_0}{3} + \frac{\delta_0}{3} + \sum_{r=1}^{R} \left(|A_{m_r}|^2 + \frac{\delta_0}{3M} \right) + \sum_{s=1}^{S} \left(\frac{\delta_0}{3M} \right) = \delta_0 + \sum_{r=1}^{R} |A_{m_r}|^2 \leqq \delta_0 + \sum |A_n|^2.$$

§ 8.

Zurückführung von Lemma I auf ein Lemma über Verschiebungszahlen (Lemma II).

In den Beweisen der Hilfssätze des § 7 haben wir die Voraussetzung, dass $f(x)$ fast periodisch ist, nicht voll ausgenützt; z. B. haben wir beim Beweise des Hilfssatzes 1 nur benutzt, dass $f(x)$ beschränkt und gleichmässig stetig ist. Bei den folgenden Untersuchungen dagegen, wo es sich um die Herleitung des viel tiefer liegenden Lemma I handelt, werden wir die charakteristischen Eigenschaften der fast periodischen Funktionen, welche in ihrer Definition angegeben sind, direkt heranziehen müssen. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet der

folgende Hilfssatz, welcher die leicht verständliche Tatsache ausspricht, dass die Fourierreihe $\Sigma\, \alpha_n e^{i\mu_n x}$ der, mit einer hinreichend grossen Periode T periodischen, Hilfsfunktion $f_T(x)$ nur eine »geringe Änderung» erfährt, wenn man x durch $x+\tau$ ersetzt, soferne τ eine Verschiebungszahl der ursprünglichen Funktion $f(x)$ ist.

Hilfssatz 4. *Zu jedem $\delta>0$ gibt es ein $\varepsilon>0$ derart, dass, falls $\tau>0$ eine beliebig gewählte zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist, für alle hinreichend grossen T, d. h. für $T>T_0=T_0(\delta, \varepsilon, \tau)$, die Ungleichung*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 |1 - e^{i\mu_n\tau}|^2 < \delta$$

besteht.

Beweis. Es sei $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\delta}{2}}$ gesetzt; danach sei eine beliebige Verschiebungszahl $\tau=\tau(\varepsilon)>0$ gewählt, und schliesslich sei $T_0=\mathrm{Max}\left\{\tau, \dfrac{8\,G^2\tau}{\delta}\right\}$ gesetzt. Ich behaupte, dass dieses ε, das beliebig gewählte $\tau(\varepsilon)$ und dieses T_0 die Bedingungen des Satzes erfüllen. Es sei also $T>T_0$ und

$$p(x) = f_T(x) \sim \sum \alpha_n e^{i\mu_n x};$$

wir bilden die ebenfalls rein periodische und streckenweise stetige Funktion $p(x+\tau)$, welche — wie aus der Definition der Fourierkonstanten sofort folgt — die Fourierentwicklung

$$p(x+\tau) \sim \sum \alpha_n e^{i\mu_n\tau} e^{i\mu_n x}$$

besitzt. Es ist daher

$$\frac{1}{T}\int_0^T |p(x)-p(x+\tau)|^2\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_n e^{i\mu_n\tau}|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2\,|1-e^{i\mu_n\tau}|^2.$$

Nun ist aber $p(x)=f_T(x)=f(x)$ für $0<x<T$, also $p(x+\tau)=f(x+\tau)$ für $-\tau<x<T-\tau$, und wir erhalten somit die Ungleichung

$$\frac{1}{T}\int_0^T |p(x)-p(x+\tau)|^2\,dx = \frac{1}{T}\int_0^{T-\tau} |f(x)-f(x+\tau)|^2\,dx + \frac{1}{T}\int_{T-\tau}^{T} |p(x)-p(x+\tau)|^2\,dx$$

$$\leqq \frac{T-\tau}{T}\cdot\varepsilon^2 + \frac{\tau}{T}(2\,G)^2 < \varepsilon^2 + \frac{\tau}{T_0}\cdot 4\,G^2 \leqq \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta,$$

womit die Behauptung $\Sigma\,|\alpha_n|^2\,|1-e^{i\mu_n\tau}|^2<\delta$ bewiesen ist.

Bevor wir auf die Bedeutung dieses Verhaltens der Fourierreihe von $f_T(x)$ eingehen, müssen wir erst dem Hilfssatze 4 eine etwas erweiterte Fassung geben, bei der nicht nur eine, sondern beliebig viele (zu demselben ε gehörige) Verschiebungszahlen auftreten.

Hilfssatz 5. *Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass, falls N eine beliebig gewählte Anzahl ist, und $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ beliebige zu ε gehörige positive Verschiebungszahlen der Funktion $f(x)$ sind, für $T > T_0 = T_0(\delta, \varepsilon, \tau_1, \ldots, \tau_N)$ die Ungleichung*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \cdot \frac{|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2 + |1-e^{i\mu_n\tau_2}|^2 + \cdots + |1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2}{N} < \delta$$

besteht.

Beweis. Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem vorigen Hilfssatze. In der Tat, es sei $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ eine Zahl ε im Sinne des Hilfssatzes 4; danach seien die N zu ε gehörigen positiven Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ beliebig gewählt, und schliesslich seien $T_0' = T_0'(\delta, \varepsilon, \tau_1)$, $T_0'' = T_0''(\delta, \varepsilon, \tau_2), \ldots, T_0^{(N)} = T_0^{(N)}(\delta, \varepsilon, \tau_N)$ die zugehörigen Zahlen T_0 ebenfalls im Sinne des vorhergehenden Hilfssatzes. Dann hat die Zahl $T_0 = \mathrm{Max}\,(T_0', T_0'', \ldots, T_0^{(N)})$ offenbar die erwünschte Eigenschaft; denn für $T > T_0$ ist ja

$$\sum |\alpha_n|^2 |1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2 < \delta, \ \sum |\alpha_n|^2 |1-e^{i\mu_n\tau_2}|^2 < \delta, \ldots, \sum |\alpha_n|^2 |1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2 < \delta$$

also auch

$$\sum |\alpha_n|^2 \frac{|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2 + |1-e^{i\mu_n\tau_2}|^2 + \cdots + |1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2}{N} < \delta.$$

Aus dem Hilfssatze 4 lässt sich offenbar folgern, dass höchstens diejenigen Glieder $\alpha_n e^{i\mu_n x}$ einen »merkbaren» Beitrag zur Summe $\Sigma |\alpha_n|^2$ liefern können, für welche der Faktor $|1-e^{i\mu_n\tau}|$ klein ist, d. h. für welche $\mu_n\tau$, mod. 2π betrachtet, klein ist, dass also diejenigen Glieder $\alpha_n e^{i\mu_n x}$, für welche $\mu_n\tau$ (mod. 2π) nicht klein ist, »belanglos» sind; Hilfssatz 4 liefert also ein »Sieb», das uns erlaubt, mit Hilfe einer Verschiebungszahl τ, gewisse belanglose μ beiseite zu schaffen.[1] Leider dürfen wir dieses Siebverfahren nicht unter Hinzunahme von neuen τ successive

[1] Obwohl dadurch ein System von discreten Punkten $\frac{2\pi m}{\tau}$ herausgehoben wird, so dass die μ_n ausserhalb kleiner Umgebungen dieser Punkte belanglos sind, ist dies noch keineswegs die Behauptung von Lemma I. Die Lage jener Punkte ist nämlich von der gewünschten Feinheit der zugehörigen Umgebungen abhängig (weil ja das ε in Hilfssatz 4, und damit auch das τ, von δ abhängt), weshalb diese Punkte nicht als feste Punkte P_m im Sinne von Lemma I verwendet werden können. Dies ist der Grund, der uns im Folgenden nötigt, nicht nur mit einem τ sondern gleichzeitig mit vielen τ zu sieben.

fortsetzen, weil eine Summe vieler einzeln »belangloser» Grössen nicht wieder belanglos zu sein braucht; mit anderen Worten: man darf nicht schliessen, dass — wie gross auch N gewählt wird — alle diejenigen Glieder $a_n e^{i\mu_n x}$ belanglos sind, für welche unter den N Produkten $\mu_n\tau_1, \mu_n\tau_2, \ldots, \mu_n\tau_N$ mindestens eines (mod. 2π genommen) nicht klein ist. Dies geht auch aus dem Hilfssatz 5 hervor, wo ja der ganze Bruch unter dem Summationszeichen nicht »gross» auszufallen braucht, wenn nur ein einzelnes Glied im Zähler »gross» ist. Wir können offenbar nur so viel schliessen, dass solche Glieder belanglos sind, für welche ein gewisser fester Prozentsatz dieser N Produkte merkbar von 0 entfernt ist; dies geschieht durch den folgenden Satz (in welchem wir übrigens statt $\frac{1}{4}N$ und $\frac{\pi}{6}$ eben so gut $\delta_1 N$ und δ_2 mit beliebig kleinen δ_1 und δ_2 hätten schreiben können).

Hilfssatz 6. *Zu jedem $\delta'>0$ gibt es ein $\varepsilon=\varepsilon(\delta')$ derart, dass, falls $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ beliebige (und beliebig viele) zu ε gehörige positive Verschiebungszahlen der Funktion $f(x)$ sind, für alle hinreichend grossen T, d. h. für $T>T_0=T_0(\delta', \varepsilon, \tau_1, \ldots, \tau_N)$, die Ungleichung*

$$\sum{}' |a_n|^2 < \delta'$$

besteht, wo Σ' bedeutet, dass die Summation nur über solche n zu erstrecken ist, für welche mehr als ein Viertel der N Zahlen

$$\mu_n\tau_1, \mu_n\tau_2, \ldots, \mu_n\tau_N$$

auf der Kreisperipherie (d. h. mod. 2π*) betrachtet numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ sind* (d. h. in Intervalle der Form $2p\pi+\frac{\pi}{6}<z<2(p+1)\pi-\frac{\pi}{6}$ fallen).

Beweis. Für jede Zahl y, welche mod. 2π numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ ist, ist offenbar

$$|1-e^{iy}|^2 > \left|1-e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 > \sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}.$$

Falls von N beliebigen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ mehr als $\frac{1}{4}N$ numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind, wird daher

$$\frac{|1-e^{i\beta_1}|^2+|1-e^{i\beta_2}|^2+\cdots+|1-e^{i\beta_N}|^2}{N} > \frac{\frac{1}{4}N\cdot\frac{1}{4}}{N} = \frac{1}{16} \tag{18}$$

sein. Wir wählen nun nach dem Hilfssatze 5 $\left(\text{mit } \delta = \frac{\delta'}{16}\right)$ die Zahl ε so klein, dass, falls $\tau_1, \ldots, \tau_N$ eine beliebige Anzahl von positiven zu ε gehörigen Verschiebungszahlen sind, für hinreichend grosse T die Ungleichung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \frac{|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2 + \cdots + |1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2}{N} < \frac{\delta'}{16} \tag{19}$$

besteht. Hier ist aber, nach (18), der Bruch unter dem Summationszeichen grösser als $\frac{1}{16}$ für jedes n, das in der Σ' mitgenommen werden soll, und es folgt somit aus (19), dass

$$\sum{}' |\alpha_n|^2 \leqq 16 \sum{}' |\alpha_n|^2 \frac{|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2 + \cdots + |1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2}{N}$$

$$\leqq 16 \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \frac{|1-e^{i\mu_n\tau_1}|^2 + \cdots + |1-e^{i\mu_n\tau_N}|^2}{N} < \delta'$$

ist.

Die Charakterisierung derjenigen n, über welche die Summation Σ' in dem Hilfssatze 6 zu erstrecken ist, nämlich »von den N Zahlen $\mu_n\tau_1, \mu_n\tau_2, \ldots, \mu_n\tau_N$ sollen mehr als $\frac{1}{4}N$ numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sein» ist keine besonders übersichtliche. Wir werden aber zeigen, dass es von diesem Satze aus möglich ist zu dem Lemma I hinüberzukommen, in welch letzterem die auftretende Summation Σ^* ja viel einfacher erklärt wurde. Der Übergang geschieht durch den folgenden Satz, der nicht — wie die früheren — von der rein periodischen Hilfsfunktion $f_T(x)$ und ihrer Fourierentwicklung handelt, sondern eine direkte Aussage über die Verschiebungszahlen τ enthält, und sich darauf bezieht, wie sich N Grössen der Form $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$, wo μ eine stetige reelle Variable ist, mod. 2π verteilen.

Lemma II. (Lemma über Verschiebungszahlen.) *Es sei $\varepsilon > 0$ und $\Omega > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es in dem abgeschlossenen Intervalle $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$ eine endliche Anzahl $M = M(\varepsilon, \Omega)$ von festen Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_M$ mit der folgenden Eigenschaft: Falls $\omega > 0$ beliebig klein gewählt wird, lässt sich eine (von ω abhängige) Anzahl von zu ε gehörigen positiven Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ so bestimmen, dass für jede Zahl μ, welche innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ gelegen ist, mehr als ein Viertel der N Produkte*

$$\mu\tau_1,\ \mu\tau_2,\ \ldots,\ \mu\tau_N$$

numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) *sind.*

Den Beweis für dieses Lemma, welcher ein genaueres Studium der Eigenschaften der Verschiebungszahlen erfordert, werden wir erst im nächsten Paragraphen erbringen. Dagegen werden wir schon hier zeigen, *wie man mit Hilfe von Lemma II sofort im Stande ist das Lemma I aus dem Hilfssatze* 6 *abzuleiten.* Es sei also $\delta^* > 0$ und $\Omega > 0$ beliebig gegeben; wir haben die Existenz einer endlichen Anzahl solcher, im Intervalle $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$ gelegener, Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_M$ nachzuweisen, dass, falls $\omega > 0$ beliebig klein gewählt wird, für alle hinreichend grossen T die Ungleichung

$$\sum\nolimits^* |a_n|^2 < \delta^*$$

besteht, wo Σ^* bedeutet, dass nur über diejenigen n summiert werden soll, für welche die Exponenten μ_n innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ gelegen sind. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst zu der gegebenen Zahl $\delta' = \delta^*$ ein ε im Sinne des Hilfssatzes 6, und danach zu diesem ε und der gegebenen Zahl Ω die Punkte P_1, $P_2, \ldots, P_M$ im Sinne von Lemma II. Ich behaupte, dass diese M Punkte der oben angegebenen Forderung von Lemma I genügen. In der Tat können wir nach dem Lemma II, falls ω beliebig klein gewählt wird, eine gewisse Anzahl von zu ε gehörigen positiven Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ so finden, dass für jede reelle Zahl μ, welche innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ gelegen ist, mehr als ein Viertel der N Produkte

$$\mu\tau_1,\ \mu\tau_2,\ \ldots,\ \mu\tau_N$$

numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind; somit werden — falls wir in dem Hilfssatze 6 eben diese Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ benutzen — gewiss sämtliche Zahlen n, für welche μ_n innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ liegen, in der Summation Σ' des Hilfssatzes 6 miteinbegriffen, d. h. es wird

$$\sum\nolimits^* |a_n|^2 \leqq \sum\nolimits' |a_n|^2.$$

Hiermit sind wir aber mit dem Beweise zu Ende; denn nach dem Hilfssatze 6 ist ja $\Sigma' |a_n|^2 < \delta' = \delta^*$ für alle hinreichend grossen T, und diese Ungleichung gilt also a fortiori, wenn $\Sigma' |a_n|^2$ durch $\Sigma^* |a_n|^2$ ersetzt wird.

§ 9.

Beweis von Lemma II.

In dem vorhergehenden Paragraphen haben wir den Beweis von Lemma I — und damit den Beweis des Fundamentalsatzes — auf ein Lemma II zurückgeführt, das nichts mehr mit Fourierreihen zu tun hat, sondern lediglich von den Verschiebungszahlen einer fast periodischen Funktion handelt. Bevor wir aber dieses Lemma II beweisen können, müssen wir zunächst einige vorbereitende Bemerkungen und Hilfssätze über Verschiebungszahlen vorausschicken.

Falls τ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl unserer Funktion $f(x)$ ist, d. h. falls die Ungleichung

$$(20) \qquad |f(x+\tau)-f(x)| \leqq \varepsilon$$

für alle x besteht, wird τ natürlich a fortiori als Verschiebungszahl zu jedem ε_1 gehören, das $>\varepsilon$ ist. Im Folgenden wird es zweckmässig sein, bei einem gegebenen τ, von seinem »*Minimalfehler*» $e=e(\tau)$ zu sprechen, d. h. von *der unteren Grenze* e *aller Zahlen* ε, *zu welchen* τ *als Verschiebungszahl gehört;* weil wir in der Ungleichung (20) das Zeichen $\leqq$ (und nicht $<$) gewählt haben, wird diese untere Grenze offenbar selbst zur Menge der ε gehören, d. h. die Zahl e kann auch als die kleinste derjenigen Zahlen ε charakterisiert werden, zu welchen τ als Verschiebungszahl gehört. Weil $f(x)$ beschränkt ist, mit der oberen Grenze G, und daher bei jedem beliebig gegebenen reellen τ für alle x die Ungleichung $|f(x+\tau)-f(x)| \leqq 2G$ besteht, ist der obige Minimalfehler $e(\tau)$ für alle reellen τ definiert, und diese Funktion $e(\tau)$ genügt im ganzen Intervalle $-\infty<\tau<\infty$ der Ungleichung $0 \leqq e(\tau) \leqq 2G$.

Aus der — schon in § 1 gemachten — Bemerkung, dass, falls τ_1 und τ_2 Verschiebungszahlen sind, welche zu ε_1 bzw. ε_2 gehören, die Summe $\tau_1+\tau_2$ gewiss eine zu $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ gehörige Verschiebungszahl ist, folgt sofort, dass der Minimalfehler $e(\tau)$ für jedes Wertepaar τ_1, τ_2 der Ungleichung

$$(21\text{ a}) \qquad e(\tau_1+\tau_2) \leqq e(\tau_1)+e(\tau_2)$$

genügt. Es ist also auch $e(\tau_1) \leqq e(-\tau_2)+e(\tau_1+\tau_2)$, und, weil $e(-\tau)=e(+\tau)$ ist, folgt hieraus weiter, dass

$$(21\text{ b}) \qquad e(\tau_1+\tau_2) \geqq e(\tau_1)-e(\tau_2).$$

In unseren weiteren Überlegungen werden wir der Bequemlichkeit halber nicht mit beliebigen reellen τ, sondern nur mit ganzzahligen τ operieren. Dass es möglich ist mit den ganzzahligen τ allein auszukommen, rührt von dem folgenden, auch an sich ganz interessanten, Satz her:

Hilfssatz 7. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Länge $L = L(\varepsilon)$ derart, dass jedes Intervall dieser Länge L mindestens eine ganze Zahl n mit $e(n) \leqq \varepsilon$ enthält,* d. h. mindestens eine zu ε gehörige ganzzahlige Verschiebungszahl n enthält.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt sofort aus dem Satze III des § 1, dass die Summe zweier fast periodischer Funktionen wieder eine fast periodische Funktion ist, oder vielmehr aus der dort bemerkten Tatsache, mit welcher dieser Satz begründet wurde, dass es zu zwei fast periodischen Funktionen und einem beliebig gegebenen ε immer eine Länge L_0 derart gibt, dass jedes Intervall dieser Länge eine Zahl τ enthält, welche gleichzeitig eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der beiden Funktionen darstellt. Wir wenden — indem wir die gegebene Zahl ε kleiner als 2 annehmen — diese Bemerkung auf unsere Funktion $f(x)$ und die in der Fig. 8 durch die voll ausgezogene Linie angegebene rein

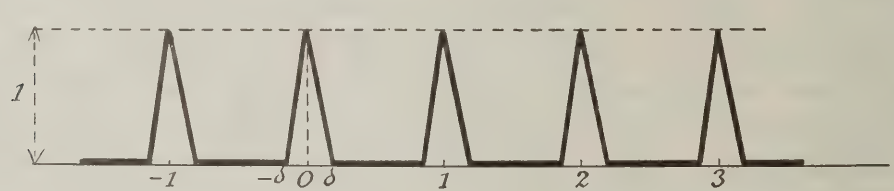


Fig. 8.

periodische Funktion $p(x)$ der Periode 1 an, wobei $\delta < \frac{1}{2}$ so klein gewählt ist (vergl. das Corollar des Satzes II), dass, falls τ eine beliebige zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$, und $|\delta'| < \delta$ ist, $\tau + \delta'$ gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist. Wegen $\frac{\varepsilon}{2} < 1$, muss offenbar (wie aus der Figur sofort erhellt) jede zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der rein periodischen Hilfsfunktion $p(x)$ von der Form $n + \delta'$ mit $|\delta'| < \delta$ sein. Wir bestimmen nunmehr die Länge $L_0 = L_0\ (f,\ p,\ \varepsilon)$ derart, dass jedes Intervall der Länge L_0 eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl τ^* der Funktion $f(x)$ ent-

hält, die gleichzeitig eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $p(x)$ ist, und also gewiss die Form $\tau^* = n^* + \delta^*$ besitzt, wo $|\delta^*| < \delta$ und daher, nach der Bestimmung von δ, die ganze Zahl n^* eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist. Hieraus folgt aber sofort, dass die Länge $L = L_0 + 1$ die erwünschte Eigenschaft hat; falls nämlich $\left(\alpha - \frac{L}{2}, \alpha + \frac{L}{2}\right)$ ein beliebiges Intervall dieser Länge L ist, können wir ja im kleineren Intervall $\left(\alpha - \frac{L_0}{2}, \alpha + \frac{L_0}{2}\right)$ der Länge L_0 eine der obigen gemeinsamen Verschiebungszahlen $\tau^* = n^* + \delta^*$ finden, und wegen $|\delta^*| < \delta < \frac{1}{2}$ wird hierbei die ganze Zahl n^* in das Intervall $\left(\alpha - \frac{L}{2}, \alpha + \frac{L}{2}\right)$ fallen.

Für einen späteren Zweck verallgemeinern wir diesen Hilfssatz 7 folgendermassen:

Hilfssatz 8. *Es sei ν eine reelle Zahl $\neq 0$, und $\varepsilon > 0$ sowie $\eta > 0$ beliebig gegeben. Dann lässt sich eine Länge $L' = L'(\nu, \varepsilon, \eta, f)$ derart bestimmen, dass jedes Intervall der Länge L' mindestens eine ganze Zahl n mit $e(n) \leqq \varepsilon$ enthält, deren Abstand von einem ganzen Multiplum von ν kleiner als η ist.*

Beweis. Es sei zunächst, wie oben, die Zahl $\delta < \frac{1}{2}$ so bestimmt, dass, falls τ eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist, jede Zahl $\tau + \delta'$ mit $|\delta'| < \delta$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ sein muss, und danach werde die Zahl $\alpha < \delta$ und $< \frac{\eta}{2}$ gewählt. Wir benutzen hier zwei rein periodische Hilfsfunktionen, $p_1(x)$ mit der Periode 1, und $p_2(x)$ mit der Periode $|\nu|$, welche durch die Figuren 9 a und 9 b definiert sind. Weil $p_1(0) + p_2(0) = 2$ ist,

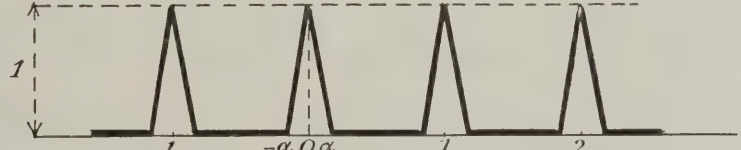


Fig. 9 a.

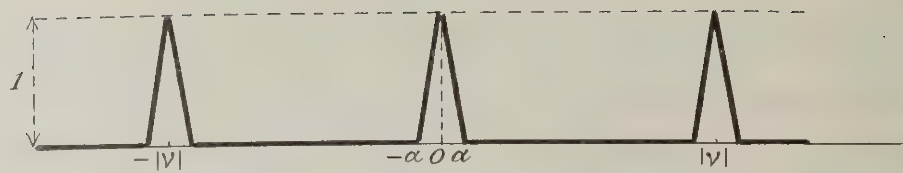


Fig. 9 b.

folgt sofort — falls die gegebene Zahl ε kleiner als 2 angenommen wird — dass jede zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der fast periodischen Funktion $p_1(x)+p_2(x)$ die Form $n_1+\delta_1=n_2\nu+\delta_2$ mit $|\delta_1|<\alpha$, $|\delta_2|<\alpha$ haben muss. Wir bestimmen nun die Länge L'_0 derart, dass jedes Intervall der Länge L'_0 mindestens eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl τ^* der gegebenen Funktion $f(x)$ enthält, welche gleichzeitig eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl der fast periodischen Hilfsfunktion $p_1(x)+p_2(x)$ ist und also, nach der vorhergehenden Bemerkung, gewiss die Form

$$\tau^*=n_1^*+\delta_1^*=n_2^*\nu+\delta_2^* \qquad \text{mit } |\delta_1^*|<\alpha,\ |\delta_2^*|<\alpha$$

besitzt. Dann ist offenbar n_1^* eine Zahl n im Sinne des Satzes, d. h. eine ganze Zahl mit $e(n)\leqq\varepsilon$, deren Abstand von einem ganzen Multiplum von ν kleiner als $2\alpha<\eta$ ist; und wegen $|n_1^* \quad \tau^*|<\frac{1}{2}$ wird daher die Länge $L'=L'_0+1$ die erwünschte Eigenschaft besitzen.

Im folgenden werden wir immer nur mit ganzzahligen Verschiebungszahlen τ operieren; zur Abkürzung nennen wir die Menge aller ganzzahligen Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$, welche zu einem gegebenen ε gehört, die *Verschiebungsmenge E_ε unserer Funktion $f(x)$.* Bevor wir zu der näheren Untersuchung dieser Verschiebungsmenge übergehen, fügen wir, um den innern Kern der Betrachtungen besser verständlich zu machen, die folgende Bemerkung ein.

Bemerkung. In dem speziellen Falle, wo die gegebene fast periodische Funktion rein periodisch mit der Periode 1 ist, besteht offenbar, bei jedem $\varepsilon>0$, die Menge E_ε aus sämtlichen ganzen Zahlen, d. h. sie ist einfach eine arithmetische Progression. Bei einer beliebigen fast periodischen Funktion wird die Menge E_ε natürlich nicht mehr diese Eigenschaft haben; *trotzdem hat sie aber gewisse Züge mit einer solchen Progression gemeinsam.* Nicht nur, dass

sie niemals beliebig grosse Lücken aufweist[1], ist ihr eigentümlich, sondern auch von der besonders charakteristischen Eigenschaft der »Aequidistanz» hat sie etwas beibehalten. Bei einer streng aequidistanten Punktmenge geht diese in sich über, wenn man sie so verschiebt, dass ein beliebiger Punkt auf einen beliebigen anderen Punkt der Menge fällt; bei unserer Verschiebungsmenge E_ε werden wir mit Hilfe der Ungleichungen

$$e(n')-e(n'')\leqq e(n'+n'')\leqq e(n')+e(n'')$$

beweisen, dass sie, wenigstens bei passend gewähltem ε, doch »annäherungsweise» diese Eigenschaft besitzt, nämlich, dass sie bei gewissen Verschiebungen »fast» in sich übergeht.

Überhaupt beruht unsere ganze Untersuchung über die Verteilung der Zahlen $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$ (mod. 2π), in welche der Beweis von Lemma II ausmündet, im Prinzip auf dieser hier angedeuteten »Ähnlichkeit» zwischen der Folge der ganzzahligen Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ und den Zahlen einer arithmetischen Progression. Auch das Lemma II selbst — welches behauptet, dass nur für die μ aus gewissen spärlich verteilten kleinen Intervallen der μ-Achse die Grössen $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$ so unregelmässig auf der Kreisperipherie gelegen

[1] Diese Eigenschaft der Verschiebungsmenge hätte uns für den Übergang von Hilfssatz 4 zu Lemma I genügt, wenn es dafür ausreichend gewesen wäre (vgl. die Bemerkung von S. 83) statt unseres Lemma II einen etwas weniger aussagenden Satz zu besitzen, in welchem ein μ schon dann als »unschädlich» angesehen wird, wenn nur eines der N Produkte $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$, statt eines festen Prozentsatzes, mod. 2π nicht zu nahe an 0 kommt. Der Beweis eines solchen »vereinfachten» Lemma II wäre nämlich so zu führen: Zunächst wäre aus Stetigkeitsgründen sofort ersichtlich, dass, falls für ein bestimmtes μ das Produkt mit einem der τ, etwa τ_m, numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) ist, dasselbe, und zwar mit demselben τ_m, für eine gewisse Umgebung dieser Zahl μ gelten muss. Ferner ist auch klar, dass die Menge derjenigen μ, welche die Eigenschaft haben, dass die sämtlichen Produkte $\mu\tau_n$ numerisch $\leqq \frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind, keine Häufungspunkte haben kann — und dass somit im Intervalle $(-\Omega, \Omega)$ nur endlich viele solche μ, etwa $\mu = P_1, P_2, \ldots, P_M$, liegen können — denn, falls die unendlich vielen Zahlen $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots$ alle in das Intervall $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ fallen und h eine Grösse von hinreichend kleinem Betrage ist, müssen notwendig, wegen $\tau_{n+1}-\tau_n < c$, gewisse Zahlen der neuen Folge $(\mu+h)\tau_1, (\mu+h)\tau_2, \ldots$ aus diesem Intervall herauswandern. Aus diesen beiden Tatsachen erschliesst man nun leicht, dass sich, bei hinreichend grossem N, die »unangenehmen» μ nur in beliebig vorgeschriebenen Umgebungen der obigen Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_M$ befinden können.

Der Leser wird sehen, dass der Beweis des »wirklichen» Lemma II, nach Gewinnung von Hilfssatz 9, welcher auch eine Art von »Aequidistanz» der Verschiebungszahlen nachweist, wesentlich nach diesem Schema verläuft.

sind, dass ein unverhältnismässig grosser Bruchteil dieser Zahlen in eine feste Umgebung des Nullpunktes fallen — kann als eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes aus der Theorie der Verteilung der Zahlen $\mu, 2\mu, 3\mu, \ldots$ (mod. 2π) betrachtet werden, welcher besagt, dass, wenn nur μ von der Umgebung gewisser Punkte, nämlich der Punkte $2\pi r$ wo r eine rationale Zahl mit einem »kleinen« Nenner bedeutet, ausgeschlossen wird, bei jedem »grossen« N gilt, dass die N Zahlen $\mu, 2\mu, \ldots, N\mu$ sich »sehr« regelmässig auf der Kreisperipherie verteilen, d. h. so, dass die Anzahl derjenigen von ihnen, die in ein bestimmtes Intervall der Kreisperipherie fallen, einen Prozentsatz ausmacht, welcher annäherungsweise gleich der relativen Länge dieses Intervalles ist.

Wir gehen nun zur genaueren Formulierung der in der obigen Bemerkung angedeuteten Aequidistanzeigenschaft der Verschiebungsmenge E_ε über; um aber den diesbezüglichen Hilfssatz bequem aussprechen zu können, führen wir die folgende Definition ein:

Definition. *Die Verschiebungsmenge E_ε unserer Funktion $f(x)$ soll »fast periodisch bis auf $\frac{1}{Q}$« heissen (wo Q eine positive ganze Zahl ist), wenn es eine positive Grösse $\varrho<\varepsilon$ und eine Länge I_0 derart gibt, dass, falls t eine beliebige Zahl der Menge E_ϱ ist (und also gewiss auch eine Zahl der Menge E_ε), und wir alle Zahlen τ der Menge E_ε, welche in einem Intervalle $(0, I)$ mit $I>I_0$ gelegen sind, um t verschieben (d. h. die Zahlen $\tau+t$ bilden), mehr als $\left(1-\frac{1}{Q}\right)$ von den so verschobenen Zahlen wieder unserer Menge E_ε angehören.*

Es lautet dann der

Hilfssatz 9. *Es sei die positive Grösse ε_0 und die positive ganze Zahl Q beliebig gegeben. Dann lässt sich eine positive Grösse $\varepsilon\leqq\varepsilon_0$ so bestimmen, dass die Verschiebungsmenge E^ε fast periodisch bis auf $\frac{1}{Q}$ ist.* Mit andern Worten: obwohl die Summe zweier, zu ε gehörigen, Verschiebungszahlen nicht wieder zu ε sondern nur zu 2ε gehören muss, so kann man doch in der Verschiebungsmenge E_ε so »feine« (zu $\varrho<\varepsilon$ gehörige) Verschiebungszahlen auffinden, dass, wenn man nur um diese verschiebt, doch die »Gesamtheit« der Verschiebungszahlen »fast ganz« in sich übergeht, d. h. nur einen Verlust von $\frac{1}{Q}$ ihrer Anzahl erleidet.

Beweis. Die Idee des Beweises ist, ein ε so zu suchen (übrigens $>\frac{\varepsilon_0}{2}$, damit die sämtlichen Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ nicht zu dünn gesät liegen, nämlich, gemäss Hilfssatz 7, in jedem Intervall der festen Länge $L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ mindestens eine), dass bei jedem hinreichend grossen I nur ein sehr geringer Prozentsatz derjenigen τ der Menge E_ε, welche dem Intervalle $(0, I)$ angehören, einen Minimalfehler $e(\tau)$ besitzen, welcher sehr nahe an ε heranreicht; denn für alle übrigen τ, für welche also $e(\tau)$ nicht sehr nahe an ε kommt, etwa $<\varepsilon-\varrho$ ist, wird ja, falls t eine beliebig gewählte Zahl der Menge E_ϱ bezeichnet, der Minimalfehler $e(\tau+t) \leqq e(\tau)+e(t) \leqq e(\tau)+\varrho$ kleiner als ε ausfallen, d. h. es wird die verschobene Zahl $\tau+t$ wieder der Menge E_ε angehören.

Wir haben im ganzen drei Zahlen ε, $\varrho<\varepsilon$ und I_0 zu bestimmen. Die Zahl ϱ schreiben wir in der Form

$$\varrho=\frac{\varepsilon_0}{2N},$$

wo N eine ganze Zahl >8 ist, über die wir später als Funktion von Q und ε_0 verfügen werden, und teilen das Intervall $\frac{\varepsilon_0}{2}<z \leqq \varepsilon_0$ in N gleichgrosse Teile der Länge ϱ (siehe Fig. 10). Zur Abkürzung werden wir von einer Zahl n mit $\frac{\varepsilon_0}{2}<e(n) \leqq \varepsilon_0$ sagen, dass sie in »die r^{te} Schublade» fällt (wo r eine der Zahlen $1, 2, \ldots, N$ ist), falls ihr Minimalfehler $e(n)$ dem r^{ten} Teilintervall

$$\frac{\varepsilon_0}{2}+(r-1)\varrho<z \leqq \frac{\varepsilon_0}{2}+r\varrho$$

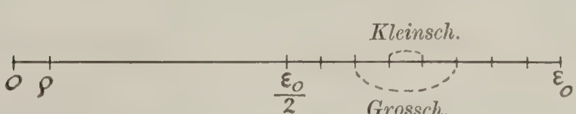


Fig. 10.

angehört. Wir werden bald im Beweise — wo es sich darum handelt, in ähnlichem Sinne wie beim Beweise des Mittelwertsatzes, die Untersuchung auf ein festes Intervall $0<x<I_0$ zurückzuführen — eine ganze Zahl τ, von der nur bekannt ist, dass sie in einer gewissen, sagen wir der r_0^{ten}, Schublade liegt (wo r_0 eine der Zahlen $2, \ldots, N-1$ bedeutet) um eine ganze Zahl t verschieben müssen, von der wir nur wissen, dass sie der Verschiebungsmenge E_ϱ angehört. Über die

verschobene Zahl $\tau+t$ können wir dann offenbar nur so viel mit Sicherheit aussagen, dass ihr Minimalfehler $e(\tau+t)$ den Ungleichungen

$$\frac{\varepsilon_0}{2}+(r_0-2)\varrho < e(\tau)-e(t) \leqq e(\tau+t) \leqq e(\tau)+e(t) \leqq \frac{\varepsilon_0}{2}+(r_0+1)\varrho$$

genügt, dass also $\tau+t$ in der r_0^{ten}, $(r_0-1)^{\text{ten}}$ oder $(r_0+1)^{\text{ten}}$ Schublade liegt, weshalb es bequem sein wird, ausser von den N obigen Schubladen, den »Kleinschubladen», auch von $N-2$ »Grosschubladen», mit den Nummern 2, 3, ..., $N-1$, zu sprechen, indem wir von einer Zahl n sagen, dass sie in die r^{te} Grosschublade fällt, falls ihr Minimalfehler $e(n)$ dem Intervall

$$\frac{\varepsilon_0}{2}+(r-2)\,\varrho < z \leqq \frac{\varepsilon_0}{2}+(r+1)\,\varrho$$

angehört (siehe Fig. 10).

Es sei nun $I_0 > 2\,L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ eine feste Länge über die wir ebenfalls später, und zwar als Funktion von Q, ε_0 und ϱ, verfügen werden. Bei jeder ganzen Zahl n im Intervalle $0 < x < I_0$, welche der Menge E_{ε_0} aber nicht der Menge $E_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ angehört, d. h. für welche $\frac{\varepsilon_0}{2} < e(n) \leqq \varepsilon_0$ ist, sehen wir nunmehr nach, in welcher der $N-2$ Grosschubladen sie liegt, und greifen diejenige Grosschublade, oder eine derjenigen von ihnen, heraus, welche die kleinste Anzahl solcher Zahlen n enthält. Es sei R ihr Nummer. Weil es offenbar zumindest $\frac{N-2}{3}\left(>\frac{N}{4}\right)$ Grosschubladen gibt, welche nicht übereinander greifen, wird unsere R^{te} Grosschublade gewiss weniger als $I_0 : \frac{N}{4} = \frac{4\,I_0}{N}$ von den erwähnten Zahlen n im Intervalle $(0, I_0)$ enthalten. Die Zahl ε des Satzes soll dann die Zahl

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} + R\,\varrho$$

sein, d. h. die grösste Zahl der R^{ten} Kleinschublade.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Beweis unschwer zu Ende führen. Es sei also I eine beliebige Zahl $> I_0$, und t eine beliebige Zahl der Menge E_ϱ; wir betrachten das Intervall $0 < x < I$ und werden die Anzahl A derjenigen, im Intervalle $(0, I)$ gelegenen, Zahlen τ der Menge E_ε abschätzen, welche bei einer Verschiebung um t nicht wieder in Zahlen der Menge

E_ε übergehen. Diese Zahlen τ sind offenbar unter denjenigen Zahlen der Menge E_ε zu suchen, die der R^{ten} Kleinschublade angehören; denn für jede Zahl τ der Menge E_ε, welche nicht in dieser »äussersten» Kleinschublade liegt, d. h. für welche $e(\tau) \leqq \frac{\varepsilon_0}{2} + (R-1)\varrho$ ist, wird ja $e(\tau+t) \leqq e(\tau)+\varrho \leqq \varepsilon$ sein, d. h. es wird $\tau+t$ wieder der Menge E_ε angehören. Wir teilen nun das Intervall $(0, I)$ in der in der Fig. 11 angedeuteten Weise, d. h. wir tragen zunächst die Länge I_0 vom

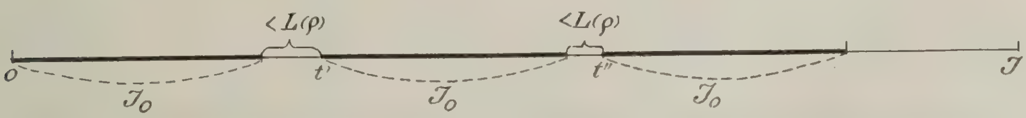


Fig. 11.

Punkte 0 ab, bestimmen danach (nach dem Hilfssatze 7) eine Zahl t' der Menge E_ϱ in einem Abstand $< L(\varrho)$ von dem Endpunkte $x=I_0$, danach tragen wir wieder, vom Punkte t' aus, die Länge I_0 bis zum Punkte $t'+I_0$ ab, bestimmen eine zu E_ϱ gehörige Zahl t'' in einem Abstand vom Endpunkte, welche kleiner als $L(\varrho)$ ist, usw. Wir betrachten zunächst ein beliebiges der Intervalle der Länge I_0, etwa das Intervall $(t^{(p)}, t^{(p)}+I_0)$. Falls τ eine darin gelegene ganze Zahl ist, welche der R^{ten} Kleinschublade angehört, muss — nach einer obigen Bemerkung — der »entsprechende» (d. h. um $-t^{(p)}$ verschobene) Punkt $\tau-t^{(p)}$ des Intervalles $(0, I_0)$ gewiss der R^{ten} Grosschublade angehören. Nun liegen aber im Intervalle $(0, I_0)$ weniger als $\frac{4 I_0}{N}$ Punkte der R^{ten} Grosschublade, und die Anzahl der Punkte τ unseres Intervalles $(t^{(p)}, t^{(p)}+I_0)$, welche der R^{ten} Kleinschublade angehören, wird daher a fortiori kleiner als $\frac{4 I_0}{N}$ sein. Da ferner die Anzahl P der betrachteten Intervalle der Form $(t^{(p)}, t^{(p)}+I_0)$ kleiner als $\frac{I}{I_0}$ ist, finden wir für die Anzahl A_1 der in diesen P Intervallen gelegenen τ der Menge E_ε, welche bei der Verschiebung um t nicht wieder in Punkte der Menge E_ε übergehen, die Ungleichung

$$A_1 < \frac{I}{I_0} \cdot \frac{4 I_0}{N} = \frac{4 I}{N}.$$

Was ferner die Anzahl A_2 derjenigen solcher τ betrifft, welche in den »Restintervallen» liegen, finden wir durch eine grobe Abschätzung — indem wir für die »Zwichenintervalle» mit Längen $< L(\varrho)$ einfach die Anzahl aller darin ge-

legenen ganzen Zahlen abschätzen, und für das eventuelle »Schlussintervall» die obige Abschätzung $\frac{4\,I_0}{N}$ benutzen — dass

$$A_2 < P\,L(\varrho) + \frac{4\,I_0}{N} < \frac{I}{I_0}\,L(\varrho) + \frac{4\,I}{N}\cdot$$

Die gesuchte Gesamtanzahl $A = A_1 + A_2$ genügt somit der Ungleichung

$$A < \frac{8\,I}{N} + \frac{I}{I_0}\,L(\varrho) = I\left(\frac{8}{N} + \frac{L(\varrho)}{I_0}\right) \tag{22}$$

Andererseits ist die Anzahl B sämtlicher Zahlen τ der Menge E_ε, welche dem Intervalle $(0, I)$ angehören, offenbar $\left(\text{wegen } \varepsilon > \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ grösser als $\frac{I}{L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)} - 1$, da ja in jedem Intervall der Länge $L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ mindestens eine solche Zahl τ liegt; wegen $I > I_0 > 2\,L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ ist also

$$B > \frac{I - L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}{L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)} > \frac{I}{2\,L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}\cdot \tag{23}$$

Wir erhalten somit, aus (22) und (23), die Ungleichung

$$\frac{A}{B} < \frac{I\left(\frac{8}{N} + \frac{L(\varrho)}{I_0}\right)}{\frac{I}{2\,L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}} = 2\,L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\left(\frac{8}{N} + \frac{L(\varrho)}{I_0}\right) = \frac{16\,L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}{N} + \frac{2\,L\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)L(\varrho)}{I_0}\cdot$$

Durch Wahl von N, also auch von $\varrho = \frac{\varepsilon_0}{2\,N}$, und danach von I_0 können wir offenbar jeden der beiden Summanden $< \frac{1}{2\,Q}$ machen, so dass die gewünschte Ungleichung

$$\frac{A}{B} < \frac{1}{Q}$$

gilt, womit der Satz bewiesen ist. Wir werden ihn im Folgenden übrigens nur mit $Q = 4$ verwenden.

Da uns nun dieser Satz über die »Fastperiodizität» der Verschiebungsmenge E_ε zur Verfügung steht, können wir unserem Ziele, dem Beweis von Lemma II, direkt zusteuern. Da dieses Lemma, falls es für ein gewisses ε bewiesen ist, a fortiori für jedes grössere ε gilt, dürfen wir offenbar beim Beweise annehmen, dass die gegebene Zahl ε aus dem Lemma die Bedingung des Hilfssatzes 9 (mit $Q=4$) erfüllt, d. h. dass die Verschiebungsmenge E_ε fast periodisch bis auf $\frac{1}{4}$ ist. Ferner werden wir, nachdem von hier ab für alles folgende ε festgelegt ist, unter $\varrho\,(<\varepsilon)$ und I_0 Zahlen ϱ und I_0 im Sinne dieses Hilfssatzes, d. h. im Sinne der Fastperiodizität von E_ε, verstehen, und mit $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ die der Menge E_ε angehörigen positiven (ganzen) Zahlen bezeichnen, wachsend geordnet.

In Lemma II dreht es sich darum, die Gesamtheit aller reellen μ mit Hilfe einer passend gewählten festen Anzahl N von Verschiebungszahlen $\tau_1, \ldots, \tau_N$ zu »sieben». Wir stellen zunächst die Frage etwas anders, indem wir eine beliebige feste Zahl μ und die Gesamtheit aller τ_n betrachten und fragen, wie dieses μ beschaffen sein muss, damit für jedes hinreichend grosse N, d. h. für $N > N_0 = N_0(\mu)$, mehr als ein Viertel der N Produkte

$$\mu\tau_1,\ \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$$

numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind.

Um unsere Antwort (die eine einfache hinreichende Bedingung liefert) bequem formulieren zu können, sei die folgende Ausdrucksweise eingeführt: Falls eine Zahl x mod. 2π numerisch $\leq \frac{\pi}{6}$ ist, werden wir sagen, dass sie in der »o-Schublade» gelegen ist (siehe Fig. 12); falls x dagegen mod. 2π numerisch

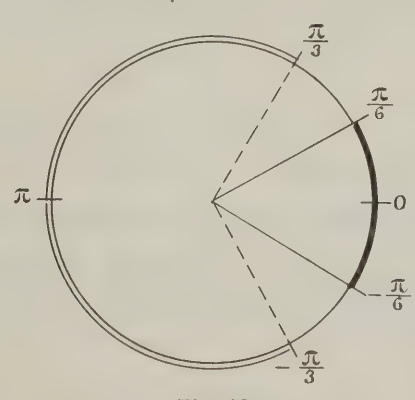


Fig. 12.

$> \frac{\pi}{6}$ ist, soll sie der »grossen π-Schublade» angehörig heissen, bzw. der »kleinen π-Schublade», falls x mod. 2π numerisch $> \frac{\pi}{3}$ ist. Es ist klar, *dass eine Summe* $x_1 + x_2$ *in die grosse* π*-Schublade fällt, wenn* x_1 *in der* o*-Schublade,* x_2 *in der kleinen* π*-Schublade liegt.* Wir geben nunmehr die folgende Antwort auf die oben gestellte Frage:

Hilfssatz 10. *Dafür, dass die reelle Zahl* μ *so beschaffen ist, dass für jedes* $N > N_0 = N_0(\mu)$ *mehr als ein Viertel der* N *Produkte* $\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$ *numerisch grösser als* $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) *sind (d. h. in die grosse* π*-Schublade fallen), ist hinreichend, dass* μ *die folgende Eigenschaft besitzt:*

»**Eigenschaft** $\boldsymbol{\pi}$.» *Es soll in der Verschiebungsmenge* E_ϱ *(wo* ϱ *die obige Zahl* $< \varepsilon$ *ist) eine positive Zahl* t *derart existieren, dass das Produkt* μt *in der kleinen* π*-Schublade liegt.*

Mit anderen Worten: falls es nur eine »feine» Verschiebungszahl t gibt, für die das Produkt μt in die kleine π-Schublade fällt, so wird es sehr viele von den »groben» Verschiebungszahlen τ geben, für welche $\mu\tau$ in die grosse π-Schublade fällt.

Beweis. Der Beweis basiert darauf, dass die Verschiebung um t einerseits die Menge der τ fast ganz in sich überführt, während sie andererseits ein Produkt $\mu\tau$ aus der o-Schublade in ein Produkt $\mu(\tau + t)$ der (komplementären) grossen π-Schublade verwandelt.

Es sei also μ eine Zahl mit der Eigenschaft π, und t eine positive Zahl in E_ϱ, für welche μt in der kleinen π-Schublade liegt. Wir wählen N_0 derart, dass

$$N_0 > 4t \quad \text{und} \quad N_0 > I_0$$

ist, wo I_0 die obige (von μ unabhängige) Zahl bedeutet, und behaupten, dass dieses N_0 unsere Forderung erfüllt. Es sei also $N > N_0$, und es bezeichne A die Anzahl derjenigen der N Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$, deren Produkte mit dem Faktor μ in die grosse π-Schublade fallen, dagegen $B = N - A$ die Anzahl der übrigen dieser N Zahlen, deren Produkte mit μ also in die o-Schublade fallen. Wir haben zu beweisen, dass

$$A > \frac{1}{4} N$$

ist. Es bezeichne hierzu B_1 die Anzahl derjenigen unter den obigen B Zahlen, welche im Intervalle $0 < x \leqq \tau_N - t$ liegen (wo $\tau_N - t$ wegen $\tau_N \geqq N$ positiv ist); dann ist $B_1 \geqq B - t$, weil ja das Intervall $\tau_N - t < x \leqq \tau_N$ überhaupt nur t ganze Zahlen enthält; also ist (wegen $N > N_0 > 4t$)

$$B_1 \geqq B - t > B - \frac{N}{4}\cdot$$

Es sei nun τ irgend eine dieser B_1 Zahlen; wir verschieben sie um t, d. h. wir bilden die Zahl $\tau + t$. Diese Zahl $\tau + t$ wird dann im Intervalle $0 < x \leqq \tau_N$ liegen, und ihr Produkt mit μ wird in die grosse π- Schublade fallen (weil ja $\mu\tau$ in der 0-Schublade und μt in der kleinen π-Schublade liegt), woraus folgt, dass $\tau + t$ gewiss eine der obigen A Zahlen sein wird, falls sie überhaupt zur Menge E_ε gehört. Nun wissen wir aber nach dem Hilfssatze 9, wegen $\tau_N \geqq N > N_0 > I_0$, dass von den sämtlichen N Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ (und also um so mehr von den B_1 Zahlen) weniger als $\frac{1}{4}N$ bei der Verschiebung um t nicht wieder in Zahlen der Menge E_ε übergehen, und erhalten somit

$$A > B_1 - \frac{N}{4} > B - \frac{N}{2}\cdot$$

Hiermit ist aber der Satz bewiesen; denn aus $A > B - \frac{N}{2}$ und $A + B = N$ folgt ja, dass $A > \frac{N}{4}$ ist.

Wir werden nunmehr untersuchen, wie sich die Zahlen, welche die Eigenschaft π besitzen, auf die μ-Achse verteilen. Hierzu beweisen wir zunächst den folgenden Satz, der besagt, dass die Menge dieser Zahlen eine offene Punktmenge ist, und überdies eine wichtige Gleichmässigkeitseigenschaft behauptet:

Hilfssatz 11: *Falls die Zahl μ_0 die Eigenschaft π besitzt, können wir ein so kleines Intervall i_0 um μ_0 legen, dass*

1) *jede Zahl μ in diesem Intervalle i_0 ebenfalls die Eigenschaft π besitzt und somit für jedes hinreichend grosse N mehr als ein Viertel der N Produkte $\mu\tau_1, \ldots, \mu\tau_N$ numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$* mod. 2π *sind, und dass*

2) *in der letzten Aussage die Worte »für jedes hinreichend grosse N« gleichmässig in μ gelten, d. h. dass ein von μ unabhängiges $N_0 = N_0(i_0)$ derart existiert, dass es für jedes μ im Intervalle i_0 genügt, $N > N_0$ zu wählen.*

Beweis: Dass μ_0 die Eigenschaft π besitzt, bedeutet, dass wir in E_ϱ ein positives t, etwa $t = t_0$, so finden können, dass $\mu_0 t_0$ in der kleinen π-Schublade liegt. Nachdem t_0 festgelegt ist, wählen wir das Intervall i_0 so klein, dass für jedes μ in diesem Intervalle das Produkt μt_0, ebenso wie $\mu_0 t_0$, in der kleinen π-Schublade liegt, was offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, weil die kleine π-Schublade ein offenes Intervall ist. Dieses Intervall i_0 wird alsdann den Bedingungen des Satzes genügen; denn 1) besitzt jede Zahl μ in i_0 die Eigenschaft π, da ja ihr Produkt mit einer passend gewählten positiven Zahl t der Menge E_ϱ, nämlich mit der Zahl $t = t_0$, in die kleine π-Schublade fällt, und 2) gibt es ein von μ unabhängiges N_0 derart, dass für jedes μ in i_0 und jedes $N > N_0$ mehr als ein Viertel der N Zahlen $\mu\tau_1, \ldots, \mu\tau_N$ numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) ist; in der Tat wurde die Zahl N_0 im Beweise des obigen Hilfssatzes 10, ausser der von μ unabhängigen Bedingung $N_0 > I_0$, nur der einzigen Bedingung $N_0 > 4t$ unterworfen, und wir haben ja hier für alle μ in i_0 dasselbe t, nämlich $t = t_0$, verwenden können.

Wir betrachten danach die »unangenehmen« μ, d. h. die Zahlen μ, welche nicht die Eigenschaft π besitzen.[1] Wir beweisen den folgenden Satz, womit wir uns dem Lemma II sehr nähern:

Hilfssatz 12. *Die Menge der Zahlen μ, welche nicht die Eigenschaft π besitzen, hat keine Häufungspunkte, und es liegt somit in jedem endlichen Intervall nur eine endliche Anzahl von solchen Punkten.*

Beweis. Es sei μ_1 eine ganz beliebige reelle Zahl; wir sollen zeigen, dass sie nicht Häufungspunkt von Zahlen μ ist, welche nicht die Eigenschaft π besitzen, d. h. dass wir um den Punkt μ_1 ein kleines Intervall $(\mu_1 - h_1, \mu_1 + h_1)$ derart

[1] Es sei bemerkt, dass diese Menge gewiss alle Multipla von 2π enthält und also nicht leer ist; in der Tat wird, falls $\mu = 2\pi n$ ist, für jede Zahl t der Menge E_ϱ gelten — da t ja ganzzahlig ist — dass das Produkt μt kongruent 0 mod. 2π ist, so dass also keine Zahl t in E_ϱ existiert, für welche μt in die kleine π-Schublade fällt. Dass die Multipla von 2π diese besondere Rolle spielen, liegt übrigens nur daran, dass wir, aus Bequemlichkeitsgründen, eben mit den ganzzahligen Verschiebungszahlen operiert haben.

legen können, dass sämtliche Zahlen $\mu + \mu_1$ innerhalb dieses Intervalles die Eigenschaft π besitzen. Falls μ_1 selbst die Eigenschaft π besitzt, haben wir dies schon in dem Hilfssatze 11 bewiesen; wir dürfen daher (was übrigens keine Hilfe beim Beweise ist) annehmen, dass μ_1 selbst nicht die Eigenschaft π besitzt, also dass es keine positive Zahl t in E_ϱ gibt, für welche $\mu_1 t$ in der kleinen π-Schublade liegt. Dagegen gibt es gewiss Zahlen t in E_ϱ, für die $\mu_1 t$ in die o-Schublade fällt, und zwar »ziemlich viele»; wir werden nämlich zeigen, dass es eine Länge $L' = L'(\mu_1)$ derart gibt, dass jedes Intervall dieser Länge L' mindestens ein solches t der Menge E_ϱ enthält. In der Tat:

1) Falls $\mu_1 = 0$ ist, ist dies sofort klar, weil hier für alle t in E_ϱ das Produkt $\mu_1 t$ gleich 0 ist und also in die o-Schublade fällt, so dass wir daher als L' einfach eine Länge $L(\varrho)$ im Sinne des Hilfssatzes 7 verwenden können, d. h. eine Länge L mit der Eigenschaft, dass jedes Intervall dieser Länge mindestens eine Zahl der Menge E_ϱ enthält.

2) Falls $\mu_1 \neq 0$, lautet die Behauptung: Es gibt eine Länge L' derart, dass jedes Intervall dieser Länge eine Zahl t der Menge E_ϱ (also eine zu ϱ gehörige ganzzahlige Verschiebungszahl t) enthält, für welche das Produkt $\mu_1 t$ von einem ganzen Multiplum von 2π um weniger als $\frac{\pi}{6}$ abweicht, d. h. deren Abstand von einem ganzen Multiplum von $\nu = \frac{2\pi}{\mu_1}$ kleiner als $\frac{\pi}{6|\mu_1|} = \eta$ ist. Die Existenz einer solchen Länge L' haben wir aber, eben mit Hinblick auf diesen Beweis, in dem Hilfssatze 8 nachgewiesen.

Nachdem die Existenz dieser Länge L' festgestellt ist, können wir nun leicht den Beweis des Hilfssatzes 12 zu Ende führen. In der Tat können wir zeigen, dass die Zahl

$$h_1 = \frac{\pi}{2L'}$$

von der erwünschten Art ist, dass also jede Zahl $\mu = \mu_1 + h$ mit $0 < |h| < h_1$ die Eigenschaft π besitzt, d. h. dass es zu jeder solchen Zahl $\mu = \mu_1 + h$ eine positive Zahl t in E_ϱ gibt, für welche das Produkt μt in der kleinen π-Schublade liegt. Zu diesem Zwecke markieren wir in jedem der Intervalle $(0, L')$, $(L', 2L'), \ldots, ((n-1)L', nL'), \ldots,$ eine Zahl t der Menge E_ϱ mit der vorher erwähnten Eigenschaft, d. h. eine solche Zahl t, für welche das Produkt $\mu_1 t$ in die o-Schublade fällt, und bezeichnen diese t mit

$$t', t'', \ldots, t^{(n)}, \ldots;$$

ich behaupte, dass es unter diesen Zahlen eine gibt, deren Multiplum mit $\mu = \mu_1 + h$ in der kleinen π-Schublade liegt. Hierzu brauchen wir nur zu bedenken, dass wegen der Ungleichung

$$1 \leqq t^{(n+1)} - t^{(n)} < 2L'$$

die Folge $ht', ht'', \ldots, ht^{(n)}, \ldots$ monoton ist und der Ungleichung

$$0 < |h| \leqq |t^{(n+1)}h - t^{(n)}h| < 2L'|h| < \pi$$

genügt; denn hieraus folgt sofort die Existenz eines $t^{(n)}$, für welches $ht^{(n)}$ (mod. 2π) im Intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ liegt, und für dieses $t^{(n)}$ wird ja $(\mu_1 + h)t^{(n)} = \mu_1 t^{(n)} + ht^{(n)}$ in die kleine π-Schublade $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ fallen, weil $\mu_1 t^{(n)}$ in der 0-Schublade $\left(\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ gelegen ist.

Nunmehr sind wir im Stande das Lemma II, und damit den Fundamentalsatz, zu beweisen.

Beweis von Lemma II. Es sei also ausser unserem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\Omega > 0$ beliebig gegen. Wir markieren diejenigen Zahlen μ des abgeschlossenen Intervalles $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$, welche nicht die Eigenschaft π besitzen. Von solchen Zahlen μ gibt es, nach dem Hilfssatze 12, höchstens eine endliche Anzahl; wir bezeichnen sie mit $P_1, P_2, \ldots, P_M$ und behaupten, dass diese Zahlen P_m die Forderung des Lemma erfüllen. In der Tat werden wir zeigen, dass sich, falls ω beliebig klein gewählt ist, die Zahl $N = N(\omega)$ so gross bestimmen lässt, dass, wenn wir die N ersten positiven ganzzahligen Verschiebungszahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ der Menge E_ε betrachten, für jedes μ, welches innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega, P_m + \omega)$ liegt, mehr als ein Viertel der N Produkte

$$\mu\tau_1, \mu\tau_2, \ldots, \mu\tau_N$$

numerisch grösser als $\frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir, nach dem Hilfssatze 11, zu jeder Zahl μ im abgeschlossenen Intervalle $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$, welche nicht eine der obigen M Zahlen P_m ist, d. h. welche die Eigenschaft π besitzt, ein kleines Intervall $i(\mu)$ um den Punkt μ herum und eine zugehörige ganze Zahl N_0 derart,

dass für jedes $N > N_0$ mehr als ein Viertel der Produkte der N Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ mit einer beliebigen Zahl des Intervalles $i(\mu)$ numerisch $> \frac{\pi}{6}$ (mod. 2π) sind. Dann »gehört» zu jedem Punkte μ des abgeschlossenen Intervalles $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$ ein gewisses Intervall um den Punkt herum, nämlich, falls μ eine der M Zahlen P_m ist, das Intervall $(P_m - \omega,\ P_m + \omega)$, und falls $\mu \neq P_1, P_2, \ldots, P_M$ ist, das Intervall $i(\mu)$. Folglich gibt es nach dem HEINE-BOREL'schen Überdeckungssatz unter diesen Intervallen eine endliche Anzahl, welche schon für sich das ganze Intervall $-\Omega \leqq \mu \leqq \Omega$ überdecken. Von diesen letzten Intervallen lassen wir nun die (etwaigen) Intervalle $(P_m - \omega,\ P_m + \omega)$ weg; dann bleibt eine endliche Anzahl von Intervallen der Art $i(\mu)$ zurück, etwa

$$i(\mu_1),\ i(\mu_2), \ldots, i(\mu_R),$$

welche gewiss alle Punkte μ, welche innerhalb des Intervalles $(-\Omega, \Omega)$ aber ausserhalb der M Intervalle $(P_m - \omega,\ P_m + \omega)$ liegen, überdecken. Zu jedem dieser R Intervalle gehört aber ein Zahl N_0, etwa $N_0', N_0'', \ldots, N_0^{(R)}$, und es ist klar, dass eine Zahl N, welche grösser als diese R Zahlen ist, unserer Forderung genügt.

KAPITEL III.

Fourierreihen mit linear unabhängiger Exponentenfolge.

Es sei $f(x)$ eine fast periodische Funktion, deren Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ unendlich viele Glieder enthält. Das Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Satzes:

Konvergenzsatz. *Falls die Fourierexponenten Λ_n der Funktion $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ linear unabhängig sind, d. h. falls bei keinem N eine Relation der Form*

$$C_1 \Lambda_1 + C_2 \Lambda_2 + \cdots + C_N \Lambda_N = 0$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $C_1, C_2, \ldots, C_N$ besteht, wird nicht nur die Reihe $\Sigma |A_n|^2$, sondern auch die Reihe $\Sigma |A_n|$ selbst konvergieren.

Hieraus folgt sofort das

Corollar. *Für jede fast periodische Funktion $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ mit linear unabhängiger Exponentenfolge ist die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ im gewöhnlichen Sinne konvergent, und zwar gleichmässig für $-\infty < x < \infty$, mit der Summe $f(x)$.*

Denn die gleichmässige Konvergenz der Fourierreihe für $-\infty < x < \infty$ folgt sofort aus der Konvergenz der Majorantenreihe $\Sigma |A_n|$, und aus der gleichmässigen Konvergenz von $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ folgt weiter (nach dem Corollar des Eindeutigkeitssatzes), dass die Summe der Reihe mit der gegebenen Funktion $f(x)$ übereinstimmt.

Der Beweis verläuft so, dass man aus der mittleren Konvergenz der Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$, also aus der Limesgleichung

$$\lim_{N\to\infty} M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} = 0 \tag{24}$$

auf die gewöhnliche Konvergenz, ja sogar auf absolute Konvergenz, schliesst. Der Grund für die Möglichkeit eines solchen Schlusses besteht darin, dass aus der Divergenz von $\sum |A_n|$ folgen würde, dass bei grossem N der Abschnitt $\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}$ nicht nur in gewissen Punkten der x-Achse numerisch sehr gross sein würde, sondern dass diese Punkte sogar Intervalle ausfüllen würden, deren relative Länge (im Vergleich zur ganzen x-Achse) für $N \to \infty$ nicht unendlich klein wäre; dies ist aber mit der Limesgleichung (24) nicht verträglich.[1]

Wir teilen den Beweis in drei Paragraphen ein.

§ 10.

Hilfssätze aus der Theorie der diophantischen Approximationen.

Neben dem Fundamentalsatz aus Kapitel II ist das wesentlichste Hilfsmittel beim Beweise des Konvergenzsatzes der berühmte Approximationssatz:

---

[1] Dieses Benehmen im Spezialfalle der linearen Unabhängigkeit der Exponenten steht in interessantem Gegensatz zu dem Verhalten in dem entgegengesetzten Sonderfalle, wo die Exponenten eine einfache arithmetische Progression bilden und also besonders stark linear verknüpft sind. In der Tat kann man hier nicht, wie aus der Theorie der gewöhnlichen Fourierreihen bekannt ist, aus der Divergenz der Reihe $\sum |a_n|$ schliessen, dass die Abschnitte $\sum_{-N}^{N} a_n e^{inkx}$ beliebig grosse Werte annehmen; und selbst wenn dies eintritt, lässt sich daraus nicht folgern, dass die relative Länge der entsprechenden Intervalle der x-Achse für $N \to \infty$ ober einer festen positiven Schranke bleibt.

Kronecker'scher Satz. *Es seien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *linear unabhängige reelle Zahlen, und* $\mu_1, \ldots, \mu_N$ *beliebige reelle Zahlen. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein reelles* x *und dazu gehörige ganze Zahlen* $g_1, \ldots, g_N$, *so dass die* N *Ungleichungen*

$$|x\lambda_n - \mu_n - g_n| < \varepsilon \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

sämtlich erfüllt sind.

Geometrisch sagt dieser Satz aus, dass im Einheitswürfel $0 \leqq \eta_n < 1$ $(n=1, \ldots, N)$ des N-dimensionalen Raumes die Punkte Q_x, die aus den Punkten der Geraden

$$\eta_1 = x\lambda_1,\ \eta_2 = x\lambda_2, \ldots,\ \eta_N = x\lambda_N \qquad (-\infty < x < \infty)$$

durch Reduktion der Koordinaten modulo 1 entstehen, überall dicht liegen.

Um im folgenden eine den Rand des Einheitswürfels betreffende, im Wesen der Sache nicht liegende Schwierigkeit zu vermeiden, ziehen wir vor, mit WEYL, statt von dem gewöhnlichen N-dimensionalen euclidischen Raum E_N, lieber von dem »geschlossenen» N-dimensionalen euclidischen Raum G_N (der mit einem N-dimensionalen Torus homöomorph ist) zu sprechen, welcher aus E_N entsteht, wenn jedes System von unter einander modulo 1 kongruenten Punkten $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ als ein einziger »Punkt» aufgefasst wird, wenn also zwei Wertesysteme $(\eta_1', \ldots, \eta_N')$ und $(\eta_1'', \ldots, \eta_N'')$, für welche $\eta_n' \equiv \eta_n''$ (mod. 1) sind, identifiziert werden; dieser Raum G_N heisst »euclidisch», weil zu jedem Punkt desselben eine Umgebung gehört, wo die euclidische Geometrie gültig ist.

Wir brauchen den KRONECKER'schen Satz — dass die Punkte der obigen Geraden im geschlossenen Raum G_N überall dicht liegen — in einer von WEYL verschärften Form, wo er besagt, dass diese Punkte sogar überall gleich dicht liegen.[1] Für die spätere Anwendung wird es bequem sein, diesen verschärften Satz so zu formulieren, dass die betrachtete Gerade des N-dimensionalen Raumes nicht eben durch den Anfangspunkt $(0, 0, \ldots, 0)$, sondern durch einen beliebig gegebenen Punkt $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ des Raumes gezogen wird.

Kronecker-Weyl'scher Satz. *Es seien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *linear unabhängige, und* $\theta_1, \ldots, \theta_N$ *beliebige reelle Zahlen. Es sei ferner im geschlossenen Raum* G_N *ein parallel den Achsen orientiertes Parallelepiped* P *mit den Seitenlängen* $d_n < 1$ *und dem Raum-*

[1] H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. Bd. 77, (1916), S. 313—352.

inhalt $I = d_1 d_2 \cdots d_N$ *beliebig gegeben, und es bedeute* $\Omega = \Omega(P, T)$ *die Menge aller Werte* x *im Intervalle* $-T < x < T$, *für die der durch die Koordinaten* $(\theta_1 + x\lambda_1, \ldots, \theta_N + x\lambda_N)$ *bestimmte Punkt dem Parallelepiped* P *angehört. Dann besteht bei jedem* $T > 0$ *die Menge* Ω *aus den Punkten einer endlichen Anzahl von Intervallen, und es gilt, wenn* $L(T)$ *die Summe der Längen dieser Intervalle bezeichnet, die Limesgleichung*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{L(T)}{2T} = I.$$

Mit anderen Worten: es ist die relative Länge der Intervalle der x-Achse, für welche der Punkt Q_x: $(\theta_1 + x\lambda_1, \ldots, \theta_N + x\lambda_N)$ dem Parallelepiped P angehört, gleich dem Inhalte I des Parallelepipedes, d. h. gleich der apriorischen Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich gewählter Punkt $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ in das Parallelepiped hineinfällt.

Was den Beweis dieser Verschärfung des KRONECKER'schen Satzes anbelangt, sei bemerkt, dass die darin behauptete gleichmässig dichte Verteilung, wie vom Verfasser gezeigt[1], direkt aus dem Überalldichtliegen gefolgert werden kann. Es muss aber gleich hinzugefügt werden, dass sich bei vielen anderen Problemen über gleichmässige Verteilung die ursprüngliche WEYL'sche Beweismethode als die »einzig richtige» erwiesen hat.

§ 11.

Ein Hilfssatz über geometrische Wahrscheinlichkeit.

Bevor wir den vorhergehenden Satz über diophantische Approximationen auf unser Problem anwenden können, müssen wir zunächst den folgenden Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz. *Es sei* $\sum_1^\infty r_n$ *eine divergente Reihe mit positiven Gliedern und die Zahl* $K > 0$ *beliebig gegeben. Dann gibt es eine positive Zahl* w *und eine positive ganze Zahl* N_0 *mit den folgenden Eigenschaften: Bei jedem* $N > N_0$ *lässt sich im geschlossenen euclidischen Raume* G_N *eine endliche Anzahl* $\nu = \nu(N)$ *von*

[1] Vergl. H. BOHR und R. COURANT, Neue Anwendungen der Theorie der diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion, Crelles Journal, Bd. 144, (1914), S. 249—274.

nicht über einander greifenden, parallel den Achsen orientierten Parallelepipeden $p_1, \ldots, p_\nu$ *(mit Seitenlängen* < 1*) so finden, dass ihr Gesamtinhalt* $> w$ *ist, und für jeden Punkt* $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N)$ *eines dieser Parallelepipede die Ungleichung*

$$\left| \sum_1^N r_n e^{2\pi i \eta_n} \right| > K \tag{25}$$

besteht. Mit anderen Worten: es ist bei jedem $N > N_0$ die Wahrscheinlichkeit, dass der absolute Wert der Summe

$$S(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N) = \sum_1^N r_n e^{2\pi i \eta_n}$$

die Zahl K übersteigt, grösser als w.

Beweis. Es werde die ganze Zahl N_0 so gewählt, dass

$$\sum_{n=1}^{N_0} r_n > K + \delta$$

ist, wo δ eine beliebige positive Zahl, etwa 1, bedeutet, und es sei dann, was offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, im N_0-dimensionalen Raum G_{N_0} ein kleiner, parallel den Achsen orientierter Würfel q' um den Punkt $(0, \ldots, 0)$ so bestimmt, dass für jeden Punkt $(\eta_1, \ldots, \eta_{N_0})$ dieses Würfels die Ungleichung

$$\Re \left(\sum_{n=1}^{N_0} r_n e^{2\pi i \eta_n} \right) > K + \delta$$

besteht. Es bezeichne $i_0 (< 1)$ den Rauminhalt dieses Würfels q'; ich behaupte, dass die obige Zahl N_0 und die Zahl

$$w = \frac{i_0}{3}$$

den Forderungen des Satzes genügen.

Es sei also N eine feste ganze Zahl $> N_0$. Wir betrachten zunächst einen beliebigen Punkt $(\eta_1, \ldots, \eta_{N_0}, \eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ des Raumes G_N, für welchen die N_0 ersten Koordinaten $(\eta_1, \ldots, \eta_{N_0})$ einen Punkt des Raumes G_{N_0} bestimmen, welcher im obigen Würfel q' gelegen ist. Dann gilt die Ungleichung

$$\left|\sum_1^N r_n e^{2\pi i \eta_n}\right| \geqq \Re\left(\sum_1^N r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) = \Re\left(\sum_1^{N_0} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) + \Re\left(\sum_{N_0+1}^N r_n e^{2\pi i \eta_n}\right)$$

$$> K + \delta + \Re\left(\sum_{N_0+1}^N r_n e^{2\pi i \eta_n}\right),$$

woraus sofort hervorgeht, dass die gewünschte Ungleichung

$$\left|\sum_1^N r_n e^{2\pi i \eta_n}\right| > K \tag{25}$$

gewiss besteht, falls die $(N-N_0)$ letzten Koordinaten $(\eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ so gewählt werden, dass sie die Ungleichung

$$\Re\left(\sum_{N_0+1}^N r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) > -\delta \tag{26}$$

befriedigen.[1] Es ist daher unser Hilfssatz bewiesen, falls es gelingt die Existenz einer endlichen Anzahl $\nu = \nu(N)$ von nicht über einander greifenden, parallel den Achsen orientierten Würfeln $q_1'', \ldots, q_\nu''$ des $(N-N_0)$-dimensionalen Raumes G_{N-N_0} mit einem Gesamtinhalt $> \frac{1}{3}$ derart nachzuweisen, dass für jeden Punkt $(\eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ eines dieser Würfel die obige Ungleichung (26) besteht; denn die ν Parallelepipede $p_1, \ldots, p_\nu$ des N-dimensionalen Raumes G_N, welche dadurch bestimmt werden, dass jedes von ihnen bei Projektion auf den Raum G_{N_0} den Würfel q' ergibt, während ihre Projek-

---

[1] Es mag zur Erläuterung bemerkt sein, dass es bei der folgenden Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Rest $\sum\limits_{N_0+1}^N$ den Anfang $\sum\limits_1^{N_0}$ nicht herunterdrückt, also dass etwa $\Re\left(\sum\limits_{N_0+1}^N r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) > 0$ ist, durchaus wesentlich ist, dass man die ganze Vektorsumme $\sum\limits_{N_0+1}^N r_n e^{2\pi i \eta_n}$ zusammenhält und nicht etwa so grob verfährt sie in ihre einzelnen Glieder aufzulösen und zu verlangen, dass jedes Glied für sich einen positiven Realteil haben solle. Denn hierbei würde bei Vergrösserung von N um eine Einheit offenbar jedesmal ein neuer Faktor $\frac{1}{2}$ hinzukommen — entsprechend der Wahrscheinlichkeit, dass der neue Vektor gerade in die positive Halbebene zeigt — und man bekäme also nicht für $N \to \infty$ eine feste positive untere Schranke für die gesuchte Gesamtwahrscheinlichkeit.

tionen auf den komplementären Raum G_{N-N_0} je auf einen der ν Würfel $q_1'', \ldots, q_\nu''$ fallen, werden ja alsdann von der im Satze erwünschten Art sein, d. h. ihr Gesamtinhalt ist $> i_0 \cdot \frac{1}{3} = w$ und in jedem Punkt $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ eines dieser Parallelepipede gilt die Ungleichung (25).

Um die Existenz solcher Würfel $q_1'', \ldots, q_\nu''$ des $(N - N_0)$-dimensionalen Raumes G_{N-N_0} zu beweisen, betrachten wir zunächst die Menge E der sämtlichen Punkte $(\eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ des Raumes G_{N-N_0}, für welche die Ungleichung (26) besteht. Es ist diese Menge E offenbar (aus Stetigkeitsgründen) eine offene Menge, d. h. falls Q ein Punkt der Menge ist, wird eine gewisse Umgebung von Q ebenfalls der Menge angehören, und es ist daher die Menge E im Lebesgue'schen Sinne messbar, etwa mit dem Masse Γ. Um unsere Behauptung, dass die Menge E eine endliche Anzahl von nicht übereinander greifenden, parallel den Achsen orientierten Würfeln mit einem Gesamtinhalt $> \frac{1}{3}$ enthält, zu begründen, genügt es daher nachzuweisen, dass das Mass Γ der Menge E grösser als $\frac{1}{3}$ ist; denn aus jeder offenen Punktmenge mit einem Mass $> c$, lässt sich bekanntlich eine endliche Anzahl von Würfeln herausgreifen, deren Gesamtinhalt ebenfalls $> c$ ist.

Es ist hiermit der Beweis auf die Ungleichung $\Gamma > \frac{1}{3}$ zurückgeführt; wir werden übrigens zeigen, dass

$$\Gamma \geqq \frac{1}{2}$$

ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir gleichzeitig mit unserer Menge E, welche aus allen Punkten $(\eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ des Raumes G_{N-N_0} besteht, für welche die Ungleichung

$$\Re\left(\sum_{N_0+1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) > -\delta \tag{26}$$

gilt, die Punktmenge E^*, welche aus denjenigen Punkten $(\eta_{N_0+1}, \ldots, \eta_N)$ des Raumes G_{N-N_0} besteht, welche die Ungleichung

$$\Re\left(\sum_{N_0+1}^{N} r_n e^{2\pi i \eta_n}\right) < \delta \tag{26*}$$

befriedigt. Es ist klar, dass die beiden Mengen E und E^* mit einander kongruent sind und daher dasselbe Mass besitzen; denn falls der Punkt $Q:(\eta_{N_0+1},\ldots,\eta_N)$ einer dieser beiden Mengen angehört, wird der Punkt $Q_1:\left(\eta_{N_0+1}+\frac{1}{2},\ldots,\eta_N+\frac{1}{2}\right)$, welcher aus Q entsteht, wenn alle Koordinaten um $\frac{1}{2}$ geändert werden, offenbar der anderen Menge angehören, so dass die eine Menge aus der anderen durch eine einfache »Parallelverschiebung» hervorgeht. Nun erfüllt aber jeder Punkt $(\eta_{N_0+1},\ldots,\eta_N)$ des Raumes mindestens eine der Ungleichungen (26) und (26*), d. h. die Vereinigungsmenge der beiden Punktmengen E und E^* gibt uns den ganzen Raum G_{N-N_0}. Hieraus folgt aber sofort, da E und E^* beide das Mass Γ haben und der ganze geschlossene Raum G_{N-N_0} vom Masse 1 ist, dass $2\Gamma\geqq 1$ sein muss, d. h. dass $\Gamma\geqq\frac{1}{2}$ ist.

§ 12.

Beweis des Konvergenzsatzes.

Es sei $f(x)\sim\sum_1^\infty A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine fast periodische Funktion mit linear unabhängiger Exponentenfolge; wir haben die Konvergenz der Reihe $\Sigma|A_n|$ zu beweisen. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen also an, dass $\Sigma|A_n|$ divergiert. Es sei

$$A_n=r_n e^{2\pi i\theta_n}\qquad (r_n>0)\qquad\text{und}\qquad \Lambda_n=2\pi\lambda_n$$

gesetzt; wir betrachten gleichzeitig mit der Fourierreihe

$$\sum_1^\infty A_n e^{i\Lambda_n x}=\sum_1^\infty r_n e^{2\pi i(\theta_n+\lambda_n x)} \tag{27}$$

die Reihe

$$\sum_1^\infty r_n e^{2\pi i\eta_n}, \tag{28}$$

wo $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n,\ldots$ von einander unabhängige Variable bedeuten. Wir setzen nunmehr $K=G+1$, wo G wie immer die obere Grenze von $|f(x)|$ be-

zeichnet, und wenden den Hilfssatz des § II auf die divergente Reihe mit positiven Gliedern Σr_n und die Zahl $K > 1$ an. Der Hilfssatz ergibt uns alsdann die Existenz einer positiven Grösse w und einer positiven ganzen Zahl N_0 derart, dass für jedes feste $N > N_0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Abschnitt $\sum_1^N r_n e^{2\pi i \eta_n}$ der Reihe (28) numerisch grösser als K ist, grösser als w ausfällt. Hieraus folgt aber weiter nach dem KRONECKER-WEYL'schen Satze, dass für jedes $N > N_0$ die relative Länge der Intervalle der x-Achse, für welche der Abschnitt $\sum_1^N r_n e^{2\pi i(\theta_n + \lambda_n x)}$ der Fourierreihe (27) numerisch grösser als K ist, ebenfalls grösser als w sein wird. Nun gilt aber in jedem Punkte x, in welchem

$$\left|\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right| > K$$

ist, die Ungleichung

$$\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right| \geqq \left|\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right| - |f(x)| > K - G = 1,$$

und es wäre somit für jedes $N > N_0$

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2 dx > w.$$

Dies verträgt sich aber nicht mit dem Fundamentalsatz, nach welchem für $N \to \infty$

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} \to 0.$$

Hiermit ist der Konvergenzsatz bewiesen.

Wir bemerken schliesslich noch, dass sich durch Kombination des Konvergenzsatzes mit dem Satze XII des § 3 das folgende Resultat ergibt: *Es sei $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ eine beliebig gegebene Folge von linear unabhängigen Zahlen; dann ist dafür, dass eine Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ als Fourierreihe zu einer fast periodischen Funktion gehört, notwendig und hinreichend, dass $\Sigma |A_n|$ konvergiert.* Denn einerseits

wird, falls $\Sigma |A_n|$ konvergiert, (nach dem Satze XII) die Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ gewiss eine Fourierreihe sein, nämlich die Fourierreihe der Summe $f(x) = \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$; und andererseits ist, falls $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ die Fourierreihe einer fast periodischen Funktion bildet, (nach dem Konvergenzsatz) die Reihe $\Sigma |A_n|$ konvergent.

Diese Tatsache zeigt besonders deutlich, wie gross der Unterschied ist zwischen Fourierreihen mit linear unabhängigen Exponenten und den gewöhnlichen Fourierreihen rein periodischer Funktionen, wo die Exponenten eine arithmetische Progression bilden. Denn es scheint bekanntlich nicht möglich zu sein, einfache notwendige und hinreichende Bedingungen aufzustellen, welche eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ erfüllen muss, um die Folge der Fourierkonstanten einer rein periodischen stetigen Funktion zu sein.

ZUSÄTZE.

1. Zur Definition der Fastperiodizität.

Die Definition, durch welche wir aus der Gesamtheit aller (für $-\infty < x < \infty$ stetigen) Funktionen die Klasse unserer »fast periodischen» Funktionen herausgehoben haben, war die folgende: *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *soll es eine Länge* $l = l(\varepsilon)$ *derart geben, dass jedes Intervall dieser Länge mindestens eine zu* ε *gehörige Verschiebungszahl der Funktion* $f(x)$ *enthält.* Es erhebt sich von selbst die Frage, ob man nicht vielleicht — unter Beibehaltung des Gedankens, die Existenz von »Verschiebungszahlen» zu fordern — andere und noch einfachere Definitionen hätte aufstellen können, die ebenfalls zu wichtigen und abgerundeten Klassen von Funktionen hätten führen können, welche auch als natürliche Verallgemeinerung der Klasse der rein periodischen Funktionen anzusehen wären. In diesem Zusatze sollen einige Bemerkungen zu dieser Frage gemacht werden, welche zeigen, dass die bei einem ersten Versuche etwa am naheliegendsten erscheinenden Definitionen nicht zu diesem Ziele führen.

I. Zunächst könnte man, um zu einer Verallgemeinerung der rein periodischen Funktionen zu kommen, von den zu betrachtenden Funktionen (die immer stetig gedacht sind) nur verlangen, *dass es überhaupt zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine von Null verschiedene Verschiebungszahl* $\tau(\varepsilon)$ *geben soll.* Dass aber hierdurch keine Klasse von Funktionen abgegrenzt wird, welche auch nur irgend etwas Charakteristisches von den Eigenschaften rein periodischer Funktionen beibehalten haben, geht z. B.

daraus hervor, dass schon jede Funktion, die nur gleichmässig stetig ist, zu dieser Klasse gehört; in der Tat lässt sich ja zu jeder solchen Funktion $f(x)$, falls $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben wird, ein δ so klein bestimmen, dass für alle x die Ungleichung $|f(x+\delta)-f(x)|<\varepsilon$ besteht.

II. Es ist nach der obigen Bemerkung klar, dass man, um wirklich periodenartige Eigenschaften zu erhalten, dafür sorgen muss, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ existieren, die nicht mit ε gegen Null konvergieren. Es wäre demnach natürlich die folgende Definition aufzustellen: *Zu unserer Funktionenklasse sollen diejenigen Funktionen $f(x)$ gerechnet werden* — wir wollen sie zur Abkürzung »*periodenartig*» nennen — *für welche es eine absolute Konstante $c > 0$ derart gibt, dass bei jedem $\varepsilon > 0$ eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ existiert, die $> c$ ist.* Es sei sogleich die Bemerkung hinzugefügt, dass diese Definition von dem besonderen Werte von c unabhängig ist, weil die aufgestellte Forderung tatsächlich damit aequivalent ist, zu verlangen, dass es zu jedem ε unendlich viele Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ gibt und unter ihnen beliebig grosse. Falls nämlich T beliebig gross gegeben wird und $\tau_1 > c$ eine zu $\frac{\varepsilon}{N}$ gehörige Verschiebungszahl ist, wo die ganze Zahl N so gross gewählt ist, dass $Nc > T$ ausfällt, wird die Zahl $\tau = N\tau_1$ offenbar eine zu ε gehörige Verschiebungszahl sein, welche $> T$ ist.

Das Ziel dieses Zusatzes ist nun vor allem der Nachweis, dass auch diese Definition — im Gegensatz zu unserer Definition der fast periodischen Funktionen, wo ja »etwas» mehr verlangt wurde — nicht zu einer abgerundeten Klasse von Funktionen führt. In der Tat werden wir den folgenden, auch an sich ganz interessanten Satz beweisen:

Es braucht die Summe zweier periodenartiger Funktionen nicht wieder periodenartig zu sein.

Wir werden zunächst ein charakteristisches Beispiel einer periodenartigen (übrigens beschränkten und gleichmässig stetigen) Funktion konstruieren[1], aus dem wir dann den obigen Satz unmittelbar werden ableiten können.

Beispiel einer periodenartigen Funktion. Wir bemerken zunächst, dass es, um die »Periodenartigkeit» einer Funktion zu erkennen, offenbar genügt, an Stelle aller $\varepsilon > 0$, nur eine Folge von gegen Null abnehmenden Zahlen ε, etwa

[1] Nur aus Bequemlichkeitsgründen werden wir sie aus geradlinigen Stücken aufbauen; dass hierdurch ihre Ableitung unstetig wird, ist völlig belanglos.

die Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, ins Auge zu fassen; so werden wir in unserem Beispiel die Periodenartigkeit der angegebenen Funktion $f(x)$ dadurch nachweisen, dass wir eine Reihe von wachsenden positiven Zahlen $\tau_2 < \tau_3 < \cdots < \tau_n < \cdots$ derart angeben, dass τ_n eine zu $\frac{1}{n}$ gehörige Verschiebungszahl ist, d. h. dass bei jedem $n = 2, 3, \ldots$ die Ungleichung

$$|f(x+\tau_n) - f(x)| \leqq \frac{1}{n} \tag{29}$$

für alle x besteht.

Wir gehen nun schrittweise vor.

1ter Schritt. Zunächst bilden wir eine Funktion $f_1(x)$, die überall gleich 0 ist, ausser in einem endlichen Intervalle, etwa die Funktion

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{für} \quad -1 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{für} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

(siehe Fig. 13 a, S. 115, wo der besseren Übersichtlichkeit halber der Masstab der Ordinate vergrössert wurde).

2ter Schritt. Die zweite Funktion $f_2(x)$ wird durch die Gleichung

$$f_2(x) = \frac{1}{2} f_1(x+\tau_2) + f_1(x) + \frac{1}{2} f_1(x-\tau_2)$$

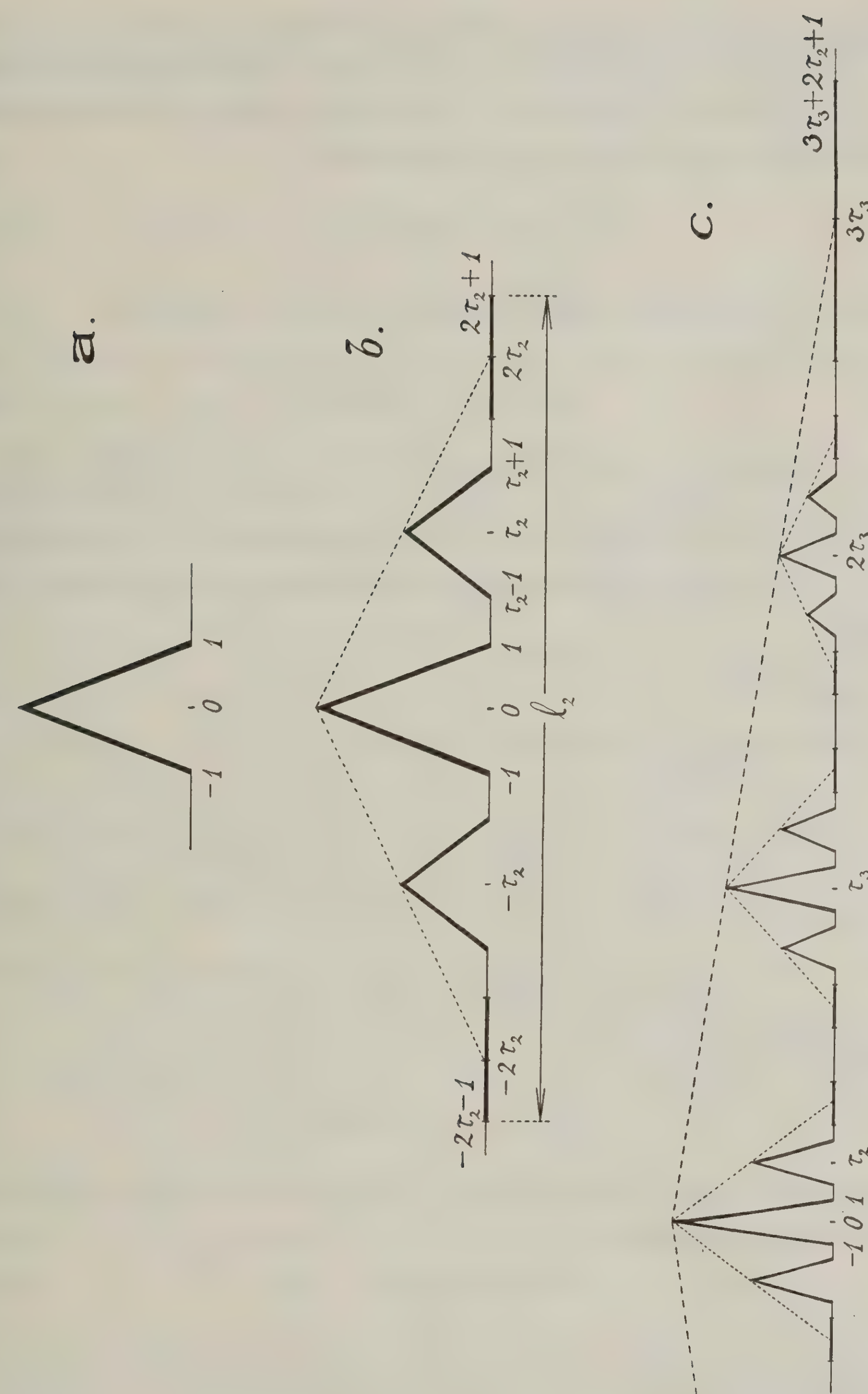
definiert (siehe Fig. 13 b), wo die positive Zahl τ_2 beliebig gewählt ist, mit der einzigen Einschränkung, dass die »Hügel» nicht übereinandergreifen, d. h. dass $\tau_2 - 1 > 1$, also $\tau_2 > 2$ ist. Wie aus der Figur unmittelbar zu sehen, erfüllt diese Funktion $f_2(x)$ für alle x die Ungleichung

$$|f_2(x+\tau_2) - f_2(x)| \leqq \frac{1}{2}.$$

Unter der »Länge» l_2 der zweiten »Hügelkette» werden wir die Länge des Intervalles $(-2\tau_2 - 1,\ 2\tau_2 + 1)$ also die Zahl $2(2\tau_2 + 1)$ verstehen; hierbei haben wir auch die beiden »Nullhügel», die »über» dem Intervalle $(-2\tau_2 - 1,\ -2\tau_2 + 1)$ bzw. »über» $(2\tau_2 - 1,\ 2\tau_2 + 1)$ liegen, mit zur Hügelkette gerechnet (vgl. die Figur).

3ter Schritt. Die dritte Funktion $f_3(x)$ wird durch die Gleichung

$$f_3(x) = \frac{1}{3} f_2(x+2\tau_3) + \frac{2}{3} f_2(x+\tau_3) + f_2(x) + \frac{2}{3} f_2(x-\tau_3) + \frac{1}{3} f_2(x-2\tau_3)$$



a.
-1
0
1
b.
$-2\tau_2-1$
$-2\tau_2$
$-\tau_2$
-1
0
1
τ_2-1
τ_2
τ_2+1
$2\tau_2$
$2\tau_2+1$
l_2
c.
-1 0 1
τ_2
τ_3
$2\tau_3$
$3\tau_3$
$3\tau_3+2\tau_2+1$

Fig. 13.

definiert, wo τ_3 eine beliebig gewählte Zahl bedeutet, die nur $> l_2$, d. h. $> 2(2\tau_2 + 1)$ sein soll. (Vgl. Fig. 13 c; in dieser Figur ist nur die rechte »Hälfte» von $f_3(x)$ gezeichnet; ausserdem ist der Masstab der Ordinate neuerlich geändert.) Es ist klar, dass $f_3(x)$, sowie $f_2(x)$, die Ungleichung

$$|f_3(x+\tau_2) - f_3(x)| \leqq \frac{1}{2}$$

erfüllt; $f_3(x)$ erfüllt aber offenbar ausserdem noch die Ungleichung

$$|f_3(x+\tau_3) - f_3(x)| \leqq \frac{1}{3}.$$

Unter der Länge l_3 der dritten Hügelkette werden wir nun die Länge des Intervalles $(-3\tau_3 - 2\tau_2 - 1,\ 3\tau_3 + 2\tau_2 + 1)$, d. h. die Zahl $2(3\tau_3 + 2\tau_2 + 1)$, verstehen.

Wir fahren in dieser Weise fort und bestimmen die Funktionen $f_4(x)$, $f_5(x), \ldots$, indem wir die Funktion $f_n(x)$ folgendermassen aus der Funktion $f_{n-1}(x)$ ableiten:

n^{ter} Schritt. Es wird gesetzt:

$$f_n(x) = \sum_{m=n-1}^{1} \frac{n-m}{n} f_{n-1}(x + m\tau_n) + f_{n-1}(x) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{n-m}{n} f_{n-1}(x - m\tau_n),$$

wo τ_n beliebig gewählt wird, nur so, dass $\tau_n > l_{n-1}$, d. h. (wie durch Induktion sofort zu sehen) so, dass $\tau_n > 2((n-1)\tau_{n-1} + (n-2)\tau_{n-2} + \cdots + 2\tau_2 + 1)$ ist. Diese Funktion $f_n(x)$ befriedigt offenbar nicht nur (wie $f_{n-1}(x)$) die $n-2$ Ungleichungen

$$|f_n(x+\tau_r) - f_n(x)| \leqq \frac{1}{r} \qquad (r = 2, 3, \ldots, n-1)$$

sondern auch die neue:

$$|f_n(x+\tau_n) - f_n(x)| \leqq \frac{1}{n}.$$

Grenzübergang. Wir definieren nunmehr die gewünschte Funktion $f(x)$ durch die Limesgleichung

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Es ist klar, dass dieser Limes existiert; denn bei jedem festen x haben die Funktionswerte $f_n(x)$ von einer gewissen Stelle an, d. h. für $n > N = N(x)$, einen

konstanten, d. h. von n unabhängigen Wert. Und es ist ferner klar, dass die Funktion $f(x)$ periodenartig ist, da sie bei jedem festen $n \geqq 2$ (und alle x) die Ungleichung

$$|f(x+\tau_n)-f(x)| \leqq \frac{1}{n} \tag{29}$$

erfüllt; in der Tat gilt ja für $N \geqq n$ die Ungleichung

$$|f_N(x+\tau_n)-f_N(x)| \leqq \frac{1}{n},$$

welche, wenn wir N gegen Unendlich wachsen lassen (während x und τ_n festgehalten werden), in die Ungleichung (29) übergeht.

Wir gelangen nunmehr zum Beweise unserer Behauptung, dass zwei periodenartige Funktionen existieren, deren Summe nicht wieder periodenartig ist. Wir benutzen hierzu zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ vom Typus des obigen Beispieles, deren entsprechende Zahlenfolgen τ_n wir mit τ_n' und τ_n'' bezeichnen. Es ist klar, dass unsere Aufgabe, die Nicht-Periodenartigkeit von $\varphi(x)+\psi(x)$ zu zeigen, gelöst ist, falls wir durch Wahl der Grössen τ_n' und τ_n'' erreichen können, dass keiner der Hügel der einen Funktion mit einem der Hügel der zweiten Funktion irgend einen Punkt gemeinsam hat, abgesehen natürlich vom »Ausgangshügel» über dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$; falls nämlich dies erreicht ist, wird ja die Summe $\varphi(x)+\psi(x)$ im Punkte $x=0$ den den Wert $1+1=2$ haben, aber in jedem Punkte x mit $|x|>1$ einen Wert $\leqq 1$ besitzen, so dass zu einem gegebenen $\varepsilon<1$ $\left(\text{z. B. zu } \varepsilon=\frac{1}{2}\right)$ gewiss keine beliebig grossen Verschiebungszahlen existieren. Wir bemerken zunächst, dass es offenbar genügt die τ' und τ'' so zu bestimmen, dass bei jedem festen n keiner der Hügel der n^{ten} Hilfsfunktion $\varphi_n(x)$ mit einem der Hügel der n^{ten} Hilfsfunktion $\psi_n(x)$ einen Punkt gemeinsam hat (natürlich immer abgesehen vom Ausgangshügel). Um nun die Möglichkeit einer solchen Bestimmung darzutun wenden wir das Verfahren der vollständigen Induktion an. Wir bestimmen zunächst τ_2' und τ_2'' so, dass $\varphi_2(x)$ nicht mit $\psi_2(x)$ in dem erwähntem Sinne kollidiert; dies ist möglich, weil wir ja die Zahlen τ_2' und τ_2'' ganz frei wählen können, nur so, dass sie beide >2 sind. Wir denken uns nunmehr auch noch die Zahlen $\tau_3', \tau_4', \ldots, \tau_{n-1}'$ und $\tau_3'', \tau_4'', \ldots, \tau_{n-1}''$ so bestimmt, dass $\varphi_{n-1}(x)$ und $\psi_{n-1}(x)$ kollisionsfrei sind; es handelt sich dann darum, nachzuweisen, dass es möglich ist τ_n' und τ_n'' so zu wählen, dass auch $\varphi_n(x)$ und $\psi_n(x)$ nicht kollidieren. Zu diesem Zwecke wählen

wir zuerst τ_n' so gross im Verhältnis zu τ_{n-1}'', dass $\varphi_n(x)$ nicht mit $\psi_{n-1}(x)$ kollidiert, und dann τ_n'' so gross im Verhältnis zu τ_n', dass $\psi_n(x)$ nicht mit $\varphi_n(x)$ kollidiert. Die Durchführbarkeit dieses Verfahrens ist offenbar dadurch gegeben, dass, falls $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ festgelegt sind, τ_n ganz beliebig, nur oberhalb einer gewissen Schranke gewählt werden kann. Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Nachdem sich somit gezeigt hat, dass bereits die Frage nach der Invarianz des Begriffes der »Periodenartigkeit» gegenüber Addition verneinend zu beantworten ist und daher auch diese Definition als nicht gut brauchbar beiseite gelegt werden muss, bietet sich wohl unsere Definition der »Fastperiodizität» als eine sehr naheliegende dar. Gerade die bei ihr aufgestellte Forderung der Existenz einer Länge $l(\varepsilon)$, durch die der Abstand der Verschiebungszahlen auch nach oben eingeschränkt wird, macht ein derartiges gegenseitiges Verhalten zweier Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, wie es eben im Falle der »Periodenartigkeit» geschildert wurde, unmöglich. Trotzdem muss es wohl überraschend erscheinen, dass man bereits durch eine so einfache Art der Verallgemeinerung des Begriffes der Periodizität zu einer Funktionenklasse gelangen kann, die nicht nur in sich abgerundet ist, sondern genau diejenigen (stetigen) Funktionen umfasst, welche in periodische Schwingungen aufgelöst werden können; es wäre wohl kaum von vorneherein zu erwarten, dass man diese Funktionenklasse durch Verschiebungseigenschaften charakterisieren könnte, ohne gezwungen zu sein den Verschiebungszahlen ganz andersartige Einschränkungen, die etwa durch die Schwingungsexponenten bedingt wären, aufzuerlegen.

Ich füge hinzu, dass mir bei der Aufsuchung der Definition der Fastperiodizität der im nächsten Zusatz zu besprechende Bohl-Wennberg'sche Satz über diophantische Approximationen sehr nützlich gewesen ist, aus welchem unmittelbar gefolgert werden wird, dass jede Summe von endlich vielen rein periodischen Funktionen den in der Definition der Fastperiodizität aufgestellten Forderungen genügt.

Schliesslich sei noch in diesem Zusammenhange, wo von der Definition einer verallgemeinerten Periodizität die Rede ist, darauf aufmerksam gemacht, dass man sich bei gewissen Fragen — vor allem bei der Frage, wann eine gegebene Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine »Fourierreihe» ist, d. h. zu einer bestimmten fast periodischen Funktion gehört — nicht, wie es in diesen beiden Abhandlungen geschieht, auf die Betrachtung stetiger Funktionen beschränken kann. Schon im Falle der

rein periodischen Funktionen wurde ja eine einfache Beantwortung der erwähnten Frage (wie sie durch den RIESZ-FISCHER'schen Satz gegeben wird) erst dann möglich, als man die beliebigen, nur im Lebesgue'schen Sinne integrierbaren Funktionen in die Betrachtung einführte. Solche Untersuchungen, welche für den Fall der fast periodischen Funktionen nicht ganz einfach erscheinen, wurden bei diesen ersten Veröffentlichungen ganz ausser Betracht gelassen.

2. Aequivalenz des Corollares zu Satz III mit einem Satz über diophantische Approximationen.

In § I haben wir als Corollar des Satzes, dass die Summe zweier fast periodischer Funktionen wieder eine fast periodische Funktion ist, das folgende Ergebnis für den Spezialfall rein periodischer Funktionen gewonnen:

Satz A. *Die Summe*

$$F(x)=\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

einer beliebigen endlichen Anzahl von stetigen rein periodischen Funktionen ist eine fast periodische Funktion.

Wir wollen hier zeigen, dass dieser Satz A seinem eigentlichen Inhalte nach mit einem bekannten Satz (dem unten stehenden Satze B) über diophantische Approximationen völlig aequivalent ist. Dieser Satz, welcher wohl zuerst von BOHL[1] bei Gelegenheit seiner Arbeiten über die in der Einleitung genannten »quasi-periodischen» Funktionen aufgestellt und dann später von WENNBERG[2] bei einer Untersuchung über Dirichlet'sche Reihen wiedergefunden wurde, bildet eine Verschärfung des bekannten DIRICHLET-KRONECKER'schen Satzes, nach welchem in N arithmetischen Progressionen $\{mp_1\}$, $\{mp_2\}$, ..., $\{mp_N\}$, welche alle vom Nullpunkte ausgehen, immer wieder Punkte m_1p_1, m_2p_2, ..., m_Np_N zu finden sind, die mit beliebig vorgegebener Genauigkeit zusammenfallen.

---

[1] P. BOHL, Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie, Crelles Journal, Bd. 131 (1906), S. 268—321. (Vergl. insb. S. 279.) Hier ist der Satz zwar nur für den Fall ausgesprochen, wo die reziproken Werte der Zahlen p linear unabhängig sind, aber daraus folgt sofort seine Gültigkeit für beliebige p.

[2] S. WENNBERG, Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen, Dissertation (Upsala 1920), S. 19. Es bedeutet nur eine andere Formulierung des Satzes, wenn er hier für stetige statt für ganzzahlige Parameter ausgesprochen wird.

Satz B. *Es seien* $p_1, \ldots, p_N$ *beliebige reelle Zahlen* $\neq 0$, *und* $\delta > 0$ *beliebig gegeben. Dann gibt es eine Länge* $l = l(p_1, \ldots, p_N, \delta)$ *derart, dass jedes Intervall dieser Länge mindestens eine Zahl* τ *enthält, welche den* N *diophantischen Ungleichungen*

$$|\tau - m_i p_i| < \delta \qquad (i = 1, \ldots, N;\ m_i \text{ ganz})$$

genügt, d. h. dass in jedem Intervall dieser Länge l eine Zahl τ gelegen ist mit der Eigenschaft, dass das Intervall $(\tau - \delta,\ \tau + \delta)$ einen Punkt jeder der N arithmetischen Progressionen $\{m p_1\}, \ldots, \{m p_N\}$ enthält.

Beweis der Aequivalenz von Satz A und B. 1) Wir zeigen zunächst, dass der Satz A unmittelbar aus dem Satze B gefolgert werden kann. Es seien also die N rein periodischen Funktionen $f_1(x), \ldots, f_N(x)$ mit den entsprechenden Perioden $p_1, \ldots, p_N$ beliebig gegeben; wir haben bei jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Länge l derart zu beweisen, dass jedes Intervall dieser Länge eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Summe $F(x) = \Sigma f_n(x)$ enthält. Zu diesem Zwecke wählen wir zunächst, was aus Stetigkeitsgründen möglich ist, zu dem gegebenen ε das $\delta > 0$ so klein, dass bei jedem festen $n = 1, \ldots, N$ die sämtlichen Zahlen der Form

$$m p_n + \delta' \qquad (m \text{ ganz},\ |\delta'| < \delta)$$

zu $\frac{\varepsilon}{N}$ gehörige Verschiebungszahlen unserer Funktion $f_n(x)$ sind, und bestimmen danach zu diesem δ und den gegebenen Perioden $p_1, \ldots, p_N$ eine Länge l im Sinne des Satzes B so, dass jedes Intervall dieser Länge eine Zahl τ enthält, welche die Form besitzt

$$\tau = m_1 p_1 + \delta_1' = m_2 p_2 + \delta_2' = \cdots = m_N p_N + \delta_N',$$

wo gleichzeitig

$$|\delta_1'| < \delta,\ |\delta_2'| < \delta, \ldots,\ |\delta_N'| < \delta$$

ist. Dann hat dieses l offenbar die gewünschte Eigenschaft; denn in jedem Intervall der Länge l liegt ja eine Zahl τ, welche gleichzeitig eine zu $\frac{\varepsilon}{N}$ gehörige Verschiebungszahl jedes der N Summanden $f_n(x)$ und daher gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Summe $F(x)$ ist.

2) Andererseits ist aber auch klar, dass der Satz B aus dem Satz A gefolgert werden kann. Wir haben nur (ganz wie bei den Beweisen der Hilfssätze 7 und 8 in § 9) zu den gegebenen Zahlen p_n und der gegebenen Zahl δ des Satzes B die durch die Fig. 14 angegebenen stetigen rein periodischen Funktionen $f_n(x)$ $(n=1, \ldots, N)$ mit den Perioden p_n zu bilden und zu benutzen, dass

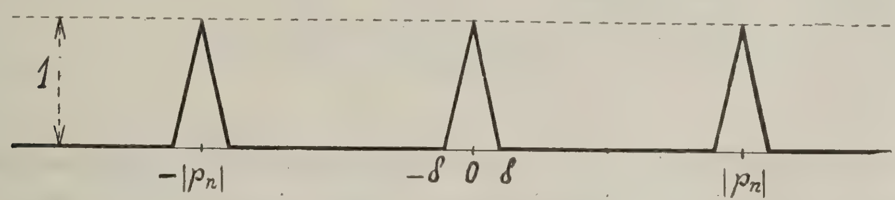


Fig. 14.

nach Satz A die Summe $F(x)=\Sigma f_n(x)$ fast periodisch wird. Denn hieraus folgt ja die Existenz einer Länge l mit der Eigenschaft, dass jedes Intervall dieser Länge eine, etwa zu $\varepsilon=\frac{1}{2}$ gehörige, Verschiebungszahl τ der Funktion $F(x)$ enthält, welche Zahl τ, wie aus der Figur sofort hervorgeht, die gewünschte Form

$$\tau=m_1 p_1+\delta_1'=\cdots=m_N p_N+\delta_N' \qquad (|\delta_n'|<\delta)$$

besitzen muss.

Wir fügen hinzu, dass Bohl aus dem Satze B unmittelbar hat folgern können, dass es zu jeder seiner »quasi-periodischen» Funktionen $f(x)$ eine Länge $l=l(\varepsilon)$ derart gibt, dass jedes Intervall dieser Länge eine zu ε gehörige Verschiebungszahl τ enthält, also, in unserer Terminologie, *dass jede quasi-periodische Funktion auch fast periodisch ist.* Wie schon in der Einleitung bemerkt, werden wir in der Abhandlung II ausführlich auf diese Frage eingehen und dabei zeigen, wie die Bohl'schen Funktionen innerhalb der allgemeinen Klasse der fast periodischen Funktionen in übersichtlicher Weise charakterisiert werden können.

3. Über die Integration fast periodischer Funktionen.

Es sei $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine beliebige fast periodische Funktion und $F(x)$ irgend ein unbestimmtes Integral von $f(x)$. Da sich die verschiedenen unbestimmten Integrale nur um eine additive Konstante unterscheiden, ist es gleichgültig welches unter ihnen wir betrachten, z. B.

$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy.$$

In § 5 haben wir ohne Weiteres beweisen können (Satz XXIV), dass bei jedem festen $c > 0$ das Integral

$$\int_x^{x+c} f(y)\, dy,$$

also die Differenz $F(x+c) - F(x)$, wieder fast periodisch ist. In diesem Zusatze werden wir die viel tiefer liegende Frage erörtern, wann auch die Funktion $F(x)$ selbst fast periodisch ist.

Man sieht unmittelbar, *dass es zur Fastperiodizität von $F(x)$ notwendig ist, dass die Fourierreihe von $f(x)$ kein konstantes Glied enthält*, dass also

$$M\{f(x)\} = 0$$

ist. In der Tat folgt aus $M\{f(x)\} = c \neq 0$, d. h. aus

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} F(T) = c,$$

dass $F(T) = c\,T + o(T)$ ist, so dass also $F(T)$ nicht einmal beschränkt bleibt. Die Bedingung $M\{f(x)\} = 0$ genügt aber nicht — wie es bei den rein periodischen Funktionen der Fall ist — um die Entwickelbarkeit von $F(x)$ in eine Fourierreihe, d. h. ihre Fastperiodizität, zu sichern. Für diese Tatsache hat bereits Bohl ein Beispiel gegeben, indem er eine quasi-periodische Funktion $f(x)$ der erwähnten Art konstruiert hat. Innerhalb der allgemeineren Klasse der fast periodischen Funktionen wird es aber noch leichter sein ein solches Beispiel unter den Funktionen mit linear unabhängigen Fourierexponenten anzugeben, wie wir am Ende dieses Zusatzes zeigen werden.

Bevor wir die Frage behandeln, wann $F(x)$ wieder fast periodisch ist, bemerken wir zunächst, dass man mit Hilfe partieller Integration sofort zeigen kann, *dass, falls das Integral $F(x)$ fast periodisch wird, seine Fourierentwicklung durch die Reihe*

$$F(x) \sim C + \sum \frac{A_n}{i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x} \qquad (C = \text{const.})$$

gegeben ist. In der Tat findet man bei jedem $\lambda \neq 0$

$$M\{F(x)\,e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\left[F(x)\frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda}\right]_0^T + \frac{1}{i\lambda}\int_0^T f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{i\lambda}\lim_{T\to\infty}\frac{F(T)}{T}e^{-i\lambda T} + \frac{1}{i\lambda}M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\} = \frac{1}{i\lambda}M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\},$$

da ja nach einer obigen Bemerkung die vorausgesetzte Fastperiodizität von $F(x)$ die Gleichung $M\{f(x)\} = 0$, d. h. die Limesgleichung $F(T) = o(T)$, zur Folge hat.

Für seine spezielle Klasse der quasi-periodischen Funktionen hat BOHL die Frage nach der Quasiperiodizität des Integrales $F(x)$ vollständig erledigt, indem er zu dem schönen Resultat gelangt ist[1], dass die blosse Forderung der Beschränktheit von $F(x)$ für die Quasiperiodizität dieser Funktion genügt. Bei Betrachtung des scharfsinnigen BOHL'schen Beweises findet man, dass er unmittelbar auf die fast periodischen Funktionen übertragen werden kann, indem die einzige Eigenschaft der Funktion $f(x)$, die BOHL zum Beweise heranzieht, eben diejenige ist, welche unserer Definition der Fastperiodizität zu Grunde liegt.[2] Unser Beweis des folgenden Satzes über fast periodische Funktionen ist daher eine fast wörtliche Wiedergabe des Beweises, den BOHL für die quasi-periodischen Funktionen gegeben hat.

Satz. *Für die Fastperiodizität des Integrals $F(x)$ ist nicht nur notwendig sondern auch hinreichend, dass $F(x)$ beschränkt bleibt.*

Beweis. Es darf offenbar $f(x)$, und also auch $F(x)$, reell angenommen werden. Nach Voraussetzung ist die Funktion $F(x)$ beschränkt; wir bezeichnen ihre untere und obere Grenze mit k_1 bzw. k_2 (wo $k_1 < k_2$ angenommen werden kann, da im Falle $k_1 = k_2$ das Integral $F(x)$ konstant ist).

---

[1] Vgl. P. BOHL, Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie, l. c., S. 283.

[2] Gerade dieses Integrationsproblem ist es gewesen, das BOHL zur Aufstellung seines im Zusatze 2 besprochenen Satzes über diophantische Approximationen geführt hat, aus welchem er schliessen konnte, dass seine Funktionen »fast periodischen« Charakter tragen, d. h. dass eine »Länge $l(\varepsilon)$« existiert.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Der Beweis wird dadurch erbracht, dass eine Zahl $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon, f(x))$ so angegeben wird, dass jede zu ε_1 gehörige Verschiebungszahl der gegebenen Funktion $f(x)$ auch eine zu ε gehörige Verschiebungszahl des Integrales $F(x)$ ist.

Zu diesem Zwecke wählen wir zwei feste Werte x_1 und x_2 (wir werden im folgenden den kleineren unter ihnen mit ξ und ihren Abstand $|x_2 - x_1|$ mit d bezeichnen) derart, dass

$$F(x_1) < k_1 + \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{und} \quad F(x_2) > k_2 - \frac{\varepsilon}{6}$$

ist, und bestimmen danach die Länge $l = l\left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)$ derart, dass in jedem Intervall dieser Länge mindestens eine zu $\frac{\varepsilon}{6d}$ gehörige Verschiebungszahl τ der Funktion $f(x)$ gelegen ist. Wir werden zunächst nur beweisen, dass die Schwingungen von $F(x)$ eine gewisse »Regelmässigkeit» aufweisen, nämlich, dass sich in jedem Intervalle $(\alpha, \alpha + L)$ der Länge $L = l + d$ zwei Werte z_1 und z_2 so finden lassen, dass

$$F(z_1) < k_1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad F(z_2) > k_2 - \frac{\varepsilon}{2} \tag{30}$$

ist. In der Tat können wir nach der Definition der Länge l eine Verschiebungszahl $\tau = \tau\left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)$ der Funktion $f(x)$ so wählen, dass die Zahl $\xi + \tau$ in das Intervall $(\alpha, \alpha + l)$ fällt und daher die beiden Zahlen $x_1 + \tau = z_1$ und $x_2 + \tau = z_2$ in das grössere Intervall $(\alpha, \alpha + L)$ zu liegen kommen; dann gilt die Relation

$$F(z_2) - F(z_1) = (F(x_2) - F(x_1)) + \int_{z_1}^{z_2} f(y)\,dy - \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,dy$$

$$= (F(x_2) - F(x_1)) + \int_{x_1}^{x_2} (f(y+\tau) - f(y))\,dy$$

also die Ungleichung

$$F(z_2) - F(z_1) \geqq (F(x_2) - F(x_1)) - d\frac{\varepsilon}{6d} > k_2 - k_1 - \frac{2\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{6} = k_2 - k_1 - \frac{\varepsilon}{2};$$

diese Ungleichung $F(z_2) - F(z_1) > k_2 - k_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ ist aber nach der Bedeutung von k_1 und k_2 nur möglich, wenn $F(z_1)$ und $F(z_2)$ die gewünschten Ungleichungen (30) erfüllen.

Wir behaupten nun, dass die »kleine» Zahl $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2L}$ die oben erwähnte Eigenschaft besitzt, dass also jede »feine», d. h. zu ε_1 gehörige, Verschiebungszahl τ der Funktion $f(x)$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $F(x)$ ist, d. h. die Ungleichung

$$|F(x+\tau) - F(x)| \leqq \varepsilon \tag{31}$$

für alle x befriedigt.

Es ist ein von Bohl herrührender Kunstgriff den Beweis der Ungleichung (31) dadurch zu erbringen, dass die beiden »einseitigen» Abschätzungen

$$F(x+\tau) - F(x) \geqq -\varepsilon \tag{32 a}$$

und

$$F(x+\tau) - F(x) \leqq \varepsilon \tag{32 b}$$

für sich abgeleitet werden.

a) Zum Beweise der Ungleichung (32 a) wählen wir zu dem beliebig gegebenen x eine Zahl z_1 aus dem Intervalle $(x, x+L)$, für welche $F(z_1) < k_1 + \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} F(x+\tau) - F(x) &= (F(z_1+\tau) - F(z_1)) + \int_x^{x+\tau} f(y)\,dy - \int_{z_1}^{z_1+\tau} f(y)\,dy \\ &= (F(z_1+\tau) - F(z_1)) + \int_x^{z_1} f(y)\,dy - \int_{x+\tau}^{z_1+\tau} f(y)\,dy \\ &> \left(k_1 - \left(k_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) - \left| \int_x^{z_1} (f(y+\tau) - f(y))\,dy \right| > -\frac{\varepsilon}{2} - L\frac{\varepsilon}{2L} = -\varepsilon. \end{aligned}$$

b) Der Beweis der Ungleichung (32 b) verläuft ebenso, nur dass wir hier einen Punkt z_2 im Intervalle $(x, x+L)$ benutzen, in welchem $F(z_2) > k_2 - \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Wir erhalten dann in analoger Weise:

$$F(x+\tau)-F(x)=(F(z_2+\tau)-F(z_2))+\int_x^{x+\tau} f(y)\,dy-\int_{z_2}^{z_2+\tau} f(y)\,dy$$

$$=(F(z_2+\tau)-F(z_2))+\int_x^{z_2} f(y)\,dy-\int_{x+\tau}^{z_2+\tau} f(y)\,dy$$

$$<\left(k_2-\left(k_2-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+\left|\int_x^{z_2}(f(y+\tau)-f(y))\,dy\right|<\frac{\varepsilon}{2}+L\frac{\varepsilon}{2L}=\varepsilon.$$

Hiermit ist der Beweis zu Ende.

Wir beschliessen diesen Zusatz mit einigen Bemerkungen über den Fall einer *linear unabhängiger Exponentenfolge,* wo die Verhältnisse besonders übersichtlich liegen, weil ja hier die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ wegen der Konvergenz von $\Sigma|A_n|$ im gewöhnlichen Sinne konvergiert, sogar gleichmässig für alle x. Es sei $f(x)\sim\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine beliebige fast periodische Funktion mit einer derartigen Exponentenfolge (womit übrigens speziell gesagt ist, dass die Reihe kein konstantes Glied enthält). Dann gilt der Satz, *dass eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Integral $F(x)$ wieder fast periodisch ist, einfach darin besteht, dass die Reihe*

$$\sum\left|\frac{A_n}{\Lambda_n}\right|$$

konvergiert.

Einerseits ist klar, dass diese Bedingung notwendig ist; denn, falls $F(x)$ fast periodisch ist, lautet ja nach einer obigen Bemerkung ihre Fourierentwicklung

$$F(x)\sim C+\sum\frac{A_n}{i\Lambda_n}e^{i\Lambda_n x},$$

so dass die Reihe mit linear unabhängigen Exponenten

$$\sum\frac{A_n}{i\Lambda_n}e^{i\Lambda_n x}$$

die Fourierreihe einer fast periodischen Funktion, nämlich der Funktion $F(x)-C$, ist und somit nach dem Konvergenzsatz (Kapitel III) absolut konvergieren muss.

Andererseits ist die Bedingung aber auch hinreichend. Denn aus ihr folgt, dass die Reihe

(33) $$\sum \frac{A_n}{i\,\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x}$$

gleichmässig konvergiert und daher (nach dem Corollar des Satzes VI) durch ihre Summe $G(x)$ eine fast periodische Funktion bestimmt; diese Funktion $G(x)$ ist aber auch ein unbestimmtes Integral von $f(x)$, weil ja die aus der Reihe (33) durch gliedweise Differentiation entstehende Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ gleichmässig konvergiert mit der Summe $f(x)$, und somit $G(x)$ differentierbar ist mit dem Differentialquotienten $G'(x) = f(x)$.

Mit diesem Satze ist auch die Richtigkeit der obigen Bemerkung bewiesen, *dass das Fehlen des konstanten Gliedes in einer Fourierentwicklung* $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ *nicht für die Fastperiodizität des Integrales* $F(x)$ *genügt.* In der Tat können ja Koeffizienten A_n und linear unabhängige Exponenten Λ_n so gewählt werden, dass zwar die Reihe

$$\sum |A_n|$$

aber nicht die Reihe

$$\sum \left|\frac{A_n}{\Lambda_n}\right|$$

konvergiert.

SUR LA DÉFINITION DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

PAR

S. MANDELBROJT

à PARIS.

À Mademoiselle EDITH ABADI.

Du point de vue de Weierstrass-Méray, le fait le plus important dans l'étude des fonctions analytiques est le suivant: une fonction analytique est complètement définie si on donne *tous* les coefficients du développement de Taylor en un point régulier.

On peut se poser la question suivante: La nature d'une fonction analytique holomorphe à l'origine étant connue, peut elle être définie par une série partielle de ses coefficients sans rien dire sur les autres coefficients? Par les mots »la fonction est définie» j'entends qu'elle est déterminée à une fonction entière près, ou bien à une fonction près, dont le rayon d'holomorphie est supérieur à celui de la fonction à définir.

La réponse à cette première question supposée positive on peut se demander si le caractère de la suite partielle qui définit la fonction dépend de la nature de cette fonction et quelle est cette dépendance?

J'établis dans ce travail quelques théorèmes qui répondent aux questions proposées. On peut résumer ces théorèmes dans l'énoncé suivant:

(A): *Si on donne soit le caractère, soit la distribution des singularités d'une fonction analytique, celle-ci est définie par un groupe partiel de ses coefficients; la nature du groupe (c'est-à-dire la croissance des indices des coefficients qui servent à définir cette fonction) dépend de ces singularités.*

Faisons maintenant quelques conventions, qui viennent assez naturellement:

Appelons *suites complémentaires* deux suites d'entiers $n_i\,(i=1, 2, \ldots)$ et $n'_j\,(j=1, 2, \ldots)$ dont la réunion forme la suite de tous les nombres entiers positifs.

Soit

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \ldots\ a_{n_i},\ \ldots$$

une suite de nombres complexes, tels que $\overline{\lim\limits_{i=\infty}} \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|}$ soit fini.

Nous dirons que la suite de coefficients $a_{n'_j}$ $(j=1, 2, \ldots)$ est fonction de la suite a_{n_i} $(i=1, 2, \ldots)$ si, un procédé étant fixé, la différence des deux fonctions quelconques $f_1(x)$ et $f_2(x)$ définies par ce procédé (le procédé en question peut se réduire à l'indication des singularités de la fonction comme c'est dans le cas actuel), et qui satisfont aux conditions

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n$$

$$f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a''_n x^n$$

$$a'_n=a''_n=a_n \quad \text{si} \quad n=n_i,$$

est une fonction entière.

Ou même si on ne considère que des singularités sur le cercle de convergence, on dira que la suite $a_{n'_j}$ est fonction de la suite a_{n_i} si la différence $f_1(x)-f_2(x)$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle dont le rayon est supérieur au rayon d'holomorphie de chaque fonction $f_1(x)$ et $f_2(x)$. Le problème capital qui se pose après avoir donné la suite $a_n (n=1, 2, \ldots)$ de coefficients de la série de Taylor, qui définit une fonction analytique $\varphi(x)=\Sigma a_n x^n$, est de trouver les relations qui existent entre la suite a_n et l'allure de la fonction $\varphi(x)$, — principalement de trouver des renseignements sur les singularités de cette fonction. Les définitions que nous venons d'adopter permettent de substituer au fait (A) le fait (A') qui donne dans les cas généraux une solution théorique de ce problème.

(A'). *Si on donne soit le caractère, soit la distribution des singularités d'une fonction analytique, holomorphe à l'origine, on peut indiquer une suite de nombres entiers n_i telle que, a_n étant les coefficients de cette fonction, la suite $a_{n'_j}$ est fonction de la suite a_{n_i}. La croissance de la suite n_i dépend de ces singularités.* (Les suites n_i et n'_j sont complémentaires.) Cela veut dire que: *la nature*[1] *des singularités d'une fonction étant définie, les coefficients d'ordre $n_i (i=1, 2, \ldots)$ définissent la partie principale des coefficients d'ordre n'_j.*

[1] Ou bien la distribution.

No. 1. Je suis obligé de rappeler quelques théorèmes que j'ai démontrés dans mon mémoire »Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes» (Annales de l'Ecole Normale supérieure t. 40. 1923): Théorème 1. Etant donnée la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}, \tag{1}$$

je suppose qu'il existe une suite de λ_n

$$\lambda_{n_1},\ \lambda_{n_2},\ \ldots\ \lambda_{n_i},\ \ldots$$

satisfaisant à la condition

$$\lim\ (\lambda_{n_i+1}-\lambda_{n_i})=\infty\,;$$

je dis que la série (1) a sur le cercle de convergence au moins un point qui n'est pas pôle.

Théorème 2. Etant donnée une série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n} \tag{1}$$

de rayon de convergence égal à R et dont les λ_n sont tels qu'il existe une suite

$$\lambda_{n_1},\ \lambda_{n_2},\ \ldots\ \lambda_{n_i},\ \ldots$$

satisfaisant à la condition

$$\lim\ (\lambda_{n_i+1}-2^p\,\lambda_{n_i})=\infty\,,$$

où p est un nombre entier positif, la fonction représentée par la série (1) ne peut pas être mise sous la forme:

$$\varphi(x)=\frac{\varphi_1(x)}{[P(x)]^{\frac{q}{p+1}}},$$

où $\varphi_1(x)$ est une fonction régulière dans un cercle de rayon supérieur à R; $P(x)$ est un polynome de la forme

$$P(x)=(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_k)^{\nu_k}$$

$$|x'_j|=R\ \ (j=1,2,\ \ldots\ k)$$

ν_j étant des nombres entiers positifs, et q un entier quelconque.

Théorème 3. Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n} \tag{1}$$

est telle qu'il existe une suite

$$\lambda_{n_1},\ \lambda_{n_2},\ \ldots\ \lambda_{n_i},\ \ldots$$

satisfaisant à la condition

$$\lim_{i=\infty} \frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}} = \infty,$$

la fonction représentée par cette série n'a d'autres singularités que des continus non-bornés.

Thèorème 4. Soit

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_n,\ \ldots$$

une suite d'entiers ne contenant qu'un nombre fini de multiples de chaque nombre p_i appartenant à une suite quelconque de nombres premiers

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_i,\ \ldots,$$

la fonction, repsésentée par la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

possède sur le cercle de convergence un ensemble non réductible de points singuliers.

No. 2. Je passe à la démonstration du théorème suivant:

Théorème I. Si l'ensemble E donné des points singuliers d'une fonction analytique, holomorphe à l'origine, est tel, qu'aucune partie de cet ensemble n'est un continu non borné, la fonction est définie (à une fonction entière près) par une suite partielle de coefficients

$$a_{n_1},\ a_{n_1+1},\ a_{n_1+2},\ \ldots\ a_{n_1+k_1},\ \ldots\ a_{n_i},\ a_{n_i+1},\ \ldots\ a_{n_i+k_i},\ \ldots, \tag{1}$$

la suite n_i étant une suite quelconque d'entiers positifs, et satisfaisant à la condition

$$\lim_{i=\infty} \frac{k_i}{n_i} = \infty.$$

Soient $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b'_n x^n$ et $\varphi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b''_n x^n$ deux fonctions analytiques admettant l'ensemble E comme l'ensemble de points singuliers et dont les coefficients jouissent de la propriété suivante:

$$\begin{gathered} b'_{n_i}=b''_{n_i}=a_{n_i} \\ b'_{n_i+1}=b''_{n_i+1}=a_{n_i+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b'_{n_i+k_i}=b''_{n_i+k_i}=a_{n_i+k_i} \end{gathered}$$

pour $i=1, 2, \ldots$

Soit $f(x)$ la différence de ces deux fonctions:

$$f(x)=\varphi(x)-\varphi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

On a évidemment:

$$c_{n_i}=0, \quad c_{n_i+1}=0, \ldots c_{n_i+k_i}=0.$$
$$(i=1, 2, \ldots)$$

Soit λ_n la suite de nombres entiers positifs qui n'entrent pas dans la suite

$$n_i,\ n_i+1, \ldots n_i+k_i \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

On peut donc écrire

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} x^{\lambda_n}.$$

On constate facilement que:

$$\lambda_{n_i+1}=\lambda_{n_i}+2+k_i,$$

où $\lambda_{n_i}=n_i-1$. Et en vertu de la condition (2) on a

$$\lim_{i=\infty} \frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}}=\frac{\lambda_{n_i}+2+k_i}{\lambda_{n_i}}=\infty. \tag{2'}$$

L'ensemble de points singuliers de la fonction $f(x)$ est une partie (au point de

vue de la théorie des ensembles l'ensemble lui-même est aussi sa propre partie) de l'ensemble E. Il ne contient donc aucune partie qui soit un continu non borné.

Si on supposait

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} \neq 0$$

on serait en contradiction évidente avec le théorème 3, énoncé dans le no. précédent. Le théorème I est donc démontré. Comme on voit il est essentiel d'indiquer l'ensemble E, en donnant les affixes de tous ses points (il ne suffit pas d'indiquer ses propriétés).[1]

No. 3. *Théorème II. Une fonction n'ayant sur le cercle de convergence de rayon R d'autres points singuliers que les points d'affixes α_j ($j=1, 2, \ldots k$), ces singularités étant telles que la fonction puisse être représentée sous la forme*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha_1)^{\frac{q_1}{\nu_1}} (x-\alpha_2)^{\frac{q_2}{\nu_2}} \ldots (x-\alpha_k)^{\frac{q_k}{\nu_k}}},$$

q_j, ν_j étant des entiers positifs liés à α_j, et $\varphi(x)$ étant holomorphe dans un cercle de rayon supérieur à R, cette fonction est définie (à une fonction de rayon d'holomorphie supérieur à R près) par la suite

(1) $$a_{n_i}, a_{n_i+1}, \ldots a_{n_i+k_i} \qquad (i=1, 2, \ldots),$$

les n_i étant des entiers positifs quelconques et k_i satisfaisant à la condition

(3) $$\lim\, [k_i - (2^{p-1}-1)\, n_i] = \infty,$$

p étant le plus petit commun multiple des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k$. Remarquons que $f(x)$ peut être mise sous la forme

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{[P(x)]^{\frac{1}{p}}},$$

$P(x)$ étant un polynome dont les zéros sont les points d'affixes α_j ($j=1, 2, \ldots k$). Deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ admettant les mêmes points singuliers α_j avec les

[1] On peut donc dire, que si une fonction analytique représentée par une série entière de rayon de convergence fini, n'a pas comme singularités des continus non-bornés — la suite des coefficients qui n'entrent pas dans (1) est fonction de là suite (1).

mêmes nombres correspondants q_j, ν_j donnent par soustraction l'une de l'autre une fonction du même caractère, c'est-à-dire

$$f_1(x)-f_2(x)=F(x)=\frac{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}{[P(x)]^{\frac{1}{p}}}=\frac{\Psi(x)}{[P(x)]^{\frac{1}{p}}},$$

Ψ ayant un rayon de convergence supérieur à R.

On a comme dans le théorème précédent

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n} x^{\lambda_n},$$

la suite λ_n admettant une suite partielle

$$\lambda_{n_1},\ \lambda_{n_2},\ \ldots\ \lambda_{n_i},\ \ldots\ ;\ \lambda_{n_i}=n_i-1$$

telle que

$$\lambda_{n_i+1}=\lambda_{n_i}+k_i+2.$$

On a donc

$$\lambda_{n_i+1}-2^{p-1}\lambda_{n_i}=k_i-(2^{p-1}-1)\,n_i+1-2^{p-1}.$$

Il résulte de (3) immédiatement

$$\lim\ (\lambda_{n_i+1}-2^{p-1}\lambda_{n_i})=\infty.$$

L'égalité

$$\overline{\lim}\ \sqrt[\lambda_n]{|c_{\lambda_n}|}=\frac{1}{R}$$

est donc impossible en vertu du théorème 2 énoncé dans le n° précédent.[1]

Théorème III. Une fonction n'ayant que des pôles sur le cercle de convergence est définie par la suite (1), *les k_i satisfaisant à la condition*

$$\lim_{i=\infty} k_i=\infty. \tag{4}$$

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le théorème 1 du numéro précédent. En outre elle diffère peu de la démonstration du théorème précédent. Pourtant elle peut prêter à une remarque:

---

[1] On pourrait faire ici une remarque toute semblable à celle que nous avons faite dans la note (page 134). Les théorèmes III. V. VI donnent lieu aux mêmes remarques. Ceci correspond au fait (A′) de l'introduction.

Dans le théorème précédent on a précisé les affixes des points singuliers α_j, tandis que dans ce théorème ceci n'est plus nécessaire. On le comprend facilement si l'on remarque que la fonction $F(x)$ dans ce cas n'admet que des pôles sur le cercle de convergence, quels que soient les pôles de $f_1(x)$ et ceux de $f_2(x)$ sur ce cercle. Mais si les α_j ou bien les q_j et ν_j du théorème précédent ne sont pas les mêmes pour $f_1(x)$ et $f_2(x)$ la fonction $F(x)$ correspondante aurait des singularités sur lesquelles on ne pourrait plus faire des conclusions immédiates.

On voit donc que le théorème III est plus général que le cas particulier du théorème II, obtenu en y faisant $p=0$.

No. 4. Il est maintenant à propos d'indiquer un fait qui n'est pas lié strictement aux théorèmes précédents, mais dont les conséquences peuvent être utiles, ce fait pouvant présenter quelques intérêts quand on se trouve dans l'ordre d'idées d'Eisenstein.

Théorème IV. Si l'on peut extraire de la suite λ_n de nombres entiers positifs, une suite partielle

$$\lambda_{n_1},\ \lambda_{n_2},\ \ldots\ \lambda_{n_i},\ \ldots$$

telle que

$$\lim\ (\lambda_{n_i+1}-\lambda_{n_i})=\infty \tag{1}$$

la série

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

dont le rayon de convergence est égal à un et dont les coefficients sont entiers, admet le cercle de convergence comme coupure.

On sait d'après le théorème Hadamard-Fabry que lorsque on ne fait pas la restriction sur les coefficients a_n il faut pour pouvoir tirer la conclusion du théorème (c.-a.-d. que le cercle de convergence est une coupure) que *tous* les λ_n jouissent de la propriété (1).

Remarquons qu'on ne peut pas remplacer dans notre théorème les coefficients entiers par des coefficients p. e. rationnels, car on peut former une telle série avec des lacunes satisfaisant à la condition (1) et pourtant elle n'admet qu'un seul point singulier dans tout le plan.

De même la condition relative au rayon du cercle de convergence est nécessaire.[1]

Pour démontrer le théorème IV je rappelle un théorème dû à M. Carlson[2]:

[1] Je développerai ces remarques dans un autre travail.

[2] »Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten». Math. Zeitschr. 1921.

La fonction représentée par une série entière avec des coefficients entiers, convergente à l'intérieur du cercle de rayon 1 est ou bien une fonction rationnelle, ou bien admet le cercle de convergence comme coupure. Dans le premier cas la fonction est de la forme

$$\frac{P(x)}{(1-x^p)^q}.$$

Si on se rapporte maintenant à l'énoncé du théorème IV on voit que $\varphi(x)$ est ou bien une fonction rationnelle ou bien admet le cercle de convergence comme coupure; or, la première hypothèse est impossible en vertu du théorème 1 énoncé dans le no. 1; il en résulte la vérification du théorème. On pourrait en tirer la conclusion suivante:

La suite (1) du théorème III, satisfaisant à la condition (4), *définit complètement* la fonction, si on sait que les cofficients de la série correspondante sont entiers, et si on connait un point régulier sur le cercle de convergence de rayon 1.

Ainsi p. e. toutes les séries, dont le cercle de convergence est de rayon 1, les coefficients entiers, le point d'affixe -1 régulier et dont tous les coefficients de la suite

$$a_{n_i},\ a_{n_i+1},\ \ldots\ a_{n_i+k_i} \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

$$\lim\ k_i=\infty$$

sont égaux à 1, se réduisent à la seule fonction

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-x}$$

(à un polynome près évidemment).

Si on combine le théorème 4 avec le théorème de M. Carlson, on pourrait remplacer dans le théorème IV la condition (1) pour λ_n par celle à laquelle satisfont les λ_n dans le théorème 4.

No. 5. *Théorème V. Si l'ensemble de points singuliers sur le cercle de convergence de rayon R d'une fonction ânalytique est réductible*[1], *la fonction est définie (à une fonction de rayon d'holomorphie supérieur à R près) par une suite partielle de coefficients*

---

[1] Un ensemble est dit réductible, si un de ses ensembles dérivés successifs est fini.

$$
(\mathrm{L}) \qquad \begin{cases} a_{p_1}, \ a_{2p_1}, \ldots \ a_{ip_1}, \ldots \\ a_{p_2}, \ a_{2p_2}, \ldots \ a_{ip_2}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p_j}, \ a_{2p_j}, \ldots \ a_{ip_j}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}
$$

$p_1, p_2, \ldots p_j, \ldots$ *étant une suite quelconque de nombres premiers.*

Remarquons d'abord que, si E_1 et E_2 sont deux ensembles réductibles, il en est de même de chaque partie de la somme de ces deux ensembles (par suite de la somme elle-même aussi).

Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions admettant le même ensemble réductible comme ensemble de points singuliers sur le cercle de convergence de rayon R, et dont les séries correspondantes ont comme coefficients d'ordres:

$$
\begin{array}{l} p_1, \ 2p_1, \ldots \ ip_1, \ldots \\ p_2, \ 2p_2, \ldots \ ip_2, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_j, \ 2p_j, \ldots \ ip_j, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}
$$

ceux qui figurent dans le tableau (L). Soit $F(x)$ la différence des deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

L'ensemble des points singuliers de $F(x)$ sur le cercle de rayon R est réductible.

D'autre part la fonction

$$
F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{\lambda_n}
$$

satisfait à l'hypothèse du théorème 4 relative aux lacunes (ou bien à la croissance de la suite λ_n).

Son ensemble de points singuliers sur le cercle de convergence devrait donc être non réductible s'il n'était pas nul. La contradiction est évidente, et le théorème V est démontré.

No. 6. J'ai défini dans »Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes» une classe spéciale de séries entières que j'ai nommées »les séries entières de la classe (A)».

Soit $\sum\limits_{n=1} x^{\lambda_n}$ une série entière dont les coefficients sont égaux à *zéro* ou bien à *un*. Soit λ'_n une suite de nombres entiers qui complète la suite λ_n c'est-à-dire les deux suites λ_n et λ'_n forment toute la suite des nombres entiers positifs.

Supposons qu'il existe une série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda'_n}$ dont le cercle de convergence est d'un rayon au moins égal à *un*, et que la fonction représentée par la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda'_n} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}$$

admet le point d'affixe *un* comme point régulier. La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}$ sera alors dite *série de la classe (A)*.

Je démontre ensuite (voir le même mémoire) le théorème suivant: »Si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}$ est de la classe (A), la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$ d'un rayon de convergence fini, les a_n étant d'ailleurs arbitraires, possède sur le cercle de convergence au moins deux points singuliers».

Soit une série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\lambda'_n}$ telle que la suite

$$\lambda'_1,\ \lambda'_2,\ \ldots\ \lambda'_n,\ \ldots$$

ne contienne qu'un nombre fini de multiples d'un nombre premier p. Pour plus de clarté supposons même que cette suite n'admet pas du tout des multiples de p; ce fait ne restreint pas la généralité.

Regardons ensuite la série

$$\frac{1}{1-x^p} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{np}$$

dont les seuls points singuliers sont des pôles simples d'affixes

$$1,\ e^{\frac{2i\pi}{p}},\ e^{\frac{4i\pi}{p}},\ \ldots\ e^{\frac{2(p-1)i\pi}{p}}.$$

La partie principale du pôle d'affixe 1 étant égale à $\frac{1}{p(1-x)}$, il est évident que la série

$$\varphi(x) = \sum b_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} p x^{np} = \frac{1}{1-x} - \frac{p}{1-x^p}$$

représente une fonction holomorphe autour du point d'affixe *un*.

D'autre part les coefficients correspondants aux puissances λ_n sont égaux à 1. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}$$

est donc une série de la classe (A).

D'après le théorème cité tout à l'heure toute série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, x^{\lambda'_n}$ possède sur le cercle de convergence au moins deux points singuliers.

De plus: x_1 étant un point singulier de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, x^{\lambda'_n}$ sur le cercle de convergence, il est facile à démontrer que sur ce cercle se trouve au moins un point singulier d'affixe $x_1\, e^{\frac{2m\,i\pi}{p}}$, m étant un des nombres $1, 2, \ldots p-1$. (Voir le mémoire cité.)

En partant de cette remarque il devient évident que:

Théorème 5: Si la suite λ'_n ne contient pas des multiples de k nombres premiers

$$p_1, p_2, \ldots p_k,$$

ou bien n'en contient qu'un nombre fini, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, x^{\lambda'_n}$ d'un rayon de convergence fini, et dont les coefficients sont d'ailleurs arbitraires possède au moins $k+1$ points singuliers sur le cercle de convergence.

No. 7. On peut maintenant très facilement démontrer le théorème suivant:

Théorème VI. Si une fonction analytique n'a que m points singuliers sur le cercle de convergence de rayon R, cette fonction est définie (à une fonction de rayon d'holomorphie supérieur à R près) par la suite de coefficients

$$(\mathrm{L}') \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{p_1},\ a_{2p_1}, \ldots a_{ip_1} \\ a_{p_2},\ a_{2p_2}, \ldots a_{ip_2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{p_{2m}},\ a_{2p_{2m}}, \ldots a_{ip_{2m}} \end{array} \right.$$

$p_1, p_2, \ldots p_{2m}$ *étant des nombres premiers distincts quelconques.*

Si on donne les affixes des points singuliers, on peut remplacer dans cet énoncé $2m$ par m.

Supposons en effet qu'il existe deux séries entières

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n x^n$$

qui satisfont aux conditions suivantes:

1° Elles ont un même rayon de convergence égal à R.

2° Pour n égal à jp_k, j étant un entier positif quelconque et k prenant une des valeurs

$$1, 2, \ldots m$$

on a

$$c_n = c'_n = a_n .$$

3° Chacune de ces fonctions n'a que m points singuliers sur le cercle de convergence.

La fonction

$$F(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

possède au plus $2m$ points singuliers sur le cercle de convergence (si les affixes des m points singuliers qui interviennent dans l'énoncé sont donnés, $F(x)$ possède au plus m points singuliers sur le cercle de convergence). $F(x)$ peut être mise sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n x^{\lambda_n},$$

où λ_n satisfont à la condition du théorème 5, où il faut remplacer k par $2m$.

La fonction $F(x)$ devrait donc avoir au moins $2m+1$ points singuliers sur le cercle de convergence, si elle en a un sur le cercle, ce qui est contradictoire à la remarque précédente.

No. 8. Le théorème Hadamard-Fabry permet de tirer une conséquence intéressante si on se place dans l'ordre d'idées que nous avons adopté.

Je rappelle ce théorème:

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

la suite λ_n satisfaisant à la condition

$$\lim (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \infty,$$

admet le cercle de convergence comme coupure.

Par un raisonnement tout semblable à ceux qui servaient à démontrer la plupart des théorèmes de cet ouvrage on peut arriver à la conclusion suivante:

Une fonction $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$ ayant sur le cercle de convergence un point régulier donné est définie par une suite

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \ldots\ a_{n_i},\ \ldots$$

qui comprend tous les coefficients sauf ceux dont les indices n_i' satisfont à la condition

$$\lim (n_{i+1}' - n_i') = \infty.$$

Mais si on ne considère que les séries qui admettent le cercle de convergence comme coupure, aucune suite partielle ne définit la fonction.

C'est-à-dire, deux séries $\varphi(x) = \Sigma b_n x^n$ et $\varphi_1(x) = \Sigma c_n x^n$ qui ont les mêmes coefficients d'ordre n_1, n_2, ..., la suite n_i étant quelconque, qui admettant en outre le même cercle de rayon R comme coupure, ne diffèrent pas en général, d'une fonction dont le rayon de convergence est supérieur à R.

Soit en effet

$$n'_1,\ n'_2,\ \ldots\ n'_i,\ \ldots$$

la suite qui complète la suite

$$n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_i,\ \ldots$$

(c.-a.-d., les deux suites n_i' et n_i forment ensembles la suite de tous les nombres entiers positifs). Choisissons parmi les n_i' une suite de nombres n_i'' tels que

$$\lim (n_{i+1}'' - n_i'') = \infty.$$

Soit maintenant

$$c_{n_1''},\ c_{n_2''},\ \ldots\ c_{n_i''},\ \ldots$$

une suite de nombres positifs tels que

$$\lim \sqrt[n_i'']{c_{n_i''}} = \frac{1}{R}.$$

Soit

$$n_1''', \; n_2''', \; \ldots \; n_i''', \; \ldots$$

une suite contenue dans n_i' et qui n'est pas contenue dans n_i''. Soit, enfin,

$$b_{n_1'''}, \; b_{n_2'''}, \; \ldots \; b_{n_i'''}, \; \ldots$$

une suite satisfaisant à la conditon

$$\sqrt[n_i''']{|b_{n_i'''}|} \leq \frac{1}{R}.$$

D'après le théorème que j'établis dans »Sur les séries etc.» on reconnait qu'il y a un ensemble de puissance continue de valeurs de φ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ telles que les séries

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n,$$

où

$$\begin{array}{lll} & a'_n = a_n & \text{pour} \quad n = n_i \\ & a'_n = b_n & \quad » \quad\;\; n = n_i''' \\ \text{et} & a'_n = c_n e^{i\varphi} & \quad » \quad\;\; n = n_i'' \end{array}$$

admettent le cercle de convergence comme coupure, et il n'y a qu'un ensemble dénombrable de valeurs de φ telles que ces séries (1) soient prolongeables en dehors du cercle de rayon R.

Si on prend deux séries (1) qui ne sont pas prolongeables, qui correspondent à deux valeurs de φ: φ_1 et φ_2, leur différence admet le cercle de convergence comme coupure, d'après le théorème Hadamard-Fabry. Pourtant elles admettent les mêmes coefficients d'ordre n_i $(i=1, 2, \ldots)$.

No. 9. Je veux faire enfin la remarque suivante: Si les conditions qui entrent dans les hypothèses des théorèmes II, III, V, VI sont vérifiées dans tout le plan, on pourrait remplacer la locution »(à une fonction de rayon d'holomorphie supérieur à R près)» par la suivante: »(à une fonction entière près)».

Si par exemple, dans le théorème V on sait que la fonction, dont les coefficients qui entrent dans le tableau (L) sont donnés, admet comme singularités dans tout le plan un ensemble réductible elle est définie à une fonction entière près.

WEITERE UNTERSUCHUNGEN ZUR THEORIE DER ALGEBRAISCHEN KÖRPER.

VON

ÖYSTEIN ORE

in KRISTIANIA.

In meiner Abhandlung »Zur Theorie der algebraischen Körper», Acta mathematica, Bd. 44[1], habe ich allgemein die Aufgabe behandelt, die Primidealzerlegung einer vorgelegten Primzahl p in einem Körper $P(\vartheta)$ zu bestimmen.

Es sei der Körper $P(\vartheta)$ durch die Gleichung

$$f(\vartheta) = 0 \tag{1}$$

bestimmt, wo

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{2}$$

eine irreduzible Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten bedeutet. Meine Aufgabe war dann, die Primidealzerlegung der Primzahl p direkt aus den arithmetischen Eigenschaften der Gleichung (2) abzuleiten und in der Weise die Dedekindschen Untersuchungen über Primideale zu verallgemeinern und zu vervollständigen. Bekanntlich versagen die Dedekindschen Methoden in dem Falle, dass die Primzahl p ein Indexteiler der natürlichen Ordnung

$$[1, \vartheta, \ldots, \vartheta^{n-1}]$$

ist. Bei meinen eben erwähnten Untersuchungen, wo ich speziell diese Primzahlen untersuche, treten gewisse Ausnahmefälle auf, wofür die Bestimmung der Primideale sich besonders schwierig gestaltet. Der Zweck der vorliegenden Ar-

[1] Acta mathematica, Bd. 44, pp. 219—314. Diese Abhandlung wird im Folgenden mit a bezeichnet.

beit ist zu zeigen, dass in jedem Körper solche Zahlen ω des Körpers existieren, dass bei der Gleichung, welcher ω genügt, solche Anomalien nicht eintreten können.

§ I.

Es sei

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{e_1} \cdot \varphi_2(x)^{e_2} \ldots \varphi_s(x)^{e_s} \pmod p \tag{3}$$

die Primfunktionzerlegung von $f(x) \pmod p$, wo die Primfunktion $\varphi_i(x)$ allgemein vom Grade m_i ist.

Dann ist immer eine Idealzerlegung

$$p = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s \tag{4}$$

möglich, wo keines der Ideale $\mathfrak{a}_i$ Einheitsideal ist. Diese Ideale sind ausserdem alle zu einander relativ prim und durch

$$\mathfrak{a}_i = (p, \varphi_i(\vartheta)^{e_i})$$

bestimmt.[1]

Um nun aus (4) die Primidealzerlegung von p zu erhalten, muss man die Ideale $\mathfrak{a}_i$ in ihre Primidealfaktoren zerlegen. Dies geschieht nun in der Weise, dass man für jeden Primfunktionteiler $\varphi_i(x)$ von $f(x) \pmod p$ eine *Entwicklung* $(p, \varphi_i(x))$ bildet.

Es sei $\varphi(x)$ eine beliebige Primfunktion, welche $\pmod p$ in $f(x)$ aufgeht, also etwa

$$f(x) \equiv \varphi(x)^e \cdot \psi(x) \pmod p, \tag{5}$$

wo

$$\psi(x) \not\equiv 0 \ (\mathrm{modd}\, p, \varphi(x))$$

ist.

Man kann nun immer $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \sum_{i=1}^{t} p^{\alpha_i} Q_i(x) \cdot \varphi(x)^i \tag{6}$$

darstellen, wo die Polynome $Q_i(x)$ höchstens vom Grade $m - 1$ sind. Wenn dann auch die Exponenten α_i so gewählt werden, dass (wenn $Q_i(x) \neq 0$ ist)

---

[1] Man sehe a. p. 265.

$$Q_i(x) \not\equiv 0 \pmod p$$

ist, wird die Summe (6) eine Entwicklung $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ genannt.

Zu den Gitterpunkten $(\alpha_i, t-i)$ kann man ein Newtonsches Polygon konstruieren, das im Punkte (0, 0) anfängt und im Punkte (t, α_t) seinen Endpunkt hat.

Wegen der Kongruenz (5) folgt, dass es in diesem Polygone gewiss Seiten gibt, welche oberhalb der X-Achse liegen müssen. Die erste Seite des Polygons wird aber im allgemeinen mit der X-Achse zusammenfallen können. Die Gesamtheit der Seiten, welche nicht mit der X-Achse zusammenfallen, bilden zusammen ein Newtonsches Polygon, das ich das *Hauptpolygon* der Entwicklung $(p, \varphi(x))$ nenne.[1]

Die Seiten des Hauptpolygons werden mit

$$S_1, S_2, \ldots S_k$$

bezeichnet, wo die Seite S_i die Projektionen l_i und h_i auf die X-Achse bzw. Y-Achse besitzt. Die Grössen l_i und h_i sind beide ganze rationale Zahlen, und es soll

$$\begin{aligned} l_i &= \varepsilon_i \,.\, \lambda_i \\ h_i &= \varepsilon_i \,.\, \varkappa_i \end{aligned} \qquad (i - 1, 2, \ldots k)$$

gesetzt werden, wo λ_i zu $\varkappa_i$ relativ prim ist.

Bezeichnet man mit $\psi_i(x)$ die Summe der Glieder in der Entwicklung $(p, \varphi(x))$, wofür die entsprechenden Punkte auf der Seite S_i liegen, so wird $\psi_i(x)$ die Form

$$\psi_i(x) = \varphi(x)^\alpha \,.\, p^\beta \,.\, (Q_\gamma(x) \,.\, \varphi(x)^{l_i} + Q_{\gamma+\lambda_i} \varphi(x)^{l_i - \lambda_i} \,.\, p^{\varkappa_i} + Q_{\gamma+2\lambda_i}(x) \,.\, \varphi(x)^{l_i - 2\lambda_i} \,.\, p^{2\varkappa_i}$$
$$+ \cdots + Q_{\gamma+\varepsilon_i \,.\, \lambda_i}(x) \,.\, p^{h_i})$$

haben, wo die Exponenten α und β gewisse ganze rationale, positive Zahlen bedeuten und ebenso γ eine ganze rationale Zahl ist.

Setzt man hier

$$R_{i,s}(x) = Q_{\gamma+s \,.\, \lambda_i}(x) \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots \varepsilon_i),$$

so ist

$$\psi_i(x) = \varphi(x)^\alpha \,.\, p^\beta \,.\, \varphi_i(x),$$

---

[1] Man sehe a. Kap. II. § 2.

wo

$$\varphi_i(x) = R_{i,0}(x) \,.\, \varphi(x)^{l_i} + R_{i,1}(x) \,.\, \varphi(x)^{l_i - \lambda_i} \,.\, p^{\varkappa_i} + \cdots + R_{i,\varepsilon_i}(x) \,.\, p^{h_i}.$$

Da nun allgemein

$$R_{i,0}(x) = R_{i-1,\varepsilon_{i-1}}(x) \not\equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)}$$

ist, kann man ein Polynom $A_i(x)$ von höchstens $(m-1)^{\text{tem}}$ Grade so bestimmen, dass

$$R_{i,0}(x) \,.\, A_i(x) \equiv 1 \pmod{p, \varphi(x)}.$$

Dann heisst das Polynom

$$f_i(x) = \varphi(x)^{l_i} + S_{i,1}(x) \,.\, \varphi(x)^{l_i - \lambda_i} \,.\, p^{\varkappa_i} + \cdots + S_{i,\varepsilon_i}(x)\, p^{h_i}, \tag{7}$$

wo

$$S_{i,s}(x) \equiv R_{i,s}(x) \,.\, A_i(x) \pmod{p, \varphi(x)},$$

der *Faktor der i^{ten} Seite* in der Entwicklung $(p, \varphi(x))$.

Das Polygon $(p, \varphi(x))$ von $f_i(x)$ ist gleich der i^{ten} Seite S_i; die Koeffizienten $S_{i,s}(x)$ kann man ausserdem $\pmod{p, \varphi(x)}$ reduziert annehmen, d. h. sie sollen höchstens vom Grade $m-1$ sein.

Wenn nun zwei Polynome $g(x)$ und $h(x)$ dasselbe geradlinige Polygon L besitzen, so sagt man

$$g(x) \equiv h(x) \pmod{L},$$

wenn in der Differenz $g(x) - h(x)$ alle repräsentierenden Punkte oberhalb L liegen.

Den Faktor der i^{ten} Seite kann man dann eindeutig in Primfaktoren $(\text{mod } S_i)$ zerlegen, so dass man

$$f_i(x) \equiv f_1^{(i)}(x) \,.\, f_2^{(i)}(x) \ldots f_{t_i}^{(i)}(x) \pmod{S_i} \tag{8}$$

hat, wo

$$f_j^{(i)}(x) = \varphi(x)^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \lambda_i} + S_{j,1}^{(i)}(x) \,.\, p^{\varkappa_i} \,.\, \varphi(x)^{\left(\varepsilon_j^{(i)} - 1\right)\lambda_i} + \cdots + S_{j,\varepsilon_j^{(i)}}^{(i)}(x) \,.\, p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \varkappa_i} \tag{9}$$

ein Polynom bedeutet, wofür das Polygon $(p, \varphi(x))$ eine Gerade mit der Neigung $\dfrac{\varkappa_i}{\lambda_i}$ ist, und ausserdem soll $f_j^{(i)}(x)$ $(\text{mod } S_i)$ *irreduzibel* sein, womit man bezeichnet, dass $f_j^{(i)}(x)$ nicht kongruent dem Produkte zweier Polynome sein kann, welche geradlinige Polygone von der Neigung $\dfrac{\varkappa_i}{\lambda_i}$ besitzen.

Setzt man

$$y = \frac{\varphi(x)^{\lambda_i}}{p^{\varkappa_i}},$$

so folgt aus (7)

$$\frac{f_i(x)}{p^{h_i}} = y^{\varepsilon_i} + S_{i,1}(x)\, y^{\varepsilon_i - 1} + \cdots + S_{i,\varepsilon_i}(x) = F_i(x, y).$$

Wenn dann $f_i(x)$ die Zerlegung (8) (mod S_i) besitzt, besteht auch eine Zerlegung

$$F_i(x, y) \equiv \psi_1^{(i)}(x, y) \,.\, \psi_2^{(i)}(x, y) \ldots \psi_{l_i}^{(i)}(x, y) \; (\text{modd}\, p, \varphi(x)),$$

wo y als unabhängige Variable betrachtet wird. Hier ist $\psi_j^{(i)}(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) irreduzibel und ausserdem

$$\frac{f_j^{(i)}(x)}{p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \varkappa_i}} = \psi_j^{(i)}\left(x, \frac{\varphi(x)^{\lambda_i}}{p^{\varkappa_i}}\right).$$

Die Primfunktionzerlegungen (8) der Faktoren der Seiten spielen nun für die Primidealzerlegung von p im Körper $P(\vartheta)$ eine sehr wichtige Rolle, indem man nämlich folgendes beweisen kann:

Wenn die Primfunktionzerlegung von $f(x)$ (mod p) durch (3) gegeben ist, so war, wie früher bemerkt,

$$p = \mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s$$

mit $\mathfrak{a}_i = (p, \varphi_i(\vartheta)^{e_i})$.

Um nun ein Ideal $\mathfrak{a} = (p, \varphi(\vartheta)^e)$ weiter zu zerlegen, bestimmt man für die Primfunktion $\varphi(x)$ die Entwicklung $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$. Dann ist mit den früheren Bezeichnungen

$$\mathfrak{a} = P_1^{\lambda_1} \,.\, P_2^{\lambda_2} \ldots P_k^{\lambda_k},$$

wo keines der Ideale P_i das Einheitsideal ist und diese Ideale ausserdem alle zu einander relativ prim sind.

Die Primfunktionzerlegung von $f_i(x)$ (mod S_i) sei nun durch (8) gegeben, wo erstens vorausgesetzt werde, dass alle Primfunktionen $f_j^{(i)}(x)$ von einander verschieden seien. Wenn dies für alle Polygone $(p, \varphi(x))$ und alle Seiten S_i dieser Polygone der Fall ist, so hat das Ideal P_i die Primidealzerlegung

$$P_i = \mathfrak{p}_1^{(i)} \cdot \mathfrak{p}_2^{(i)} \cdots \mathfrak{p}_{t_i}^{(i)},$$

wo das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ den Grad $\varepsilon_j^{(i)} \cdot m$ hat, also $N\mathfrak{p}_j^{(i)} = p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot m}$ ist.

Wenn zweitens nicht alle Primfunktionen in (8) verschieden sind, also etwa

$$f_i(x) \equiv f_1^{(i)}(x)^{e_1^{(i)}} \cdot f_2^{(i)}(x)^{e_2^{(i)}} \cdots f_{t_i}^{(i)}(x)^{e_{t_i}^{(i)}} \pmod{S_i},$$

so ist auch

$$P_i = P_1^{(i)} \cdot P_2^{(i)} \cdots P_{t_i}^{(i)}$$

eine Idealzerlegung von P_i, wo keines der Ideale $P_j^{(i)}$ das Einheitsideal ist und diese Ideale alle zu einander relativ prim sind, sie brauchen aber nicht Primideale zu sein.

In meiner oben zitierten Arbeit (a) habe ich auch Ausdrücke für die Primideale $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ und im allgemeineren Falle für die Ideale $P_j^{(i)}$ als grösste gemeinsame Faktoren für Hauptideale angegeben. Die Primidealzerlegung der Primzahl p kann daher vollständig bestimmt werden, wenn man nur eine ganze primitive Zahl θ des Körpers bestimmen kann, so dass in der Gleichung, welcher θ genügt, für alle Seiten der Polygone $(p, \varphi(x))$ die entsprechenden Faktoren der Seiten keine mehrfache Primfunktionen besitzen.

Es sei $f(x) = 0$ die Gleichung, welcher eine ganze Zahl des Körpers genügt. Diese Gleichung soll im Folgenden *regulär in Bezug auf die Primzahl p* heissen, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) $f(x)$ soll irreduzibel und vom Grade n sein.
2) Wenn $\varphi(x)$ eine Primfunktion $(\mathrm{mod}\, p)$ ist, welche $(\mathrm{mod}\, p)$ in $f(x)$ aufgeht, so sollen in dem Hauptpolygone $(p, \varphi(x))$ die Faktoren der Seiten S_i nie mehrfache Primfunktionteiler $(\mathrm{mod}\, S_i)$ besitzen.

Die Bestimmung der Primidealzerlegung der Primzahl p ist demnach auf die Bestimmung einer regulären Gleichung in Bezug auf p zurückgeführt. Es soll im Folgenden nachgewiesen werden, dass *es in jedem Körper und für jede Primzahl reguläre Gleichungen gibt.*

Weiter soll bewiesen werden, dass man diese regulären Gleichungen von einer speziellen Form annehmen darf.

§ 2.

Es sei in $P(\vartheta)$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{e_r} \tag{10}$$

die Primidealzerlegung der Primzahl p, wo allgemein

$$N\mathfrak{p}_i = p^{m_i}$$

und folglich

$$e_1 m_1 + \cdots + e_r m_r = n. \tag{11}$$

Ich setze nun zunächst

$$p = \mathfrak{p}^e \cdot P, \tag{12}$$

wo das Ideal P nicht durch das Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar ist; weiter wird

$$N\mathfrak{p} = p^m \tag{13}$$

angenommen.

Dann genügen alle ganze Zahlen λ des Körpers der Kongruenz

$$\lambda^{p^m} - \lambda \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{14}$$

und da es nach (13) p^m inkongruente Zahlen (mod $\mathfrak{p}$) gibt, so hat die Kongruenz (14) ebenso viele Wurzeln wie der Grad p^m der Kongruenz. Weiter ist aber auch

$$x^{p^m} - x \pmod{p}$$

kongruent dem Produkte aller Primfunktionen (mod p), deren Grade Teiler von m sind. Wenn daher $\varphi(x)$ eine beliebige Primfunktion m^{ten} Grades bedeutet, so ist folglich

$$x^{p^m} - x \equiv \varphi(x) \cdot \Phi(x) \pmod{p},$$

wo $\Phi(x)$ ein Polynom vom Grade $p^m - m$ bedeutet.

Nach (14) ergibt sich dann auch

$$\varphi(\lambda) \cdot \Phi(\lambda) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

für jede ganze Zahl des Körpers. Da aber eine Kongruenz nicht mehr inkongruente Lösungen besitzen kann, als ihr Grad angibt, so zeigt dies, dass es m ganze, für den Modul $\mathfrak{p}$ inkongruente Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$$

des Körpers gibt, so dass

$$\varphi(\alpha_i) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Es sei nun α eine beliebige dieser Zahlen. Wenn dann $\beta = R(\alpha)$ eine ganze Zahl des Körpers ist und $R(\alpha)$ ein Polynom in α, so kann β nur dann durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein, wenn

$$R(x) \equiv 0 \,(\mathrm{modd}\; p, \varphi(x)).$$

Sonst könnte man nämlich die Polynome $A(x)$ und $B(x)$ so bestimmen, dass

$$A(x) \,.\, \varphi(x) + B(x) \,.\, R(x) \equiv 1 \pmod{p},$$

woraus für $x = \alpha$

$$B(\alpha) \,.\, R(\alpha) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$$

folgt.

Die Zahl α war also eine Lösung der Kongruenz

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass man dann aus α immer eine Lösung α_h der Kongruenz

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^h} \tag{15}$$

herleiten kann, derart dass

$$\alpha_h \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{16}$$

Es wird angenommen, dass dies für alle Exponenten bis $h-1$ bewiesen worden sei; dann soll gezeigt werden, dass, wenn α_{h-1} eine Wurzel der Kongruenz

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{h-1}} \tag{17}$$

mit $\alpha_{h-1} \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}}$ ist, man daraus eine Wurzel α_h von (15) berechnen kann, wofür (16) gilt.

Ich beweise zunächst, dass

$$\varphi'(\alpha_{h-1}) \equiv \varphi'(\alpha) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist. Dies folgt leicht daraus, dass eine Primfunktion (mod p) immer (mod p) zu ihrer Derivierten relativ prim ist. Man kann nämlich dann die Polynome $A(x)$ und $B(x)$ so bestimmen, dass

$$A(x) \,.\, \varphi(x) + B(x) \,.\, \varphi'(x) \equiv 1 \pmod{p},$$

und für $x=\alpha$ folgt daraus

$$B(\alpha)\,.\,\varphi'(\alpha)\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}},$$

d. h. $\varphi'(\alpha)$ kann nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein.

Dies zeigt, dass man die Kongruenz

$$(18) \qquad \varphi(\alpha_{h-1})+\gamma\,.\,\varphi'(\alpha_{h-1})\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^h}$$

immer lösen kann, und da $\varphi(\alpha_{h-1})$ nach (17) durch $\mathfrak{p}^{h-1}$ teilbar ist, muss auch die Wurzel γ der Kongruenz (18) mindestens durch $\mathfrak{p}^{h-1}$ teilbar sein.

Die ganze Zahl

$$\alpha_h=\alpha_{h-1}+\gamma$$

ist dann eine Wurzel der Kongruenz (15). Man hat nämlich

$$(19) \qquad \varphi(\alpha_{h-1}+\gamma)=\varphi(\alpha_{h-1})+\gamma\,\varphi'(\alpha_{h-1})+\frac{\gamma^2}{2!}\varphi''(\alpha_{h-1})+\,\ldots\,.$$

Hier sind die Zahlen

$$\frac{\varphi''(\alpha_{h-1})}{2!},\ \frac{\varphi'''(\alpha_{h-1})}{3!},\ \ldots\,.$$

wie man leicht einsieht, alle ganz, und da γ^2 durch $\mathfrak{p}^{2h-2}$ teilbar ist, sind die Glieder

$$\frac{\gamma^2}{2!}\varphi''(\alpha_{h-1}),\ \frac{\gamma^3}{3!}\varphi'''(\alpha_{h-1}),\ \ldots$$

sicher durch $\mathfrak{p}^h$ $(h\geqq 2)$ teilbar. Es ist daher nach (19) und (18)

$$\varphi(\alpha_h)\equiv\varphi(\alpha_{h-1}+\gamma)\equiv\varphi(\alpha_{h-1})+\lambda\cdot\varphi'(\alpha_{h-1})\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^h}.$$

Weiter ist

$$\alpha_h\equiv\alpha_{h-1}\equiv\alpha \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Es ist folglich bewiesen, dass man immer eine ganze Zahl α des Körpers bestimmen kann, so dass $\varphi(\alpha)$ durch $\mathfrak{p}^h$ teilbar wird, wobei h beliebig angenommen werden kann.

Diese Zahl α kann man aber auch so wählen, dass für ein gegebenes h die Zahl $\varphi(\alpha)$ genau durch $\mathfrak{p}^h$, d. h. durch $\mathfrak{p}^h$ aber nicht durch $\mathfrak{p}^{h+1}$ teilbar wird.

Wenn dies nämlich für α nicht der Fall ist, so muss $\varphi(\alpha)\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{h+1}}$ sein. Man setzt dann $\alpha_1=\alpha+\beta$, wo die ganze Zahl β genau durch $\mathfrak{p}^h$ teilbar ist, und so folgt

$$\varphi(\alpha_1)=\varphi(\alpha)+\beta\cdot\varphi'(\alpha)+\beta^2\frac{\varphi''(\alpha)}{2!}+\cdots$$

woraus

$$\varphi(\alpha_1)\equiv\beta\cdot\varphi'(\alpha)\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{h+1}}.$$

Es seien nun

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_s$$

diejenigen Primidealteiler von p, deren Grade gleich m sind, wofür also $N\beta_i=p^m$. Weiter soll p durch $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ teilbar sein. Den Zahlen

$$e_1,\ e_2, \ldots e_s$$

kann man dann eine andere Reihe von positiven, ganzen rationalen Zahlen

$$h_1,\ h_2, \ldots h_s$$

so zuordnen, dass allgemein h_i zu e_i relativ prim ist.

Nach den eben durchgeführten Hilfsuntersuchungen kann man nun, wenn $\varphi(x)$ eine beliebige Primfunktion (mod p) vom Grade m bedeutet, die Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_s$$

so bestimmen, dass

$$\varphi(\alpha_i)\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i} \qquad (i=1, 2, \ldots s)$$

und weiter auch so, dass

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\alpha_i)&\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i^{h_i}}\\ \varphi(\alpha_i)&\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{h_i+1}}\end{aligned}\right\} \qquad (i=1, 2, \ldots s) \tag{20}$$

Die ganze rationale Zahl h wird nun beliebig fest angenommen, jedoch so, dass h grösser als alle h_i ist. Dann sind die Kongruenzen

$$\vartheta\equiv\alpha_i \pmod{\mathfrak{p}_i^{h}} \qquad (i=1, 2, \ldots s)$$

immer lösbar, und da

$$\varphi(\vartheta)\equiv\varphi(\alpha_i) \pmod{\mathfrak{p}_i^{h}} \qquad (i=1, 2, \ldots s),$$

so folgt wegen (20), dass auch

$$\begin{aligned} \varphi(\vartheta) &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i^{h_i}} \\ \varphi(\vartheta) &\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i^{h_i+1}} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

ist.

§ 3.

Ich schreibe nun die Primidealzerlegung (10) von p in der Form

$$p = \mathfrak{a}_{m_1} \cdot \mathfrak{a}_{m_2} \cdots \mathfrak{a}_{m_s},$$

wo das Ideal $\mathfrak{a}_{m_i}$ die Primidealzerlegung

$$\mathfrak{a}_{m_i} = \mathfrak{p}_{1, m_i}^{e_{1, m_i}} \cdot \mathfrak{p}_{2, m_i}^{e_{2, m_i}} \cdots \mathfrak{p}_{r_i, m_i}^{e_{r_i, m_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots s) \tag{21}$$

besitzt, wo alle Primideale $\mathfrak{p}_{j, m_i}$ den Grad m_i haben.

Zu den Zahlen

$$e_{1, m_i},\ e_{2, m_i}, \ldots, e_{r_i, m_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

kann man eine andere Reihe von positiven, ganzen rationalen Zahlen

$$h_{1, m_i}, h_{2, m_i}, \ldots h_{r_i, m_i}$$

so bestimmen, dass immer h_{j, m_i} zu e_{j, m_i} relativ prim ist und ausserdem

$$\frac{h_{1, m_i}}{e_{1, m_i}} < \frac{h_{2, m_i}}{e_{2, m_i}} < \cdots < \frac{h_{r_i, m_i}}{e_{r_i, m_i}}, \tag{22}$$

was offenbar immer möglich ist.

Es sei nun

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots \varphi_s(x)$$

eine Reihe von Primfunktionen (mod p) derart, dass $\varphi_i(x)$ vom Grade m_i ist. Nach § 2 ist es dann immer möglich, ganze Zahlen des Körpers

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_s$$

so zu bestimmen, dass

$$\varphi_i(\vartheta_i) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \mathfrak{p}_{j, m_i}^{h_{j, m_i}}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots r_i)\ (i = 1, 2, \ldots s),$$

aber auch

$$\varphi_i(\vartheta_i) \not\equiv 0 \left(\bmod\ \mathfrak{p}_{j, m_i}^{h_{j, m_i}+1}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots r_i)\ (i = 1, 2, \ldots s).$$

Die Zahl H wird nun grösser als alle Zahlen

$$h_{j, m_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots r_i)\ (i = 1, 2, \ldots s)$$

gewählt. Da dann die Ideale

$$A_i = (\mathfrak{p}_{1, m_i}\, \mathfrak{p}_{2, m_i} \ldots \mathfrak{p}_{r_i, m_i})^H \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

alle zu einander relativ prim sind, so sind die Kongruenzen

$$\theta \equiv \vartheta_i \ (\bmod\ A_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

sicher auflösbar. Für die ganze Zahl θ hat man dann

$$\varphi_i(\theta) \equiv \varphi_i(\vartheta_i) \ (\bmod\ A_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots s),$$

und folglich ist die Zahl

$$\varphi_i(\theta) \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

durch die Ideale

$$\mathfrak{p}_{j, m_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots r_i)$$

genau in der Potenz h_{j, m_i} teilbar.

Es wird nun die Gleichung

$$F(x) = 0$$

gebildet, welcher die in dieser Weise bestimmte Zahl θ genügt, und *es soll gezeigt werden, dass diese Gleichung eine reguläre Gleichung in Bezug auf die Primzahl p sein muss.*

Die Primfunktionzerlegung von $F(x)$ sei durch

$$F(x) \equiv \Psi_1(x)^{a_1} \cdot \Psi_2(x)^{a_2} \ldots \Psi_t(x)^{a_t} \ (\bmod\ p)$$

gegeben. Man kann dann zunächst zeigen, dass unter den Primfunktionen $\Psi_i(x)$ alle Primfunktionen $\varphi_i(x)$ vorkommen müssen. Es ist nämlich

$$\Psi_1(\theta)^{a_1} \cdot \Psi_2(\theta)^{a_2} \ldots \Psi_t(\theta)^{a_t} \equiv 0 \ (\bmod\ p)$$

und folglich das Produkt

$$\Pi(\theta) = \Psi_1(\theta) \,.\, \Psi_2(\theta) \ldots \Psi_t(\theta)$$

durch alle Primidealteiler von p teilbar. Nun kann aber eine Zahl $\Pi(\theta)$ nur dann durch den Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von p teilbar sein, wenn

$$\Pi(x) \equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)},$$

wo $\varphi(x)$ die Primfunktion (mod p) ist, wofür $\varphi(\theta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Daher muss $\Pi(x) \pmod{p}$ durch alle Primfunktionen $\varphi_i(x)$ teilbar sein.

Man kann darum

$$F(x) \equiv \varphi_1(x)^{a_1} \,.\, \varphi_2(x)^{a_2} \ldots \varphi_s(x)^{a_s} \,.\, Q(x) \pmod{p}, \tag{23}$$

schreiben, wo $Q(x)$ ein Polynom ist, das durch keine der Primfunktionen $\varphi_i(x)$ (mod p) teilbar ist. Weiter sind alle a_i grösser als Null.

Man bilde dann die Polygone $(p, \varphi_i(x))$ für $F(x)$. Da nun $\varphi_i(\theta)$ durch $\mathfrak{p}_{j,m_i}^{h_{j,m_i}}$ teilbar ist, folgt nach Satz 26 (a), dass es in dem Hauptpolygone $(p, \varphi_i(x))$ sicher eine Seite mit der Neigungszahl

$$\frac{h_{j,m_i}}{e_{j,m_i}} \qquad (j = 1, 2, \ldots r_i) \tag{24}$$

gibt. Da weiter h_{j,m_i} zu e_{j,m_i} relativ prim ist, muss diese Seite eine Projektion auf die X-Achse besitzen, deren Länge ein Multiplum von e_{j,m_i} ist, also etwa $\varepsilon_{j,m_i} \,.\, e_{j,m_i}$. Da weiter keine andere Neigungszahlen als (24) vorkommen können, da sonst $\varphi_i(\theta)$ nach dem eben zitierten Satze auch durch andere Primidealteiler von p als

$$\mathfrak{p}_{1,m_i}, \mathfrak{p}_{2,m_i} \ldots \mathfrak{p}_{r_i,m_i}$$

teilbar würde, so muss nach (23) die Gesamtprojektion des Hauptpolygones $(p, \varphi_i(x))$ auf die X-Achse gleich a_i sein, folglich

$$\sum_{j=1}^{r_i} \varepsilon_{j,m_i}\, e_{j,m_i} = a_i,$$

und daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{s} a_i \,.\, m_i = \sum_{i=1}^{s} m_i \sum_{j=1}^{r_i} \varepsilon_{j,m_i} \,.\, e_{j,m_i} \,. \tag{25}$$

Wenn nun $F(x)$ den Grad N hat und q den Grad von $Q(x)$ bedeutet, so ist nach (23)

$$N=q+\sum_{i=1}^{s} a_i m_i,$$

und die Gleichung (25) ergibt dann

$$N=q+\sum_{i=1}^{s} m_i \sum_{j=1}^{r_i} \varepsilon_{j,m_i} \cdot e_{j,m_i}. \tag{26}$$

Da aber nach (21)

$$N(\mathfrak{a}_i)=p^{m_i \sum\limits_{j=1}^{r_i} e_{j,m_i}},$$

so ist

$$N(p)=p^{\sum\limits_{i=1}^{s} m_i \sum\limits_{j=1}^{r_i} e_{j,m_i}},$$

also

$$n=\sum_{i=1}^{s} m_i \sum_{j=1}^{r_i} e_{j,m_i}$$

und folglich, da $\varepsilon_{j,m_i} \geqq 1$,

$$\sum_{j=1}^{s} m_i \sum_{j=1}^{r_i} \varepsilon_{j,m_i} \cdot e_{j,m_i} \geqq \sum_{i=1}^{s} m_i \sum_{j=1}^{r_i} e_{j,m_i}=n,$$

wo das Gleichheitszeichen nur dann richtig ist, wenn alle $\varepsilon_{j,m_i}=1$ sind. Dann ergibt sich aus (26)

$$N \geqq q+n,$$

und da $N \leqq n$ vorausgesetzt werden kann, erhält man $q=0$ und

$$\sum_{j=1}^{s} m_i \sum_{j=1}^{r_i} \varepsilon_{j,m_i} \cdot e_{j,m_i}=n,$$

also alle $\varepsilon_{j,m_i}=1$. *$F(x)$ wird also irreduzibel und vom Grade n.*

Aus $q=0$ folgt $Q(x)=1$ und daher

$$F(x) \equiv \varphi_1(x)^{a_1} \cdot \varphi_2(x)^{a_2} \ldots \varphi_s(x)^{a_s} \pmod{p}.$$

Da immer $\varepsilon_{j, m_i} = 1$ ist, wird weiter das Polygon $(p, \varphi_i(x))$ aus r_i Seiten bestehen, welche die Projektionen

$$e_{1, m_i},\ e_{2, m_i}, \ldots e_{r_i, m_i}$$

auf die X-Achse besitzen, während die Projektionen auf die Y-Achse gleich

$$h_{1, m_i},\ h_{2, m_i}, \ldots h_{r_i, m_i}$$

sind. Da e_{j, m_i} zu h_{j, m_i} relativ prim ist, werden die Faktoren aller Seiten sicher für diese Seiten irreduzibel, und können daher keine mehrfachen Primfunktionen für diese Seiten enthalten.

Die Gleichung $F(x) = 0$ ist folglich regulär in Bezug auf p.

Man sieht weiter ein, dass man immer eine solche reguläre Gleichung des Körpers bestimmen kann, dass die Faktoren der Seiten alle irreduzibel sind. Wenn eine Seite die Neigungszahl $\frac{\varkappa}{\lambda}$ hat, so kann man die reguläre Gleichung auch so wählen, dass der Faktor dieser Seite von der Form

$$\varphi^{\lambda}(x) + Q(x) \cdot p^{\varkappa}$$

wird, wo $Q(x)$ ein Polynom von höchstens $(m-1)^{\text{tem}}$ Grade ist.

§ 4.

Man kann folglich immer für die Untersuchung eines algebraischen Körpers eine reguläre Gleichung in Bezug auf die Primzahl p zu Grunde legen, und in diesem Falle gestaltet sich die Bestimmung der Eigenschaften der Primzahl p besonders einfach.

Wenn die Primfunktionzerlegung der regulären Gleichung $f(x) = 0$ durch (3) gegeben ist, so gibt (4) eine Idealzerlegung von p an. Wenn weiter durch (8) die Primfunktionzerlegung des Faktors der i^{ten} Seite in der Entwicklung $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ gegeben ist, so hat das Ideal $\mathfrak{a}$ die Primidealzerlegung

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{p}_1^{(1)} \cdot \mathfrak{p}_2^{(1)} \cdot\cdot \mathfrak{p}_{t_1}^{(1)})^{\lambda_1} \cdot (\mathfrak{p}_1^{(2)} \cdot\cdot \mathfrak{p}_{t_2}^{(2)})^{\lambda_2} \cdots (\mathfrak{p}_1^{(k)} \cdot\cdot \mathfrak{p}_{t_k}^{(k)})^{\lambda_k},$$

wo der Grad des Primideals $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ gleich $m \cdot \varepsilon_j^{(i)}$ ist.

Durch das Dedekindsche Kriterium[4] kann man immer bestimmen, wann eine

[4] DEDEKIND, R.: Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen. Göttinger Abhandlungen. 1878. § 2.

vorgelegte Primzahl p ein Teiler der Körperdiskriminante, aber kein Teiler des Index ist. Unter Anwendung von Polygonen kann man das Dedekindsche Kriterium folgendermassen aussprechen:

A. Die Primzahl p ist ein Teiler der Körperdiskriminante, aber kein Teiler des Index dann und nur dann, wenn alle Polygone $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ geradlinig sind und für diese Geraden entweder $h_1 = 1$ oder $l_1 = 1$ ist.

Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ in Bezug auf p regulär ist, kann man auch ein einfaches Kriterium für Indexteiler angeben. Soll nämlich p ein Teiler des Index, aber kein Teiler der Körperdiskriminante sein, so kann in der Primidealzerlegung von p kein Primidealteiler mehrfach vorkommen. Folglich müssen alle λ_i gleich 1 sein, und daher sind alle Neigungszahlen $\frac{h_i}{l_i}$ ganz.

Man kann daher den folgenden Satz aussprechen:

B. Wenn $f(x) = 0$ eine reguläre Gleichung in Bezug auf p ist, so ist die Primzahl p dann und nur dann ein Teiler des Index, aber kein Teiler der Körperdiskriminante, wenn in sämtlichen Polygonen $(p, \varphi(x))$ alle Neigungszahlen $\frac{h_i}{l_i}$ ganz sind.

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass in der Primfunktionzerlegung (3) von $f(x)$ mehrfache Primfunktionfaktoren (mod p) vorkommen, d. h. dass die Primzahl p ein Teiler der Diskriminante der Gleichung $f(x) = 0$ ist.

Wenn $f(x)$ nicht regulär ist, so ist die Ganzzahligkeit aller Neigungszahlen $\frac{h_i}{l_i}$ zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung dafür, dass p ein Teiler des Index, aber kein Teiler der Körperdiskriminante ist.

Wenn $f(x)$ regulär und die Primzahl p ein Teiler der Diskriminante von $f(x)$ ist, und keiner der Fälle A oder B eintritt, so ist die Primzahl p ein gemeinsamer Teiler des Index und der Körperdiskriminante.

NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES.

PAR

PAUL APPELL

à PARIS.

La Notice publiée par Lebon chez Gauthier-Villars, en 1910, dans la collection *Savants du Jour*, donne un exposé méthodique et complet tant de ma biographie que de mes écrits jusqu'à la date de l'ouvrage. On y trouvera à la Section II, relative à l'Analyse mathématique, la reproduction du Rapport d'Hermite sur mon mémoire couronné des Acta; à la Section III relative à la Géométrie un extrait du rapport de Gaston Darboux sur mon *Mémoire sur les Déblais et Remblais;* à la Section IV relative à la Mécanique et à la Physique mathématique une analyse des trois premiers volumes de mon Traité de mécanique rationnelle, auxquels vient s'ajouter après la Guerre un quatrième volume sur les figures d'équilibre relatif d'une masse liquide soumise à l'attraction newtonienne de ses particules et tournant autour d'un axe de direction fixe passant par son centre de gravité, ce mouvement étant d'ailleurs le seul possible, même pour une masse hétérogène, comme je l'ai montré dans une Note insérée aux Comptes rendus de la Séance de l'Académie du 21 juillet 1924 complétée par un article qui paraîtra dans les Acta; enfin dans les sections V et VI des publications relatives à l'Histoire des Sciences, à l'Education et à l'Enseignément. La collection Lebon renferme d'ailleurs, en citant les seuls mathématiciens, des notices sur MM. Henri Poincaré, Gaston Darboux, Emile Picard.

Pour répondre au désir de mon confrère M. Mittag-Leffler, je vais exposer les principales questions que j'ai étudiées, en donnant les indications indispensables pour que cet exposé ne soit pas une simple nomenclature, faisant double emploi avec les notices précédentes.

21—2454. *Acta mathematica.* 45. Imprimé le 27 avril 1925.

La plupart de mes premiers Mémoires se rapportent à l'Analyse infinitésimale et à la Géométrie: j'ai été ensuite amené, par mes fonctions de Professeur de mécanique à la Sorbonne, à m'occuper de Mécanique rationnelle. J'ai toujours eu peu de gout pour le développement des théories générales et j'ai plutôt recherché les questions précises et limitées pouvant ouvrir des voies nouvelles. Faut-il approuver ou critiquer cette disposition d'esprit à traiter de préférence un cas particulier simple et a en laisser de côté la généralisation? Quoiqu'il en soit, on reconnaîtra, dans ce qui suit, bien des exemples de cette tendance. Il en est résulté que je me suis occupé de sujets variés qu'il est parfois difficile de ramener à un même point de vue. J'exposerai d'abord les travaux d'Analyse, puis ceux de Géométrie, enfin ceux de Mécanique. Il m'arrivera de citer des noms de mathématiciens qui ont traité ou continué certaines théories. Mais que les auteurs non cités me pardonnent; je ne puis faire de cet exposé une histoire des questions qui sont traitées.

Analyse mathématique.

En analyse, je me suis occupé de la théorie générale des fonctions d'une variable complexe, en particulier des fonctions uniformes sur une surface de Riemann avec ou sans coupures, des applications à quelques fonctions particulières telles que les fonctions elliptiques, les fonctions eulériennes et analogues, les fonctions périodiques générales, puis de la théorie des équations différentielles tant au point de vue des propriétés des intégrales que de la formation et de la signification des invariants; j'ai donné les premiers exemples de la détermination d'une singularité d'une fonction d'après son développement en série entière; enfin j'ai étudié quelques développements en série particuliers conduisant à des suites de polynomes dont l'une a servi de base à d'importants travaux de M. Pincherle.

Dans leurs recherches sur les polynomes électrosphériques, MM. Guillet et Aubert[1] ont rencontré des séries procédant suivant les inverses de polynomes donnés. Je me suis proposé d'étudier, d'une façon générale, ce genre de développements dans divers articles.

[1] *Comptes rendus*, t. 155, 1912, p. 139, 204, 708, 820.

Je me suis attaché à franchir, sur certains points, le passage difficile entre la théorie des fonctions d'une variable et celle des fonctions de deux ou plusieurs variables; c'est à cet ordre d'idées qu'il faut rapporter la découverte des fonctions hypergéométrique de deux variables et des équations aux dérivées partielles correspondantes, l'étude des polynomes qui s'y rattachent et leur application au calcul approché des intégrales doubles; la théorie des fonctions méromorphes quadruplement périodiques de deux variables et leur expression directe par des quotients de fonctions Θ; la théorie des fonctions méromorphes de deux variables à trois ou deux paires de périodes; l'étude des fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce avec des singularités essentielles; la détermination des coefficients des développements des fonctions abéliennes en séries trigonométriques par des intégrales de fonctions à multiplicateur; l'indication d'une méthode pour poser le problème de l'inversion des intégrales doubles; l'étude des fonctions harmoniques de trois variables réelles, la classification de leurs singularités, l'extension du théorème de M. Mittag-Leffler à ces fonctions; l'application des théorèmes généraux aux fonctions harmoniques admettant un, deux ou trois groupes de périodes; les développements en séries trigonométriques de ces dernières fonctions dont les applications sont nombreuses en physique mathématique; la généralisation des polynomes d'Hermite et de Didon; la définition des polynomes de Bernoulli à deux variables et enfin l'introduction des fonctions de Bessel à plusieurs variables. Ces méthodes et ces résultats quoique exposés pour des fonctions de deux ou trois variables peuvent être étendus à des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Entrons maintenant dans quelques détails.

Théorie des fonctions d'une variable.

Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. — Le théorème de Cauchy donne le développement en série entière d'une fonction holomorphe dans l'intérieur d'un cercle; celui de Laurent, le développement d'une fonction holomorphe dans l'aire comprise entre deux circonférences concentriques. Je considère (15, 16, 17)[1], d'une manière générale, une aire S limitée par des arcs de cercle tournant tous leurs convexités vers

[1] Les numéros placés entre parenthèses correspondent à la table bibliographique placée à la fin de cette Notice.

l'intérieur de l'aire, et ayant pour centres respectifs les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et je démontre que toute fonction $f(x)$ *holomorphe dans cette aire* est développable en une série de la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{(x-a_k)^\nu}$$

convergente en tous les points de l'aire. Mais cette série a, de plus, la propriété suivante: elle converge encore en tous les points de l'aire indéfinie située à l'*extérieur de tous les cercles, et sa somme est alors égale à zéro.* Voilà donc un développement qui est convergent en deux parties du plan séparées l'une de l'autre, et qui, dans une des parties, a pour somme $f(x)$ et dans l'autre zéro. C'est Weierstrass qui a signalé le premier ce fait singulier sur un exemple qui se présente dans la théorie des fonctions elliptiques; après lui, Tannery en a donné un exemple beaucoup plus simple. On voit que notre méthode, trés générale, permet de représenter toute fonction analytique uniforme par un développement de ce genre, dans une aire choisie convenablement. Par exemple, la série (17)

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n\, 2^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{1}{(1-x)^n} + \frac{1}{(1+ix)^n} + \frac{1}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-ix)^n}\right]$$

a pour somme 1 dans une partie du plan et zéro dans l'autre. On conclut de là un moyen de former une série de fractions rationnelles, convergente dans plusieurs aires séparées, et représentant une fonction $f_1(x)$ dans une des aires, une autre fonction $f_2(x)$ dans une autre des aires, et ainsi de suite, de sorte que, dans chacune des aires, la série représente une fonction différente. On peut faire (18), sur les développements de ce genre, cette remarque que, *si les cercles limitant l'aire S n'ont aucun point commun, le développement en série, par notre méthode, n'est possible que d'une manière;* c'est ce qui arrive dans les théorèmes de Cauchy et Laurent; *si*, au contraire, *deux ou plusieurs de ces cercles se coupent ou seulement se touchent, le développement est possible d'une infinité de manières.* Par exemple, si le cercle de centre a_1 a un point commun avec un autre cercle limite, on peut prendre arbitrairement certains des coefficients correspondants en nombre aussi grand qu'on le veut.

Il est possible de généraliser considérablement ces résultats et de former le développement d'une fonction $f(x)$, holomorphe dans l'aire S limitée par des arcs

de cercles de centres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en série de la forme

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{d^\nu \psi(a_k - x)}{d x^\nu},$$

où $\psi(x)$ désigne une fonction uniforme donnée qui a pour pôle simple le point $x=0$, et qui possède d'autres pôles quelconques en nombre fini ou infini. En général, ce développement est encore convergent dans des aires autres que S, et représente dans ces aires des fonctions entièrement différentes de $f(x)$: j'examine les divers cas qui peuvent se présenter, et dont la discussion ne saurait trouver place ici. Je me borne à dire que des cas particuliers dignes d'intérêt sont ceux qui consistent à prendre pour $\psi(x)$ la fonction $\cot x$ ou $Z(x) = \dfrac{H'(x)}{H(x)}$.

J'ai formé par un procédé analogue des développements en série, propres à représenter une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs d'ellipse et, comme cas limite, par des segments de droites. J'en conclus une forme de développement en série pouvant représenter, *pour toutes les valeurs de la variable*, l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont uniformes et ont un nombre fini de points singuliers; car cette intégrale est holomorphe à l'extérieur d'un contour fermé infiniment rapproché de la ligne brisée obtenue en joignant par des droites les points singuliers dans un ordre quelconque.

Fonctions d'un point analytique. — Le célèbre Mémoire de Weierstrass sur les fonctions analytiques uniformes (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1876) a été le point de départ d'un grand nombre de travaux sur la théorie des fonctions.

Je me suis proposé (2, 3) de traiter, suivant les idées de Weierstrass, la théorie des fonctions *uniformes d'un point analytique:* voici ce que l'on entend par cette dénomination. Soit $F(x, y)=0$ une équation algébrique irréductible représentant une courbe d'ordre m et de genre p; on appelle *point analytique* (x, y) le système des deux nombres formé par une valeur quelconque attribuée à x et par une des m valeurs correspondantes de y. Une fonction de la variable x sera dite *fonction uniforme du point analytique* (x, y) *si cette fonction n'a qu'une valeur en chaque point* (x, y); telle serait, par exemple, une fonction rationnelle de x et y. Si l'on convient, avec Riemann, de représenter le point (x, y) par un point d'une surface composée de m feuillets superposés, la fonction sera uniforme sur cette surface. J'étends d'abord à ces fonctions la notion de pôles et de points singuliers essentiels, puis je donne l'expression générale d'une de ces fonctions

avec un nombre fini de points singuliers, pôles ou points singuliers essentiels. L'élément analytique à l'aide duquel nous exprimons ces fonctions est l'*intégrale abélienne normale de seconde espèce* attachée à la courbe $F(x, y)=0$. Cette intégrale est, comme l'on sait, une fonction du point analytique (x, y) finie partout, excepté en un point $x=\xi$, $y=\eta$ où elle devient infinie du premier ordre avec un résidu égal à l'unité; je la désigne par $Z(\xi, \eta)$, en mettant ainsi en évidence le point (ξ, η) où elle devient infinie. Cette fonction $Z(\xi, \eta)$ est une fonction *rationnelle* du paramètre (ξ, η) ayant pour pôles les points critiques et les points (x, y) et (x_0, y_0), ces derniers avec des résidus -1 et $+1$, comme il résulte du théorème sur l'échange du paramètre et de l'argument dans les intégrales de troisième espèce. Elle joue, dans cette théorie, le même rôle que la fonction $\frac{1}{x-\xi}-\frac{1}{x_0-\xi}$ dans la théorie des fonctions uniformes de x. Ainsi l'expression générale d'une fonction $f(x, y)$, ayant le seul point singulier (a, b), est

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{A_\nu}{1\cdot 2\cdots(\nu-1)}Z^{(\nu-1)}(a, b),$$

où $Z^{(\nu-1)}(\xi, \eta)$ désigne la dérivée d'ordre $(\nu-1)$ de $Z(\xi, \eta)$ par rapport à ξ, et cette expression est entièrement analogue à l'expression

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{A_\nu}{1\cdot 2\cdots(\nu-1)}\frac{d^{\nu-1}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x_0-a}\right)}{d a^{\nu-1}}$$

d'une fonction uniforme $f(x)$ ayant le seul point singulier a. Comme dans la théorie de Weierstrass, une fonction $f(x, y)$ ayant plusieurs points singuliers est la somme de plusieurs expressions analogues à la précédente.

Il y a cependant entre les deux théories une différence considérable qu'il importe de signaler en peu de mots: c'est que, dans les expressions que donne Weierstrass pour les fonctions uniformes d'une variable x, *les coefficients des séries sont arbitraires*, tandis que, dans les expressions des fonctions uniformes d'un point analytique (x, y), *les coefficients des séries sont assujettis à vérifier p relations* qu'il serait trop long d'indiquer ici.

Nos formules se déduisent toutes par un procédé uniforme du théorème suivant:

Si l'on forme, d'une part, la somme des résidus d'une fonction uniforme d'un point analytique ayant un nombre fini de points singuliers et, d'autre part, la somme des coefficients de x^{-1} *dans les développements des* m *déterminations de la fonction au voisinage du point* ∞, *ces deux sommes sont égales.*

Passant ensuite à l'étude des fonctions qui ont une infinité de points singuliers, je démontre à leur égard un théorème qui est la généralisation de celui de M. Mittag-Leffler et qui permet de *former une fonction uniforme du point analytique* (x, y) *n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point* (a, b) *et admettant, pour pôles, les points* (a_ν, b_ν), *avec des parties principales données d'avance, le point* (a_ν, b_ν) *étant assujetti à tendre vers* (a, b) *quand* ν *croît indéfiniment.* Comme je l'ai appris depuis par M. Mittag-Leffler, ce théorème avait été trouvé, mais non publié, par Weierstrass, avec qui je suis très honoré de m'être rencontré sur ce point. J'étends, de même, aux fonctions d'un point analytique, la méthode de décomposition en facteurs primaires que Weierstrass a indiquée pour former une fonction uniforme avec des zéros donnés, et je suis conduit à l'expression générale d'une fonction d'un point analytique admettant un seul point singulier essentiel et des zéros en nombre infini se rapprochant indéfiniment de ce point essentiel. Ces théorèmes généraux sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) conduisent, dans le cas particulier où le genre p est égal à l'unité, à des théorèmes sur les fonctions uniformes doublement périodiques. On peut alors exprimer x et y par des fonctions elliptiques d'un paramètre u, de sorte que toute fonction uniforme du point (x, y) devienne fonction uniforme de u, et réciproquement. On arrive ainsi à étendre les théorèmes de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler aux fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels dont MM. Hermite[1] et Picard[2] ont donné des expressions générales.

La formule célèbre connue sous le nom d'*intégrale de Cauchy* peut, de la façon suivante (2, 3), être étendue aux fonctions d'un point analytique:

Traçons sur l'un des feuillets d'une surface de Riemann une courbe fermée C *qui ne comprend dans son intérieur aucun point de ramification de la surface; soient* $f(x, y)$ *une fonction du point analytique* (x, y) *uniforme et régulière sur toute la portion de la surface de Riemann extérieure à* C, *et* (x, y), (x_0, y_0) *deux points de cette portion de surface, on a*

---

[1] *Cours professé à la Faculté des Sciences.*

[2] *Comptes rendus,* novembre 1879.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_C Z(\xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi,$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe C.

On déduit de cette formule des développements en série pour les fonctions d'un point (x, y) holomorphes dans une aire limitée par des arcs de cercles, analogues à ceux que j'ai donnés (15) pour les fonctions uniformes sur une portion de plan. Lorsque le genre $p=1$, on obtient une formule digne d'attention relative aux fonctions à deux périodes.

Développements en série suivant les inverses de polynomes donnés. Considérons une suite donnée de polynomes (20, 21, 22, 23)

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$$

d'un degré marqué par l'indice, dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de x est égal *à l'unité.* Les racines du polynome $P_n(x)$ sont supposées, quel que soit n, à l'intérieur d'un cercle fixe de centre O et de rayon déterminé R; autrement dit, ces racines, réelles ou complexes, ont leurs modules inférieurs à R. On a, des lors, pour $|x| > R$,

$$\frac{1}{P_n(x)} = \frac{1}{x^n}\left(1 + \frac{p_{1n}}{x} + \frac{p_{2n}}{x^2} + \cdots\right),$$

série convergente. Soit, d'autre part,

$$f(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots + \frac{C_\nu}{x^\nu} + \cdots$$

une fonction développée en série suivant les puissances positives de $\frac{1}{x}$ à l'extérieur du cercle R.

On pourra, par la méthode des coefficients indéterminés, calculer les coefficients a_ν du développement

$$(1) \qquad f(x) = \frac{a_1}{P_1(x)} + \frac{a_2}{P_2(x)} + \cdots + \frac{a_n}{P_n(x)} + \cdots$$

en ordonnant les deux membres suivant les puissances de $\frac{1}{x}$.

Ce développement n'est possible que d'une manière. Pour l'application du théorème de Cauchy, il est utile de connaître le développement de $\frac{1}{x-y}$, avec

$$|x|>|y|.$$

Posons alors

$$\frac{1}{x-y}=\frac{Q_0}{P_1(x)}+\frac{Q_1}{P_2(x)}+\cdots+\frac{Q_{n-1}}{P_n(x)}+\cdots,$$

les P_n étant donnés, et calculons les coefficients Q_ν par la méthode générale précédente en écrivant

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x^3}+\cdots;$$

on trouve $Q_0=1$ et l'on voit que Q_ν est un polynome de degré ν en y, que nous désignerons par $Q_\nu(y)$, dont le terme de degré le plus élevé est y^ν; les résultats obtenus pour le calcul des $Q_\nu(y)$ peuvent être résumés dans le théorème suivant.

L'intégrale

$$I_n^\nu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{Q_\nu(x)}{P_{n+1}(x)}\,dx,$$

prise le long de la circonférence C dans le sens positif, est égale à zéro si $\nu\gtrless n$ et à l'unité si $\nu=n$.

Fonctions elliptiques.

Théorie générale. — Abel et Jacobi ont représenté les fonctions elliptiques d'une variable x par le quotient de deux fonctions entières admettant chacune une des deux périodes et se reproduisant multipliées par une exponentielle linéaire en x quand on ajoute à la variable la deuxième période. En appliquant les principes de la théorie des fonctions posés par Weierstrass, on peut *a priori*, d'une manière fort simple, arriver à cette expression des fonctions elliptiques (26).

Soit $f(x)$ une fonction doublement périodique d'une variable se comportant, en tous les points à distance finie, comme une fraction rationnelle. Cette fonction peut, d'après les résultats trouvés par Weierstrass, se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ *n'ayant pas de zéros communs.* Cette forme n'est pas unique, car on peut évidemment multiplier le numérateur

et le dénominateur par une même fonction entière *n'ayant pas de zéros*, c'est-à-dire par une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière de x, $e^{g(x)}$. En disposant convenablement de cette fonction $g(x)$ et s'appuyant sur d'importants résultats dus à Guichard (*Annales de l'École Normale*, 1887), on arrive à mettre la fonction elliptique $f(x)$ sous la forme du quotient de deux autres fonctions entières $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, qui remplissent les conditions caractéristiques des fonctions d'Abel et de Jacobi et qui peuvent, par suite, être exprimées à l'aide des fonctions Θ.

Cette méthode est importante en ce qu'elle s'étend (56) et (58, 59) aux fonctions de deux variables à quatre paires de périodes.

Expression nouvelle des fonctions elliptiques. — D'après les théorèmes généraux de la théorie des fonctions, on reconnaît *a priori* l'existence d'une infinité de représentations analytiques d'une fonction *méromorphe dans tout le plan*, c'est-à-dire uniforme et n'ayant que des pôles à distance finie, ces représentations analytiques étant assujetties à donner la fonction pour toutes les valeurs de la variable. Si l'on se limite aux représentations qui donnent la fonction sous forme du quotient de deux séries convergentes pour toutes les valeurs de la variable, il existe encore une infinité de représentations différentes. Les plus simples sont: 1° celle qui donne la fonction sous forme du quotient de deux séries entières, par exemple celle qui donne les fonctions elliptiques sous forme du quotient de fonctions Θ; 2° celle qui donne la fonction sous forme d'une série unique mettant en évidence les pôles et les parties principales correspondantes, série qui est définie par le théorème de M. Mittag-Leffler. Plus généralement, en admettant que la fonction ait pour zéros les points

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots$$

et pour pôles les points

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_\nu, \quad \ldots,$$

on pourra la regarder comme le quotient de deux fonctions méromorphes

$$\frac{P(z)}{Q(z)},$$

la fonction $P(z)$ ayant pour zéros une partie des points a_ν et pour pôles une partie des points b_ν; la fonction $Q(z)$ ayant pour zéros les autres points b_ν et pour pôles les autres points a_ν. Ces deux fonctions P et Q sont, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler, représentées par des séries convergentes dans tout

le plan. La seule difficulté qui se présentera et qui pourra être considérable sera de calculer les coefficients des séries et surtout ceux de la partie entière des développements. J'ai fait ce calcul pour les fonctions elliptiques (27) en prenant, pour $Q(z)$, une fonction entière ayant pour zéros les pôles de la fonction situés dans une moitié du plan et, pour $P(z)$, une fonction ayant pour pôles les pôles de la fonction situés dans l'autre moitié du plan. Ces recherches se rattachent à mes études (39) et (40) sur les fonctions que Heine a introduites comme une généralisation des fonctions eulériennes Γ, et à des résultats que Poincaré a indiqués dans ses Mémoires sur les invariants arithmétiques (*Comptes rendus*, 1879, et *Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Alger, 1881). Elles donnent les fonctions elliptiques sous une forme nouvelle mettant en évidence la double périodicité d'une manière différente de celle qui se présente dans les expressions connues. Voici comment: la fonction elliptique est le quotient de deux séries $P(z)$ et $Q(z)$, d'une forme simple, qui admettent séparément la période ω et se reproduisent divisées par $\left(q^2 e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} - 1\right)$ quand on augmente z de la deuxième période ω'.

Sur un problème d'interpolation relatif aux fonctions elliptiques. — La formule d'interpolation de Lagrange donne immédiatement la solution de la question suivante:

Former une fraction rationnelle de degré n dont les infinis, au nombre de n, sont connus et qui prend des valeurs données pour $(n+1)$ valeurs particulières attribuées à la variable.

Je me suis proposé (25) de résoudre une question analogue qui peut s'énoncer ainsi:

Former une fonction elliptique d'ordre n dont les infinis, situés dans un parallélogramme élémentaire, sont connus et qui prend des valeurs données pour n valeurs attribuées à la variable.

Ce problème se résout par une formule entièrement semblable à celle de Lagrange, avec cette différence que, dans un cas particulier, le problème est impossible ou indéterminé.

Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en séries trigonométriques des fonctions elliptiques. — Les fonctions elliptiques obtenues d'abord par Abel et Jacobi, sous forme d'un quotient de deux fonctions entières,

ont éte développées par Jacobi en séries trigonométriques simples. La méthode que je donne, pour obtenir les coefficients de ces derniers développements, repose sur la résolution d'un système d'équations linéaires (24); elle fournit directement l'expression du *multiplicateur et du module en produits infinis*, sans que l'on soit obligé de passer par l'intermédiaire de la fonction $\varphi(q)$ de Jacobi. Cette méthode a provoqué de la part de Poincaré de profondes recherches dans lesquelles il a indiqué les conditions générales de son emploi.

Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. — On sait que Hermite appelle *fonctions doublement périodiques de troisième espèce* des fonctions qui se comportent comme des fractions rationnelles pour toutes les valeurs finies de la variable z, et se reproduisent, multipliées par des exponentielles du premier degré par rapport à z, quand on augmente z de l'une ou de l'autre des périodes ω et ω'.

On peut exprimer toutes ces fonctions par une exponentielle du second degré en z multipliée par le quotient de deux produits de fonctions Θ ne contenant pas le même nombre de facteurs au numérateur qu'au dénominateur; elles se divisent donc en deux groupes: 1° celles où il existe plus de fonctions Θ au dénominateur qu'au numérateur; 2° celles où, au contraire, il existe plus de fonctions Θ au numérateur.

Pour les fonctions doublement périodiques de première et deuxième espèce, Hermite a indiqué un autre mode d'expression, mettant en évidence les points où ces fonctions deviennent infinies et la façon dont elles y deviennent infinies; la formule d'Hermite, appelée *formule de décomposition* en éléments simples, est analogue à la formule de décomposition des fractions rationnelles en fractions simples et est, comme cette dernière formule, de la plus haute importance pour l'intégration et le développement en série des fonctions de première et seconde espèce.

Pour les fonctions doublement périodiques de troisième espèce, il n'existait pas de formule analogue: la difficulté était de trouver la nouvelle fonction devant servir d'élément de décomposition. C'est cette fonction que j'ai réussi à former (28 à 33); ici, je demande la permission de citer, dans le *Traité des fonctions elliptiques* du regretté Halphen, un passage auquel le sentiment de vive sympathie que j'ai toujours eu pour l'auteur me fait attacher le plus grand prix: «Au Chapitre XIII, nous avons trouvé les développements de plusieurs fonctions de troisième espèce, les inverses des fonctions σ, les inverses de leurs produits deux

à deux. Ces développements et beaucoup d'autres analogues avaient été formés par M. Biehler dans une thèse remarquable, dont on doit recommander l'étude[1]; mais c'est M. Appell qui, en créant le nouvel élément simple, a conduit cette partie de la théorie au plus haut degré de perfection.» Cet élément simple est une série dont la composition a quelque ressemblance avec celle des fonctions θ. Soient n un entier positif et q la constante $e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$, l'élément simple est la fonction de deux variables indépendantes z et u, définie par la série

$$\chi_n(z, u) = \frac{\pi}{\omega} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\frac{2n\nu\pi u i}{\omega}} q^{n\nu(\nu-1)} \cot \frac{\pi}{\omega}(z-u-\nu\omega'),$$

qui devient infinie toutes les fois que la différence $z-u$ est de la forme $p\omega+p'\omega'$ (p et p' entiers). A l'aide de cet élément, on peut écrire toute fonction doublement périodique de troisième espèce, sous forme d'une somme de termes ne devenant chacun infini qu'en un point du parallélogramme des périodes et d'une partie entière, s'il y a lieu. Soit une fonction de troisième espèce $F(z)$ ramenée, ce qui est toujours possible, à vérifier deux relations de la forme

$$F(z+\omega)=F(z), \qquad F(z+\omega')=e^{\frac{2m\pi z i}{\omega}} F(z),$$

où m désigne un entier non nul, positif ou négatif.

Si m est positif, la fonction $F(z)$ a dans un parallélogramme des périodes m zéros de plus que d'infinis: en particulier, elle peut n'avoir que m zéros et pas d'infini. Toute fonction de cette espèce, ayant m zéros et pas d'infini, est une fonction linéaire et homogène de m fonctions

$$g_0(z),\ g_1(z),\ \ldots,\ g_{m-1}(z),$$

linéairement indépendantes. Si la fonction $F(z)$ devient infinie du premier ordre en p points $a, b, \ldots, l$, avec les résidus correspondants $A, B, \ldots, L$, on peut l'écrire sous la forme suivante

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \cdots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

[1] *Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce*, Thèse par Ch. Biehler, Gauthier-Villars, 1879.

$G(z)$ désignant une fonction entière vérifiant les mêmes relations que $F(z)$, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$G(z)=\lambda_0 g_0(z)+\lambda_1 g_1(z)+\cdots+\lambda_{m-1} g_{m-1}(z),$$

où les λ sont des constantes. Les résidus $A, B, \ldots L$ sont entièrement indépendants des pôles; quant aux coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, on arrive à les calculer (32), soit par la méthode des coefficients indéterminés, soit par la considération de l'intégrale

$$\int F(x)\chi_m(x, z)\,dx,$$

prise sur le contour d'un parallélogramme élémentaire.

Si, au contraire, l'entier appelé m est négatif, $m=-\mu$, la fonction admet, dans un parallélogramme des périodes, μ infinis de plus que de zéros: supposons encore qu'elle devienne infinie du premier ordre aux points $a, b, \ldots, l$ avec les résidus $A, B, \ldots, L$, on aura

$$F(z)=A\chi_\mu(z, a)+B\chi_\mu(z, b)+\cdots+L\chi_\mu(z, l);$$

les résidus $A, B, \ldots, L$ ne sont plus indépendants des pôles: ils sont liés aux pôles par μ relations

$$Ag_k(a)+Bg_k(b)+\cdots+Lg_k(l)=0, \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, \mu-1).$$

Ces μ relations sont d'ailleurs suffisantes pour rendre le second membre de la dernière formule de décomposition doublement périodique de troisième degré: c'est ce que l'on vérifie, en cherchant l'effet de l'addition de la seconde période ω' au premier argument de $\chi_n(z, u)$.

Ainsi, et c'est là une circonstance très remarquable, la même fonction $\chi_n(z, u)$ sert d'élément de décomposition dans les deux cas: dans l'un des cas, z est la variable et u un paramètre qui coïncide successivement avec les différents pôles; dans l'autre, c'est le premier argument z qui sert de paramètre et le second u de variable.

Ces résultats donnent immédiatement les développements des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en séries trigonométriques (32). En effet, pour développer une quelconque de ces fonctions en série, il suffira de

connaître le développement de l'élément simple. J'indique, en conséquence, des développements en séries des quatre fonctions

$$\chi_n(z, u),\ \chi_n\left(z+\frac{\omega'}{2}, u\right),\ \chi_n\left(z, u+\frac{\omega'}{2}\right),\ \chi_n\left(z+\frac{\omega'}{2}, u+\frac{\omega'}{2}\right).$$

On se trouve alors en possession de méthodes et de formules générales permettant de trouver facilement les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, et comprenant, comme cas particuliers, les formules, si précieuses pour l'Arithmétique, que Biehler a établies dans son excellente Thèse, en suivant la voie ouverte par Hermite. Quelques-unes des séries que j'ai obtenues de cette façon ont été reproduites par Hermite dans un Mémoire inséré au Tome *C* du *Journal de Crelle.* Cette méthode de développements en série permet de démontrer une loi générale énoncée par Hermite et vérifiée par Biehler sur un grand nombre d'exemples, loi qui donne une propriété arithmétique extrêmement remarquable des coefficients des développements en série des fonctions de troisième espèce, suivant les puissances de q:

Si l'on développe une fonction doublement périodique de troisième espece en une série ordonnée par rapport aux puissances de q, on voit apparaître dans les sinus et cosinus qui forment le coefficient de $q^{\frac{N}{4}}$ les combinaisons $\frac{\delta' \pm m\delta}{2}$ des diviseurs conjugués δ et δ' de N; le signe $+$ convenant au cas où il y a au numérateur m fonctions Θ de plus qu'au dénominateur, le signe $-$, au cas où il y a au dénominateur m fonctions Θ de plus qu'au numérateur.

L'élément simple $\chi_n(a, z)$, considéré comme une fonction du second argument, vérifie une équation différentielle linéaire avec second membre dont les coefficients sont composés avec des fonctions Θ et leurs dérivées, et dont l'intégrale générale s'exprime à l'aide de fonctions Θ et de la fonction $\chi_n(a, z)$ (106).

Enfin on peut rattacher les formules de décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce au théorème de M. Mittag-Leffler: dans cette application (33), les degrés des polynomes à retrancher de la partie principale croissent indéfiniment.

Signalons à cette occasion une étude intéressante à faire: à savoir l'étude des zéros de la fonction $\chi_n(z, u)$. J'ai indiqué dans les Acta (43) une méthode générale pour obtenir des relations entre des χ_n d'indices différents.

Fonctions particulières.

Fonctions analogues aux fonctions circulaires. — Les fonctions circulaires se présentent comme formant la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le développement de $e^{x\sqrt{-1}}$; ce fait m'a conduit (46) à étudier les trois fonctions de deux variables θ et φ qui naissent du développement de l'exponentielle $e^{\alpha\theta+\alpha^2\varphi}$, où α et α^2 sont les racines cubiques de l'unité. Les propriétés de ces fonctions permettent de concevoir un calcul de quantités complexes dans l'espace, semblable au calcul des imaginaires dans le plan. A cette occasion, il se présente des systèmes de trois familles de surfaces, telles que les plans tangents en un point commun à trois surfaces, appartenant respectivement aux trois familles, forment un trièdre régulier dont les arêtes sont également inclinées sur la droite ayant pour équations $x=y=z$.

Généralisant ce résultat (47), j'étudie n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $(n-1)$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, satisfaisant aux équations différentielles

$$\begin{aligned}
dy_1 &= y_2\,dx_1 + y_3\,dx_2 + \cdots + y_n\,dx_{n-1},\\
dy_2 &= y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2 + \cdots + y_1\,dx_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
dy_n &= y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2 + \cdots + y_{n-1}\,dx_{n-1},
\end{aligned}$$

qui constituent l'extension naturelle des équations

$$dy_1 = y_2\,dx, \quad dy_2 = y_1\,dx,$$

auxquelles satisfont les sinus et cosinus hyperboliques. Les fonctions ainsi obtenues admettent $(n-1)$ groupes de périodes conjuguées et sont liées par une relation algébrique.

Fonctions analogues aux fonctions eulériennes. — La fonction $\Gamma(x)$ ne diffère que par un facteur exponentiel de la limite du produit infini dont le terme général est $\frac{n}{x+n}e^{\frac{x}{n}}$; elle est formée avec la moitié des facteurs primaires qui constituent la fonction $\sin \pi x$. En suivant le mode de généralisation employé pour passer des produits infinis qui définissent les fonctions circulaires aux produits infinis qui définissent les fonctions elliptiques, on est amené (38) à considérer des

fonctions formées avec la moitié des facteurs primaires qui constituent la fonction Θ. Ces nouvelles fonctions peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction O que Heine a découverte, en généralisant la série hypergéométrique de Gauss. On a ainsi une double série de fonctions: d'un côté, les fonctions simplement périodiques et les fonctions doublement périodiques, et, de l'autre, les fonctions eulériennes et les fonctions de Heine. Mais, tandis qu'il n'existe pas de fonctions uniformes à plus de deux périodes, il existe des fonctions qui sont semblables à la fonction eulérienne Γ et à la fonction O de Heine, et qui sont formées à l'aide de plusieurs quantités imaginaires $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, comme la fonction O est formée avec deux quantités ω, ω_1. Je m'occupe (38—40) de l'étude des principales propriétés de ces fonctions, puis j'applique les plus simples d'entre elles à différents problèmes de calcul fonctionnel et à l'évaluation de la limite de certaines séries et produits infinis.

Soient $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, $(n+1)$ quantités imaginaires, telles que les modules de

$$q_1 = e^{\frac{\pi\omega_1 i}{\omega}}, \quad q_2 = e^{\frac{\pi\omega_2 i}{\omega}}, \quad \ldots, \quad q_n = e^{\frac{\pi\omega_n i}{\omega}}$$

soient moindres que l'unité; la fonction que j'étudie est définie par l'équation

$$O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \prod \left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \ldots q_n^{2m_n}\right),$$

le produit étant étendu à toutes les valeurs entières positives ou nulles de m_1, $m_2, \ldots, m_n$. J'indique $(n+1)$ équations aux différences finies auxquelles satisfait cette fonction O, des formules pour la multiplication de l'argument x et la décomposition de cette fonction O en facteurs primaires. Lorsque le nombre n est égal à l'unité, on retrouve les fonctions O de Heine. Le cas où $n=2$ mérite une attention particulière (40): en divisant la fonction $O(-x+\omega_1+\omega_2 \mid \omega, \omega_1, \omega_2)$ par la fonction $O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2)$, on obtient une fonction possédant les propriétés suivantes: elle a la période ω, et, quand on augmente la variable x de ω_1 ou ω_2, elle se reproduit multipliée par une fonction Θ aux périodes (ω, ω_2) ou aux périodes (ω, ω_1). On peut, à l'aide de cette nouvelle fonction, exprimer toute fonction uniforme qui admet la période ω et se reproduit multipliée par une fonction elliptique aux périodes ω et ω_2, quand on fait croître x de ω_1. Le cas particulier, où les périodes ω_1 et ω_2 sont égales, avait été considéré antérieurement par M. Picard[1]; j'indique, pour ce cas, une relation entre la fonction O et la dérivée d'une fonction Θ par rapport à une *période*.

[1] *Comptes rendus*, 11 mars 1878.

Périodicité générale. — Une fonction d'une variable x est périodique, lorsqu'elle ne change pas de valeur, quand on fait l'opération qui consiste à ajouter une certaine constante à x; on peut se placer à un point de vue beaucoup plus général, en considérant des fonctions d'une variable x qui ne changent pas de valeur, quand on fait, sur x, une opération déterminée $\varphi(x)$, par exemple quand on élève x au carré, $[\varphi(x)=x^2]$. La fonction $\varphi(x)$ étant donnée, pour obtenir des fonctions possédant cette propriété, je forme des séries qui, lorsqu'elles sont convergentes, conservent la même somme quand on y remplace x par $\varphi(x)$. J'indique (35), comme exemple, les cas où $\varphi(x)$ a l'une des deux valeurs x^2 ou x^3-1. Me proposant ensuite (36) de traiter un cas où $\varphi(x)$ est une fonction transcendante, j'ai supposé $\varphi(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$, et, pour simplifier le calcul, j'ai modifié la méthode générale. Cette méthode permet également de former une fonction de x, se reproduisant multipliée par un facteur $\psi(x)$ donné d'avance, quand x se trouve remplacé par $\varphi(x)$; il suffit, pour cela, de multiplier ou de diviser le terme général de mes séries par une espèce de factorielle. Ces nouvelles fonctions, qui constituent une sorte de généralisation des fonctions périodiques de seconde espèce, se présentent, comme je l'ai montré (102, 108, 109), dans l'intégration de certaines équations différentielles linéaires. A la suite des deux Notes que j'ai publiées sur ces fonctions, M. Rausenberger a fait une étude de la *périodicité générale* dans les *Matematische Annalen,* de l'année 1881.

Séries et polynômes. Détermination de la nature d'une singularité d'une fonction définie par une série entière. — On sait quel développement ont pris, dans ces derniers temps, les recherches sur la détermination des singularités des fonctions définies par des développement en séries de puissances. Je crois avoir donné les premiers exemples de déterminations de ce genre.

Soit une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes d'une variable x. Cette variable étant réelle et les coefficients de la série étant positifs à partir d'un certain rang, la série, convergente pour de petites valeurs de x, deviendra divergente quand x tendra, en croissant, vers une certaine limite qu'on peut toujours ramener à être l'unité, à moins que la série ne converge pour toutes les valeurs de la variable. La question qui se pose alors est de savoir de quelle façon la fonction définie par la série devient infinie pour $x=1$. Je résous cette question (8), en supposant que le produit du coefficient de x^n par une cer-

taine puissance de n tende vers une limite pour n infini: dans cette hypothèse, la fonction devient infinie comme une puissance négative de $1-x$, ou comme $-\log(1-x)$, dans un cas particulier. Ce théorème, qui peut être utile pour trouver la somme de la série dans le voisinage de la valeur critique 1, est un cas particulier d'une proposition que j'ai indiquée postérieurement (11) et qui donne la limite du rapport de deux séries divergentes pour lesquelles le rapport des termes généraux tend vers une limite: *Soient deux séries* $f(x)=\Sigma u_n x^n$, $\varphi(x)=\Sigma v_n x^n$ *dans lesquelles les coefficients* u_n *et* v_n *finissent par rester positifs et qui sont convergentes pour* $x<1$ *et divergentes pour* $x=1$, *si le rapport* $\frac{u_n}{v_n}$ *tend vers une limite quand* n *augmente indéfiniment, le rapport* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *tend vers cette même limite quand* x *tend vers l'unité.*

Sommation de certaines séries. — Il existe deux classes étendues de séries et de produits convergents dont on peut évaluer les limites à l'aide de transcendantes connues (37). Ce sont: 1° les séries et les produits convergents dont le terme général est une fonction rationnelle du rang n; leurs limites s'expriment à l'aide de la fonction Γ et de ses dérivées; 2° les séries et les produits convergents dont le terme général, de rang n, est une fonction rationnelle de q^n, q désignant une constante dont le module est différent de l'unité; leurs limites s'expriment au moyen de la fonction Θ de Heine et de sa dérivée. Je montre, en outre (40), que ces mêmes transcendantes permettent de résoudre certains problèmes de calcul fonctionnel.

Polynômes et opérations fonctionnelles. — Certains polynômes, ceux de Legendre par exemple, s'offrent comme formant les coefficients du développement d'une fonction génératrice suivant les puissances d'une variable. J'ai étudié (14) les polynômes P_n qui forment les coefficients de $\frac{h^n}{1 . 2 \ldots n}$ dans le développement de $f(h)e^{hx}$ suivant les puissances positives de h, $f(h)$ désignant une fonction quelconque de h développable en série entière. Ces polynômes partagent, avec la fonction x^n, cette propriété que la dérivée de l'un d'entre eux est égale au précédent multiplié par le degré n. Si la fonction $f(h)$ satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, les polynômes correspondants satisfont à des équations différentielles de même nature dont j'indique le mode de

formation. Les développements en série procédant suivant ces polynômes ont été étudiés par Halphen[1], à la suite d'un développement particulier indiqué par Léauté[2] (13, 14).

A cette occasion je définis une opération fonctionnelle consistant à remplacer dans une série ou un polynôme $\Sigma u_n x^n$ la puissance x^n par le polynôme P_n. Cette opération joue un rôle fondamental dans les belles recherches de M. Pincherle (Acta mathematica, t. 10).

Autres polynômes. — Signalons encore 1° les polynômes en a qui forment les coefficients des puissances de x dans le développement de $e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ en série entière (12); ces polynômes sont liés à la somme des produits des n premiers entiers p à p; 2° certains polynômes (92) naissant de la série hypergéométrique du second ordre à une variable indépendante; 3° les polynômes de Bernoulli qui expriment, pour des valeurs entières de la variable, la somme des puissances semblables des n premiers entiers (135); faisant, à ces polynômes, l'application d'une méthode donnée par Darboux[3], j'indique leurs expressions approchées quand leur degré est très grand; j'étudie ensuite (138) les développements en série procédant suivant ces polynômes, développements qui présentent des particularités curieuses; c'est ainsi que, pour $(y-x)^{-1}$, il existe un développement qui converge seulement pour des valeurs *entières* de x; 4° des polynômes à une et à deux variables (139) analogues aux polynômes de Legendre et aux polynômes d'Hermite.

Fractions continues. — Une note (134) contient l'expression générale de la réduite de rang n d'une fraction continue périodique au moyen des racines de l'unité.

Dans une autre publication (136), (136[bis]) j'ai montré comment on peut rattacher un nombre complexe à des fractions continues à termes réels, notamment à la fraction

$$b-\cfrac{a}{b-\cfrac{a}{b-\cdots}}$$

[1] *Comptes rendus*, t. XCIII, p. 781 et 823; *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2me série, t. V, p. 462.

[2] *Comptes rendus*, t. XC, p. 1404.

[3] *Journal de Mathématiques*, 3me série, t. IV, p. 5 et 377; 1877.

où b et a sont des nombres réels et positifs tels que

$$b^2-4a<0.$$

On est conduit à attribuer à la fraction une valeur complexe f donnée par

$$f=b-\frac{a}{f}.$$

La fraction continue considérée est une fraction de Stieltjes, de la forme particulière

$$b+\cfrac{1}{bz+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{bz+\cdots}}}$$

Si l'on suppose b réel et positif, z complexe, cette fraction est convergente et définit une fonction $\varphi(z)$. Pour $z=-\frac{1}{a}$, elle se réduit à la fraction proposée qui est divergente. Mais si la variable complexe z tend vers la valeur réelle négative $-\frac{1}{a}$, la fonction $\varphi(z)$ tend vers l'une des deux racines complexes x ou y de l'équation en f, la limite étant x ou y suivant que z tend vers $-\frac{1}{a}$ par des valeurs complexes situées au dessus ou au dessous de l'axe des quantités réelles. Les deux valeurs complexes de z qu'on est conduit à rattacher à la fraction proposé à termes réels sont, d'après cela, les deux limites vers lesquelles tend $\varphi(z)$ quand z tend vers $-\frac{1}{a}$ de la façon indiquée.

J'ai été amené (137) à généraliser les développements élémentaires en fractions continues, en considérant des développements qui se rattachent à la recherche de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre à une unité près, comme les fractions continues des éléments se rattachent à la détermination d'un nombre à une unité près ($n=1$). Ces recherches ont été étendues et complétées par M. Armand Cahen (C. R. 1923 et 1924).

Fonctions et intégrales abéliennes. Fonctions périodiques de plusieurs variables. Intégrales de fonctions à multiplicateurs.

En 1885, le Journal Acta mathematica annonçait, dans les termes suivants, l'ouverture d'un concours international.

»Sa Majesté Oscar II, désireux de donner une nouvelle preuve de l'intérêt qu'Elle porte à l'avancement des Sciences mathématiques, intérêt qu'Elle a déjà témoigné en encourageant la publication du Journal: Acta mathematica, qui se trouve sous Son auguste protection, a résolu de décerner, le 21 janvier 1889, soixantième anniversaire de Sa naissance, un prix à une découverte importante dans le domaine de l'Analyse mathématique supérieure ...»

»Sa Majesté a daigné confier le soin de réaliser Ses intentions à une Commission de trois membres: M. Carl Weierstrass à Berlin, M. Charles Hermite à Paris, M. Gösta Mittag-Leffler à Stockholm ...»

C'est à ce concours que j'envoyai un Mémoire *Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs et les développements des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.* On trouvera dans le tome 13 des Acta mathematica un rapport détaillé d'Hermite sur ce Mémoire. Voici le résumé des questions qui y sont traitées.

On connaît l'intérêt que présentent tant pour l'analyse que pour l'arithmétique les développements des fonctions doublement périodiques en séries trigonométriques. Le problème analogue du développement en séries trigonométriques des fonctions de deux variables à quatre paires de périodes n'avait pas encore été abordé. Le principal objet du Mémoire est d'arriver à une expression des coefficients de ce genre de développement. Pour cela j'étudie d'abord une classe de fonctions, déjà considérées par Prym (Journal de Crelle t. 70) que j'appelle fonctions à multiplicateurs et qui sont la généralisation de celles que l'on obtiendrait en remplaçant, dans une fonction doublement périodique de seconde espèce, l'argument par l'intégrale elliptique de première espèce correspondante. Voici comment ces fonctions sont définies.

Partons de la considération d'une relation algébrique de genre p et de la surface de Riemann correspondante, rendue simplement connexe au moyen des coupures introduites par Riemann. Les fonctions à multiplicateurs sont des fonctions uniformes sur cette surface, n'ayant d'autres singularités que des pôles et dont les valeurs, aux deux bords d'une coupure, ne diffèrent l'une de l'autre que par des facteurs ou multiplicateurs constants: il y a en tout $2p$ multiplicateurs correspondant aux $2p$ périodes d'une intégrale abélienne de première espèce.

Le problème qui se pose alors est de former l'expression générale des fonctions admettant $2p$ multiplicateurs donnés d'avance. J'indique cette expression sous deux formes différentes: sous la première forme, qui met en évidence les zéros et les infinis, la fonction est représentée par une exponentielle dont l'exposant est une somme d'intégrales abéliennes de première espèce, avec des coefficients arbitraires, et d'intégrales normales de troisième espèce avec des coefficients entiers; sous la deuxième forme, qui met en évidence les pôles et les parties principales correspondantes, elle est donnée par une somme d'éléments simples. J'avais déjà rencontré antérieurement ces fonctions à propos de l'intégration de certaines équations différentielles (98) et je les avais étudiées pour elles-mêmes dans un Mémoire étendu; dans ce Mémoire, j'avais indiqué la première forme de l'expression générale de ces fonctions et j'avais également donné une formule de décomposition en éléments simples; mais cette formule présentait cet inconvénient que l'élément simple devenait infini, non pas en un seul, mais en p points; pour arriver à une formule plus parfaite, j'ai dû avoir recours à la notion d'intégrales de fonctions à multiplicateurs, de même que, pour décomposer en éléments simples une fonction algébrique par la formule de Riemann-Roch, on est obligé de se servir d'intégrales de fonctions algébriques. Je démontre ensuite plusieurs théorèmes, parmi lesquels je cite le suivant qui est une généralisation de la proposition célèbre d'Abel, sur les intégrales de différentielles algébriques: la somme des valeurs que prend une intégrale abélienne de première espèce aux zéros d'une fonction à multiplicateurs est égale à la somme des valeurs qui correspondent aux infinis de la même fonction, augmentée d'une constante dépendant uniquement des multiplicateurs. Ce théorème conduit à des conséquences importantes sur le nombre des constantes arbitraires qui figurent dans l'expression d'une fonction ayant des multiplicateurs et des pôles donnés. Je prouve après cela que, comme il arrive déjà pour les fonctions algébriques de genre supérieur à zéro, les résidus et les pôles d'une fonction à multiplicateurs ne sont pas indépendants les uns des autres: il existe en général $p-1$ relations entre les pôles et les résidus correspondants d'une fonction à multiplicateurs, et p dans un cas spécial, comprenant en particulier celui des fonctions algébriques; ce cas spécial se présente lorsqu'il existe une fonction sans zéros ni infinis, admettant les multiplicateurs donnés. C'est ainsi, par exemple, que, pour les fonctions doublement périodiques de seconde espèce d'une variable u, $(p=1)$, il n'y a, en général, aucune relation entre les pôles et les résidus, tandis qu'il en existe une lorsque les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme e^{au}.

Je donne la classification des intégrales des fonctions à multiplicateurs en intégrales de première espèce qui sont toujours finies, en intégrales de seconde espèce n'ayant que des pôles, et en intégrales de troisième espèce où s'offrent des infinis logarithmiques. Nous citerons en particulier cette proposition qu'en général il existe $p-1$ intégrales de première espèce linéairement indépendantes, et p dans le cas particulier dont il a été question précédemment. Les modules de périodicité de ces intégrales, le long des coupures, sont liés aux multiplicateurs par des relations qui deviennent identiques lorsque les multiplicateurs se réduisent à l'unité et que les intégrales deviennent abéliennes. Entre les modules de périodicité de deux intégrales de première espèce à multiplicateurs inverses, existe une équation qui coïncide, dans le cas particulier des multiplicateurs égaux à l'unité, avec la relation d'une importance capitale découverte par Riemann, entre les modules de périodicité de deux intégrales abéliennes de première espèce. Enfin je forme les intégrales normales de fonctions à multiplicateurs de seconde et de troisième espèce; j'établis des relations entre les modules de périodicité de ces intégrales et leurs multiplicateurs, puis d'autres entre ces modules et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses. L'ensemble de ces résultats rend manifeste l'analogie de la nouvelle théorie avec celle des intégrales abéliennes: la différence de nature analytique entre les deux genres de quantités apparaît toutefois dans cette circonstance, qu'il existe une intégrale de troisième espèce avec un seul infini logarithmique, tandis qu'une intégrale abélienne de troisième espèce possède au moins deux infinis de cette nature.

Après avoir ainsi étudié les fonctions à multiplicateurs et leurs intégrales, j'arrive à la seconde partie du mémoire qui a pour objet le calcul des coefficients du développement en série trigonométrique des fonctions abéliennes. Pour cela j'exprime d'abord ces coefficients par la formule de Fourier, puis, à l'aide d'un changement de variables, j'arrive à des intégrales de fonctions à multiplicateurs, que je cherche à réduire par l'application des théorèmes généraux antérieurement donnés. En traitant d'abord le cas simple des fonctions elliptiques, j'obtiens ainsi une méthode qui donne *directement* les coefficients du développement en série trigonométrique de $sn\,u$ sans l'intervention des fonctions Θ. J'applique ensuite la même méthode générale aux transcendantes de Göpel et de Rosenhain et je trouve les coefficients, sous forme d'une fonction rationnelle des constantes p, q, r qui figurent dans les fonctions Θ à deux variables, multipliée par une intégrale définie où entrent deux entiers arbitraires. Cette intégrale définie porte précisément sur une fonction à multiplicateurs: elle se réduit,

dans des cas très particuliers, à des fonctions de la nature des fonctions de Bessel.

Mais ici apparaît une différence entre les développements des fonctions elliptiques par la formule de Fourier et ceux que j'ai trouvés pour les fonctions abéliennes. On sait que l'on ne peut pas faire l'inversion d'une intégrale ultra-elliptique de première espèce, comme l'on fait celle d'une intégrale elliptique; mais on peut chercher à faire cette inversion, en restant dans le domaine des variables réelles et appliquant les idées que Weierstrass a développées dans un Mémoire *Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen*[1]: ce nouveau problème, d'une grande importance au point de vue des applications, se ramène à celui que j'ai traité. Il conduit également (85) à la considération des fonctions de Bessel à plusieurs variables, étudiées depuis par Akimoff, par Pérès et par Jekhowsky (Comptes rendus t. 162, 170, 172, 179, Bulletin astronomique t. XXXIV et XXXV, Bulletin des Sciences mathématiques t. XLI).

Dans les dernières pages du Mémoire, je montre que la méthode suivie s'applique aussi aux développements, en séries trigonométriques, des fonctions hyperelliptiques de genre quelconque et même de certaines fonctions irrationnelles, et que le mode de raisonnement, employé pour l'étude des intégrales de fonctions à multiplicateurs, peut également donner des résultats utiles pour l'étude de l'intégrale générale d'une classe étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Suit une classification de celles de ces équations dont l'intégrale générale n'a, sur la surface de Riemann, d'autres singularités que des pôles et des points logarithmiques (voir aux équations différentielles).

Fonctions à multiplicateurs exponentiels. — Les fonctions à multiplicateurs constituent, comme le montre l'analyse précédente, des fonctions analogues aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Je me suis proposé d'étudier de même (29) certaines fonctions d'un point analytique, qui peuvent être envisagées comme analogues aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Si l'on considère une courbe algébrique de genre p et si l'on appelle $u^{(1)}(x, y)$, $(i=1, 2, \ldots p)$ les intégrales abéliennes normales de première espèce correspondantes, les fonctions considérées sont des fonctions du point analytique (x, y) qui ne changent pas, quand ce point décrit un cycle normal de *rang impair*, et qui se reproduisent multipliées par $e^{-mu^{(i)}(x,y)}$ quand le point décrit le cycle normal de

[1] *Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* 1866, p. 97.

rang $2i, m$ désignant un entier positif ou négatif. Supposons encore que ces fonctions n'aient que des pôles sur la surface de Riemann; alors: 1° si m est positif, elles ont sur cette surface un nombre de zéros dépassant de mp celui des infinis; 2° si au contraire m est négatif et égal à $-\mu$ elles ont μp infinis de plus que de zéros. Les fonctions de la première sorte sont les inverses de celles de la seconde. Je donne l'expression générale de ces fonctions par une fraction rationnelle en x et y, multipliée par des fonctions Θ où l'on a remplacé les variables par les intégrales abéliennes correspondantes. Quand m est positif, les résidus et les pôles sont indépendants les uns des autres; quand m est négatif, il y a des relations nécessaires entre les pôles et les résidus correspondants.

Des fonctions de cette nature et leurs intégrales ont été étudiées dans les thèses de MM. Lacour (1895) et Suchar (1897).

Extension d'un théorème de Liouville aux fonctions abéliennes. — Liouville a démontré le théorème suivant sur les fonctions doublement périodiques:

Si l'on considère les zéros et les infinis d'une fonction elliptique qui sont situés dans un même parallélogramme élémentaire, la somme des zéros ne diffère de celle des infinis que par des multiples des périodes.

Comme ce théorème est un cas particulier du théorème d'Abel, on est conduit à penser que l'on peut déduire, du théorème d'Abel, une proposition sur les fonctions abéliennes analogue à celle de Liouville sur les fonctions elliptiques. C'est ce que j'ai réussi à faire (60, 61) pour le système des fonctions abéliennes qui expriment les sommes des puissances semblables des limites supérieures des intégrales abéliennes, dans les équations d'inversion de Jacobi.

Sur les fonctions abéliennes (65). — Dans une Lettre à Hermite[1], Jacobi démontre que les fonctions de deux variables à quatre paires de périodes qui résultent de l'inversion des intégrales ultra-elliptiques sont des *fonctions algébriques de fonctions d'une variable.* Depuis il n'a été fait, à ma connaissance, aucune recherche sur le mécanisme par lequel se manifeste, dans ce mode d'expression, la quadruple périodicité des fonctions ultra-elliptiques. D'après Weierstrass, toute fonction méromorphe de deux variables x et y, à quatre paires de périodes, peut s'exprimer rationnellement à l'aide de trois fonctions de même nature, liées par une équation algébrique irréductible. Ces fonctions sont des

[1] *Journal de Mathématiques,* t. VIII.

fonctions rationnelles de six quantités $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ dont les trois premières dépendent de x seul et sont liées par une relation algébrique, les trois dernières de y seul et sont liées par la même relation; ces fonctions rationnelles ne changent pas quand on fait sur X_1, X_2, X_3 une certaine substitution rationnelle et qu'on opère de même sur Y_1, Y_2, Y_3. On est ainsi conduit à envisager les fonctions abéliennes à un point de vue algébrique dont je donne des exemples élémentaires.

Sur l'inversion des intégrales abéliennes. — Dans leur *Theorie der Abelschen Functionen,* Clebsch et Gordan généralisent le problème de l'inversion, en intégrant un système d'équations aux dérivées partielles dans les premiers membres desquelles entrent les intégrales abéliennes de première espèce et des intégrales normales de troisième espèce; ils indiquent une méthode pour passer, par continuité, de ce cas, à celui où certaines intégrales de troisième espèce sont remplacées par des intégrales de seconde espèce. Des exemples de l'intégration d'un tel système avaient été donnés auparavant par Rosenhain[1], puis par Clebsch, à l'occasion de ses recherches sur les courbes des genres 0 et 1. Enfin Elliot[2] a intégré un système d'équations où figurent les intégrales de première espèce, avec des intégrales *normales* de deuxième et troisième espèce. Il restait donc à envisager des systèmes d'équations contenant, en outre, les dérivées d'ordre quelconque des intégrales de deuxième espèce par rapport au paramètre. L'étude de ces systèmes conduit au théorème général suivant (62, 63):

Soient x et y deux variables liées par une relation algébrique et $\varphi_1(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; il existe toujours d'autres fonctions rationnelles de x et y

$$\varphi_2(x, y), \quad \varphi_3(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x, y)$$

possédant la propriété suivante: le système d'équations différentielles

$$\varphi_i(x_1, y_1)\, dx_1 + \varphi_i(x_2, y_2)\, dx_2 + \cdots + \varphi_i(x_n, y_n)\, dx_n = du_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définit les n points analytiques (x_i, y_i), en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, de telle façon que toute fonction rationnelle symétrique de ces n points soit uniforme en $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

[1] *Savants étrangers,* 1851.

[2] *Annales de l'École Normale,* 2e série, t. XI.

Signalons spécialement les cas où le genre de la relation qui lie x et y est 0 ou 1; la méthode d'intégration employée dans le cas général, où le genre est quelconque, est une généralisation de la méthode de Clebsch; elle est différente de celle d'Elliot. Il serait trop long de reproduire ici les théorèmes particuliers (63) relatifs aux fonctions rationnelles et aux fonctions elliptiques; ils sont à signaler comme pouvant faire pénétrer la notion du problème d'inversion de Jacobi dans un enseignement élémentaire.

Fonctions de deux variables à quatre paires de périodes sans singularités essentielles à distance finie. — Les fonctions doublement périodiques d'une variable qui se comportent, à distance finie, comme une fraction rationnelle, peuvent toutes, ainsi qu'il est bien connu, s'exprimer par des combinaisons rationnelles de fonctions Θ d'une variable. Après la découverte des fonctions Θ de plusieurs variables faite par Göpel et Rosenhain, on a dû se demander immédiatement si toute fonction de n variables avec $2n$ groupes de périodes, se comportant à distance finie comme une fraction rationnelle, pourrait être exprimée à l'aide des fonctions Θ de n variables. Au premier abord il semble que non, car les périodes d'une fonction Θ de n variables ne peuvent pas être choisies arbitrairement: elles sont liées par $\frac{n(n-1)}{2}$ relations bien connues. Cependant, dans une conversation qu'il eut avec Hermite en 1860, Riemann avait affirmé que ces relations doivent nécessairement exister entre les $2n$ groupes de périodes d'une fonction de n variables, tout au moins après une transformation d'un degré convenable effectuée sur ces périodes; mais il n'a donné aucune indication sur la méthode qui l'avait conduit à ce théorème d'une importance capitale. Weierstrass a, ensuite, annoncé à quelques-uns de ses élèves qu'il possédait une démonstration de ce théorème; mais il n'a ni publié ni indiqué la méthode dont il faisait usage. Dans une Note présentée à l'Academie des Sciences le 3 décembre 1883, Poincaré et E. Picard, s'appuyant sur ce théorème de Weierstrass, que $n+1$ *fonctions méromorphes de n variables à $2n$ groupes de périodes sont liées par une relation algébrique,* ont donné une démonstration du théorème de Riemann fondée sur la considération d'intégrales de différentielles totales et sur la théorie des intégrales abéliennes.

En me bornant au cas le plus simple de deux variables indépendantes, je me suis proposé (58) et (59) de traiter directement la question par une méthode qui s'étend d'elle-même au cas d'un nombre quelconque de variables. Partant de l'expression d'une fonction de deux variables, sans singularités essentielles à

distance finie, sous forme du quotient de deux fonctions entières, telle qu'elle résulte d'un théorème que Poincaré a établi dans le tome II des Acta, je montre que, si cette fonction admet quatre paires de périodes, on peut toujours les amener à vérifier la relation de Riemann et exprimer la fonction par le quotient de deux fonctions entières composées avec des fonctions Θ de deux variables. Je n'ai donc pas à m'appuyer sur l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables à quatre paires de périodes; la méthode suivie permet, au contraire, de démontrer l'existence de cette relation: cette méthode est l'extension naturelle de celle que j'ai suivie antérieurement pour les fonctions elliptiques (26). Voici quelques indications à ce sujet. On commence par démontrer le théorème suivant:

Etant données deux fonctions entières $H(x, y)$ et $K(x, y)$ de deux variables indépendantes vérifiant l'identité

$$H(x, y+1)-H(x, y)=K(x+1, y)-K(x, y),$$

il existe une troisième fonction entière $G(x, y)$ vérifiant les deux équations

$$G(x+1, y)-G(x, y)=H(x, y),$$
$$G(x, y+1)-G(x, y)=K(x, y).$$

Pour cela, en modifiant la méthode que Guichard a donnée (Annales de l'Ecole normale, novembre 1887), pour démontrer un théorème analogue relativement aux fonctions d'une variable, on forme, à l'aide d'une intégrale définie affectée de coupures, des fonctions entières $\psi_n(z)$ vérifiant les identités

$$\psi_n(z+1)-\psi_n(z)=z^n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

et se comportant, quand n est très grand, de telle façon que, si

$$H(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots+a_n z^n+\cdots$$

est une série convergente quel que soit z, il en soit de même de

$$G(z)=a_0\psi_0(z)+a_1\psi_1(z)+a_2\psi_2(z)+\cdots+a_n\psi_n(z)+\cdots;$$

cette dernière série définira alors une fonction entière vérifiant la relation $G(z+1)-G(z)=H(z)$. Il est évident que les fonctions $\psi_n(z)$ ne diffèrent des polynômes de Bernoulli $\varphi_n(z)$ que par une fonction entière admettant la période 1:

c'est ce que je vérifie en montrant, à l'aide des expressions des polynômes de Bernoulli par des intégrales définies données par Hermite, que $\psi_n - \varphi_n$ est un polynôme en $e^{2\pi z i}$ et $e^{-2\pi z i}$. La fonction $\psi_n(z)$ une fois formée, la démonstration du théorème préliminaire est des plus faciles.

Voici maintenant comment se trouve résolue la question principale. D'après un théorème de Poincaré (Acta mathematica, t. II) une fonction analytique uniforme $f(x, y)$ de deux variables x et y se comportant comme une fraction rationnelle en tous les points à distance finie, peut s'écrire sous la forme

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

les fonctions φ et ψ étant *entières* et ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction f est indéterminée. Ce mode de représentation n'est pas unique; on en obtient évidemment une infinité d'autres possédant les mêmes propriétés, en multipliant le numérateur et le dénominateur par une même fonction entière *n'ayant pas de zéros,* c'est-à-dire par une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière $e^{g(x,y)}$. Si l'on suppose que la fonction f admette quatre groupes de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$, (α, β), (α', β') on arrive, en déterminant convenablement $g(x, y)$, à mettre la fonction f sous la forme du quotient de deux nouvelles fonctions entières $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ vérifiant les relations

$$\frac{\Phi(x+2\pi i, y)}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x+2\pi i, y)}{\Psi(x, y)} = 1,$$

$$\frac{\Phi(x, y+2\pi i)}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x, y+2\pi i)}{\Psi(x, y)} = e^{nx},$$

$$\frac{\Phi(x+\alpha, y+\beta)}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x+\alpha, y+\beta)}{\Psi(x, y)} = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2i\pi}y+c},$$

$$\frac{\Phi(x+\alpha', y+\beta')}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x+\alpha', y+\beta')}{\Psi(x, y)} = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2i\pi}y+c'},$$

où a, b, a', b' désignent des entiers non nuls tous en même temps, les périodes étant liées par l'équation

$$a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2Ni\pi.$$

Faisant alors un changement linéaire de variables, qui substitue aux variables x et y d'autres variables X et Y, on amène les fonctions Φ et Ψ à admettre les groupes de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$ et à vérifier des relations de la forme

$$\frac{\Phi(X+A, Y+B)}{\Phi(X, Y)} = \frac{\Psi(X+A, Y+B)}{\Psi(X, Y)} = e^{MX+C},$$

$$\frac{\Phi(X+A', Y+B')}{\Phi(X, Y)} = \frac{\Psi(X+A', Y+B')}{\Psi(X, Y)} = e^{MY+C'},$$

avec $B = A'$. On retrouve alors les équations caractéristiques des fonctions Θ, fournissant immédiatement ces fonctions par la méthode des coefficients indéterminés.

Ce théorème fondamental étant démontré, il devient facile d'établir l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables, sans singularités essentielles, admettant quatre paires de périodes. Je n'insiste pas sur cette démonstration.

Fonctions de deux variables à deux paires de périodes sans singularités essentielles à distance finie. — Une fonction d'une variable à une période ω, sans points essentiels à distance finie, peut toujours être mise sous la forme du quotient de deux fonctions entières, sans zéros communs, admettant séparément la période ω et pouvant, par suite, s'exprimer par la formule de Fourier. Il est naturel de se demander si une proposition analogue s'applique aux fonctions de deux variables. Tout d'abord, une fonction $f(x, y)$ de deux variables admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$ et n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie, peut toujours être mise sous la forme, (58) et (59),

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

φ et ψ désignant deux fonctions entières ne s'annulant simultanément qu'aux points d'indétermination de f et vérifiant chacune les deux relations

$$\varphi(x+2\pi i, y) = \varphi(x, y), \qquad \varphi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\varphi(x, y),$$

$$\psi(x+2\pi i, y) = \psi(x, y), \qquad \psi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\psi(x, y),$$

où n désigne un entier.

Si cet entier n est nul, les fonctions entières φ et ψ admettant séparément la période $2\pi i$ par rapport à x et y, sont données par la formule de Fourier. Si n est différent de zéro, il est aisé d'obtenir l'expression générale des fonctions φ et ψ. Mais il est plus simple de remarquer que l'on peut, avec des fonctions θ d'une variable, former une fonction entière $\theta_n(x,y)$ vérifiant les deux relations

$$\theta_n(x+2\pi i, y) = \theta_n(x, y), \qquad \theta_n(x, y+2\pi i) = e^{-nx}\theta_n(x, y),$$

de telle façon que, si l'on pose

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y)\,\theta_n(x, y), \qquad \Psi(x, y) = \psi(x, y)\,\theta_n(x, y),$$

les fonctions Φ et Ψ sont des fonctions entières admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$. On pourra donc mettre la fonction f sous la forme du quotient de Φ par Ψ, Φ et Ψ étant des fonctions entières admettant séparément les deux paires de périodes et développables, par conséquent, par la série de Fourier. On arrive ainsi à une expression analogue à celle des fonctions d'une variable avec une période, avec cette différence que l'expression ci-dessus n'est pas irréductible.

Sur des expressions triplement ou quadruplement périodiques. — Les fonctions abéliennes de genre *deux* sont des fonctions de deux variables, avec quatre paires de périodes simultanées, n'admettant pas de singularité essentielle à distance finie; elles se réduisent, dans des cas limites, à des fonctions de deux variables à trois paires de périodes, dont le premier exemple a été donné par Rosenhain dan son Mémoire couronné. La question qui se présente naturellement à l'esprit est d'étudier les expressions les plus simples triplement ou quadruplement périodiques, avec des singularités essentielles à distance finie.

Un premier procédé pour former ces expressions est le suivant (54): Soient b et β deux constantes données, m un entier quelconque, $a_1, a_2, \ldots a_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ des constantes assujetties à la condition $\Sigma a_i - \Sigma \alpha_i = m\beta$ et soit, d'autre part,

$$\varphi(x) = \frac{\theta_1(x+a_1)\,\theta_1(x+a_2)\cdots\theta_1(x+a_n)}{\theta_1(x+\alpha_1)\,\theta_1(x+\alpha_2)\cdots\theta_1(x+\alpha_n)},$$

la fonction θ_1 étant formée avec les périodes ω et ω'. Si l'on désigne par $f(y)$ une fonction uniforme de y admettant la période b, la fonction

$$\psi(x, y) = f\left[m y + \frac{b}{2\pi i} \log \varphi(x)\right]$$

est une fonction uniforme de x et y admettant trois paires de périodes conjuguées, à savoir pour x les périodes $\omega, \omega', 0$ et pour y les périodes correspondantes $0, \frac{b\beta}{\omega}, b$. Dans le cas particulier où $f(y)$ est une fonction rationnelle de $e^{\frac{2\pi y i}{b}}$ la fonction $\psi(x, y)$ est de la nature de celles qui ont été considérées par Rosenhain; entre trois de ces fonctions il existe une relation algébrique; il en existe une, en particulier, entre $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$, car les dérivées partielles de ψ sont alors des fonctions de même nature que ψ. On peut, par un procédé analogue, former des expressions à quatre paires de périodes.

Une autre façon de former des expressions quadruplement périodiques consiste à se servir de séries infinies et à imiter ce que l'on fait pour les fonctions elliptiques, quand on représente ces fonctions par des séries de termes simplement périodiques. C'est ce que j'avais réussi à faire en me proposant de publier une étude complète sur ce sujet, quand une Note de M. E. Picard (Comptes rendus, 18 mars 1889) sur cette même question m'obligea à publier, dans la séance suivante (Comptes rendus, 25 mars 1889), les principaux résultats que j'avais obtenus (55), et que je vais rapidement résumer. Considérant une série dont le terme général est

$$S_{m,n} = a^{-m} b^{-n} R\left(e^{x+m\alpha+n\beta}, e^{y+m\gamma+n\delta}\right),$$

où $R(z, t)$ désigne une fonction rationnelle de z et t, a, b, α, β des constantes, m et n des entiers variant de $-\infty$ à $+\infty$, je remarque que, si cette série est convergente, elle définit une expression uniforme en x et y admettant les paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$ et se reproduisant multipliée par le facteur a ou le facteur b quand on augmente x et y de la paire de périodes (α, γ) ou (β, δ). On obtient, de cette façon, des séries analogues à celles qu'Hermite prend comme point de départ de la théorie des fonctions doublement périodiques de deuxième espèce.[1] En supposant les constantes a et b égales à l'unité, la série définit une expression quadruplement périodique. On peut se proposer de former, de la même façon, des expressions quadruplement périodiques de troisième espèce, c'est-à-dire des expressions de reproduisant multipliées par une exponentielle, dont

[1] *Annales de l'Ecole Normale*, 3me série, t. II, 1885.

l'exposant est une fonction linéaire de x et y, quand on augmente ces variables d'une paire de périodes. Je montre que, dans l'hypothèse $\beta=\gamma$, on obtient des expressions de cette nature en multipliant le terme général $S_{m,n}$ de la série employée précédemment par le terme général d'une série Θ de deux variables construite avec les groupes de périodes (α, β) et (β, δ). D'une façon générale, l'étude des fonctions uniformes quadruplement périodiques de troisième espèce présente des particularités que nous indiquons dans le paragraphe suivant.

Fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce avec des singularités essentielles. — Soit une fonction quadruplement périodique de troisième espèce de x et y; je suppose essentiellement que l'on ne puisse pas, en multipliant cette fonction par une exponentielle dont l'exposant est du second degré en x et y, la ramener à être quadruplement périodique de première ou de seconde espèce, c'est-à-dire à se reproduire multipliée par l'unité ou par une constante quelconque, quand on ajoute aux variables chacune des quatre paires de périodes.

On sait, d'après un théorème énoncé par Riemann et démontré par Weierstrass, par Picard et Poincaré et par moi-même (58), (59), qu'une fonction quadruplement périodique de deux variables de première espèce qui n'a pas de singularités essentielles à distance finie, peut toujours être ramenée à avoir pour paires de périodes les quantités

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

vérifiant la relation $\beta=\alpha'$. Si la fonction admet des singularités essentielles, les paires de périodes (α, β) et (α', β') sont entièrement arbitraires. M. E. Picard a donné des exemples de fonctions de ce genre.[1] Il en est de même pour les fonctions quadruplement périodiques de deuxième espèce, comme je l'ai montré par des exemples. A cet égard, il y a, entre les fonctions quadruplement périodiques de deux variables de première et de deuxième espèce d'une part, et de troisième espèce d'autre part, cette différence remarquable que, même si une fonction de troisième espèce admet des singularités essentielles, on peut toujours ramener ses périodes à vérifier la relation de Riemann $\beta=\alpha'$.

Je démontre ce théorème (57) et je donne quelques exemples généraux de fonctions ou expressions de deux variables quadruplement périodiques de troisième

[1] *Comptes rendus*, 1er semestre 1889; *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII, p. 131, 1889.

espèce, en suivant une méthode analogue à celle qui sert à former l'élément simple dans la théorie des fonctions doublement périodiques de troisième espèce ou en imitant ce que fait Halphen dans son Traité des fonctions elliptiques, t. 1, p. 468.

Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières. — Fuchs a obtenu, par l'inversion des intégrales de certaines équations différentielles linéaires, des fonctions de deux variables indépendantes x et y qui ne changent pas de valeur quand on remplace x et y par $ax+by+c$ et $a'x+b'y+c'$. Je forme directement, à l'aide de séries ou de produits infinis, des fonctions de cette nature n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie. J'indique d'abord un exemple élémentaire, en composant avec des fonctions Θ une fonction $\varphi(x, y)$ qui vérifie les relations

$$\varphi(x+2\pi i, y)=\varphi(x, y+2\pi i)=\varphi(x+2a, y+x)=\varphi(x, y)$$

et qui admet, par suite, un groupe de substitutions linéaires entières. Viennent ensuite des produits infinis vérifiant les mêmes relations. Je m'occupe enfin (51) de fonctions de trois variables formées avec la fonction suivante, analogue à la fonction Θ,

$$\varphi(x, y, z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^4+4xn^3+6yn^2+4zn}.$$

On peut construire (52) avec cet élément $\varphi(x, y, z)$ des fonctions admettant un groupe de substitutions linéaires entières. Rivereau a déterminé les zéros de la fonction $\varphi(x, y, z)$ (Annales de la Faculté de Marseille, 1892).

Ces travaux aboutissent à l'étude des fonctions Θ du 4^me^ degré (86, 87) (88, 89) (90, 91) et de certaines fonctions de plusieurs variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ qui admettent la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et qui ne changent pas quand on augmente chaque variable $x_2, x_3, \ldots x_n$ de la précédente et x_1 d'une certaine constante.

Autres fonctions de plusieurs variables complexes.

Sur des fonctions uniformes de deux points analytiques qui sont laissées invariables par une infinité de transformations rationnelles. — Les fonctions fuchsiennes de Poincaré sont des fonctions d'une variable laissées invariables par une infinité de substitutions linéaires; M. E. Picard a étudié des fonctions de

deux variables possédant cette même propriété. Je démontre qu'il ne peut pas exister de fonctions uniformes *d'un seul point analytique d'une courbe du premier genre* qui remplissent des conditions analogues. On se demande alors s'il ne serait pas possible de former des fonctions uniformes *de deux points analytiques* (x, y) (x', y') appartenant à une courbe du premier genre, qui gardent la même valeur, quand on remplace les deux points par deux autres points (x_1, y_1) et (x_1', y_1') déduits des premiers par une transformation rationnelle telle que, les deux points (x, y) et (x', y') étant supposés connus, les coordonnées des deux autres points (x_1, y_1) et (x_1', y_1') soient déterminées par des équations du second degré ayant pour coefficients des fonctions rationnelles de (x, y), (x', y') et réciproquement. Je forme (48) des fonctions de cette nature, en m'appuyant sur un problème d'inversion résolu par Rosenhain et sur les propriétés des fonctions abéliennes. La transformation rationnelle réversible, qui n'altère pas les nouvelles fonctions, est susceptible d'une interprétation géométrique simple.

Extension des théorèmes de Weierstrass et de M. Mittag-Leffler à certaines fonctions de deux variables complexes. — Cette extension (45) se rapporte à une classe particulière de fonctions de deux variables: elle est suivie d'une application à la formation de certaines fonctions de deux variables à deux périodes.

Problème de l'inversion des intégrales multiples. — Une intégrale définie simple est une intégrale étendue à une ligne, située dans le plan des variables complexes, dont on donne les extrémités: elle dépend alors des deux variables définissant ces deux extrémités. Je considère de même une intégrale double (77—79) portant sur une fonction donnée mais étendue à un champ dont la définition dépend d'un certain nombre de variables: l'intégrale est alors une fonction de ces variables. En prenant pour la fonction sous le signe d'intégration une fonction algébrique, on peut poser un certain nombre de problèmes analogues aux problèmes classiques sur les intégrales abéliennes, notamment un problème analogue à celui de l'inversion d'après Jacobi.

En supposant, pour simplifier, les variables réelles, prenons, par exemple, pour champ d'intégration, un cercle quelconque du plan

$$x^2+y^2-2ax-2by-c \leqq 0.$$

La définition de ce champ dépend de trois variables a, b, c. Considérons les trois équations

$$\begin{aligned}
&\textstyle\iint dx\,dy &&= u,\\
&\textstyle\iint (x+y)\,dx\,dy &&= v,\\
&\textstyle\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy &&= w.
\end{aligned}$$

On voit facilement que ces trois équations définissent $a+b$, a^2+b^2, c, comme fonctions uniformes de u, v, w (79).

Intégrales eulériennes. — Séries hypergéométriques. — Polynômes.

Intégrales eulériennes et séries hypergéométriques d'une variable. — La fonction hypergéométrique d'une variable définie par la série classique a été étudiée, depuis Gauss, par un grand nombre de géomètres; elles comprend, comme cas particuliers, la plupart des fonctions élémentaires, et les relations auxquelles elle satisfait fournissent, ainsi que l'a montré Gauss, une méthode générale pour le développement de ces fonctions en fractions continues algébriques; cette fonction hypergéométrique joue un rôle important dans beaucoup de questions de Mathématiques pures et appliquées, notamment dans la théorie des fonctions sphériques et dans plusieurs développements en séries employés en Mécanique céleste; elle vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre qui peut lui servir de définition, et c'est en se plaçant à ce point de vue que Riemann a étudié la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ dans un Mémoire qui contient les germes de la théorie des équations différentielles linéaires, telle qu'elle a été développée depuis par Fuchs; enfin, g et h désignant deux des quatre quantités $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$, cette fonction peut être représentée par des intégrales définies de la forme

$$\int_g^h u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du,$$

étudiées par Euler dans le cas $g=0, h=1$, et par Jacobi dans les autres cas; c'est en partant de ces intégrales que Jacobi a trouvé, par des transformations faciles, toutes les solutions de l'équation différentielle de la série hypergéométrique indiquées par Gauss et Kummer.

La théorie de la série hypergéométrique de Gauss est dans un rapport étroit avec celle des intégrales eulériennes qui ont été étudiées à tant de points de vue différents. J'ai obtenu une formule très générale comprenant, comme cas parti-

culiers, un grand nombre d'intégrales définies, exprimables à l'aide de l'intégrale eulérienne Γ, entre autres les intégrales eulériennes de première espèce et les intégrales qui se présentent dans la théorie des polynômes de Legendre et de Jacobi. J'ai montré, en effet (9), que l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha,\beta,\gamma,x)\, F(\alpha+n,\beta-n,\gamma,x)\, dx,$$

où n désigne une constante quelconque, s'exprime au moyen de la fonction Γ, du moment qu'elle est finie; si la constante n est *nulle,* cette intégrale s'exprime au moyen de la fonction eulérienne Γ et de sa dérivée. Parmi les applications de cette formule générale, je donne d'abord (10) la détermination des coefficients du développement de la fonction hypergéométrique de Gauss, en série de polynômes de Jacobi,

$$X_m = F(\alpha+\beta+m, -m, \gamma, x),$$

où m est un entier positif, polynômes représentés par une formule de Jacobi analogue à celle que O. Rodrigues a donnée pour les polynômes de Legendre; les coefficients de ce développement ont des valeurs simples. Puis, supposant m et m' quelconques (non entiers), je calcule (10) l'intégrale

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} X_m X_{m'}\, dx$$

qui, d'après Jacobi, est nulle lorsque m et m' sont des entiers différents; je montre que cette intégrale est encore nulle, quand m et m' sont deux racines *distinctes* d'une équation transcendante, dont le premier membre s'exprime à l'aide de la fonction Γ et dont le second membre est une constante arbitrairement choisie; lorsque l'on prend $m=m'$, l'intégrale est évidemment différente de zéro; je donne alors sa valeur. On peut déduire de ce résultat la détermination des coefficients A_m du développement d'une fonction en série de la forme $\Sigma A_m X_m$, la sommation étant étendue aux valeurs de m qui sont racines de l'équation transcendante citée plus haut; on sait que certains problèmes de Physique conduisent à des développements de ce genre. Peu de temps après leur publication, ces résultats ont été généralisés par Callandreau (Comptes rendus, 14 juillet 1879).

Fonctions hypergéométriques de deux variables. — Plusieurs géomètres, entre autres Clausen[1], Pochhammer[2], Thomae[3], Goursat[4], ont généralisé les résultats donnés par Gauss et Riemann dans la théorie de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ en formant des fonctions hypergéométriques *d'une variable* construites d'une façon analogue à celle de Gauss et vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre supérieur. Antérieurement à Pochhammer, Hermite avait indiqué une intégrale définie analogue à celle d'Euler, contenant *un paramètre variable* et vérifiant une équation differentielle d'ordre supérieur qui comprend, comme cas particulier, celle de Gauss. Je me suis placé à un tout autre point de vue, et je me suis proposé de former des fonctions *de deux variables indépendantes x et y*, analogues à la fonction hypergéométrique de Gauss, en suivant le mode de généralisation qui conduit des fonctions Θ d'une variable aux fonctions Θ de plusieurs variables. Cette question se posait tout naturellement; en effet, les polynômes de Legendre $\frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}$ s'expriment à l'aide de la série de Gauss; or Hermite, ayant étudié les propriétés des polynômes à *deux variables*

$$\frac{\partial^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n},$$

a montré que ces polynômes sont entièrement analogues à ceux de Legendre; on pouvait donc penser qu'il existait des fonctions hypergéométriques de deux variables comprenant, comme cas particuliers, les polynômes d'Hermite, de même que la fonction de Gauss comprend ceux de Legendre. Dans la 2me édition de son *Handbuch der Kugelfunctionen,* Heine commence de la façon suivante (IIe volume, p. 357) l'exposé des résultats que je lui avais communiqués et au sujet desquels il m'avait écrit plusieurs lettres:

»Euler et Pfaff se sont déjà occupés de séries hypergéométriques d'ordre supérieur, c'est-à-dire de séries dans lesquelles, au lieu de deux éléments au numérateur et d'un élément au dénominateur comme dans la série de Gauss, entrent un plus grand nombre d'éléments au numérateur et au dénominateur, de telle manière que la permutation des éléments du numérateur ou de ceux du dénominateur n'altère pas la valeur de la série. Ces séries servent à l'intégration

---

[1] *Journal de Crelle,* t. 3.
[2] *Journal de Crelle,* t. 71.
[3] *Mathematische Annalen,* t. 2.
[4] *Annales de l'Ecole Normale,* 2me série, t. XII.

d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, comme la série de Gauss sert à l'intégration d'une équation du second ordre, et occupent ainsi une place déterminée dans l'Analyse (*voir* un Mémoire de Thomae, *Math. Annalen*, t. II). Elles s'imposent à l'attention par plusieurs propriétés intéressantes, parmi lesquelles je citerai celles que Clausen a données dans le tome III du Journal de Crelle, ... Partant de ce fait que ma généralisation de la série de Gauss avec un facteur q[1] comprend comme cas particulier les fonctions Θ d'une variable, tandis que les Θ d'ordre supérieur contiennent plusieurs variables, je cherchai une généralisation de la série de Gauss contenant *deux variables* et conservant les propriétés essentielles de la série de Gauss. C'est cette généralisation que M. Appell a trouvée . . .»

Voici maintenant l'analyse des principaux résultats que j'ai obtenus dans cette voie:

Je considère (66) quatre séries F_1, F_2, F_3, F_4, qui peuvent être regardées comme autant de généralisations différentes de la série de Gauss. On le reconnaîtra immédiatement en comparant les termes généraux de ces séries au terme général de la série de Gauss: par exemple, les deux séries que j'appelle $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$ et $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$ ont respectivement pour terme général

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+m-1)\beta'(\beta'+1)\cdots(\beta'+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+m-1)\gamma'(\gamma'+1)\cdots(\gamma'+n-1)}\frac{x^m}{1\cdot 2\cdots m}\frac{y^n}{1\cdot 2\cdots n},$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+m+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+m-1)\gamma'(\gamma'+1)\cdots(\gamma'+n-1)}\frac{x^m}{1\cdot 2\cdots m}\frac{y^n}{1\cdot 2\cdots n},$$

les entiers m et n variant de 0 à ∞. Ces quatre séries sont convergentes pour des valeurs de x et y dont les modules sont suffisamment petits: ainsi la série F_2 est convergente quand la somme des modules de x et y est inférieure à l'unité, et la série F_4 quand la somme de leurs racines carrées est inférieure à l'unité. Les quatre séries définissent donc des fonctions holomorphes de x et y dans le voisinage des valeurs $x=0$ et $y=0$; comme pour les fonctions de Gauss, les dérivées partielles de ces fonctions sont des fonctions de même nature. Il existe, pour les fonctions de deux variables, un grand nombre de formules semblables à celles que donne Gauss: *Relationes inter functiones contiguas;* puis des formules permettant de transformer ces fonctions, de les ramener les unes aux autres dans

[1] Cette généralisation de Heine consiste à remplacer, dans le terme général de la série de Gauss, un facteur tel que $\alpha+k$ par l'expression $\frac{1-q^{\alpha+k}}{1-q}$ se réduisant à $\alpha+k$ pour $q=1$.

certains cas particuliers. On peut représenter ces fonctions par des intégrales définies qui rappellent l'intégrale définie d'Euler servant à représenter la fonction de Gauss. Ainsi, en faisant

$$f(u, v)=u^{\alpha-1} v^{\beta-1} (1-u-v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1},$$

on trouve que la fonction F_2 est égale à un facteur constant multiplié par l'intégrale définie double

$$\iint (1-ux)^{-\beta} (1-vy)^{-\beta'} f(u, v)\, du\, dv,$$

prise entre les limites $u \geq 0$, $v \geq 0$, $1-u-v \geq 0$. En partant de cette expression de la fonction F_2, j'étends à cette fonction certaines propriétés que Jacobi a démontrées pour la fonction de Gauss et qui se rattachent au développement de $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ en fraction continue (68).

L'une des propriétés les plus importantes de la fonction de Gauss est qu'elle vérifie une équation linéaire du second ordre: les fonctions de deux variables possèdent une propriété toute semblable. Elles satisfont chacune à deux équations différentielles linéaires simultanées, aux dérivées partielles. Par exemple, la fonction F_2 satisfait aux deux équations différentielles

$$(x-x^2) r - x y s + [\gamma - (\alpha + \beta + 1) x] p - \beta y q - \alpha \beta z = 0,$$
$$(y-y^2) t - x y s + [\gamma' - (\alpha + \beta' + 1) y] q - \beta' x p - \alpha \beta' z = 0,$$

où p, q, r, s, t désignent, comme d'ordinaire, les dérivées partielles premières et secondes de z par rapport à x et y. Les équations que vérifient F_3 et F_4 sont du même genre: elles rentrent toutes dans le type d'équations simultanées de la forme

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

où les a et les b sont des fonctions de x et y telles que $(1-a_1 b_1)$ ne soit pas identiquement nul, et où la condition d'intégrabilité est remplie identiquement, c'est-à-dire quels que soient x, y, z, p, q, s. L'étude de ces équations différentielles s'imposait: elle révèle cette circonstance que les propriétés de l'intégrale générale présentent de nombreux points de ressemblance avec celles de l'intégrale générale d'une équation linéaire à une variable indépendante, telles qu'elles résultent des travaux de Fuchs (116). Ainsi, lorsqu'on connait quatre fonctions linéairement

indépendantes vérifiant les deux équations simultanées, l'intégrale générale de ces équations est égale à une combinaison linéaire de ces quatre fonctions avec des coefficients constants arbitraires. On peut aussi, comme pour les équations linéaires, montrer que, si les coefficients et la quantité $\frac{1}{1-a_1 b_1}$ sont des fonctions développables en séries convergentes procédant suivant les puissances positives croissantes de $x-x_0$ et $y-y_0$, on pourra satisfaire à ces équations par une fonction z développable de la même façon, les valeurs de cette fonction et des trois dérivées p, q, s étant arbitraires pour $x=x_0$ et $y=y_0$. Enfin, si l'on prend quatre intégrales linéairement indépendantes et si l'on suppose que les variables imaginaires x et y décrivent, dans le plan sur lequel elles sont représentées, des courbes fermées, la valeur finale de chacune de ces intégrales est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des valeurs initiales des quatre intégrales. En appliquant ces théorèmes aux équations simultanées que vérifient respectivement les fonctions F_2, F_3, F_4, on arrive à trouver l'intégrale générale de chacun de ces systèmes d'équations simultanées, exprimée à l'aide de quatre fonctions hypergéométriques particulières. On arrive, en outre, à prolonger chacune de ces fonctions à l'extérieur des régions où les séries définissant primitivement ces fonctions cessent d'être convergentes; ce qui permet d'établir des relations fort nombreuses du genre de celles que Gauss donne dans son Mémoire »*Determinatio seriei nostræ per æquationem differentialem*« et dont Kummer a fait plus tard une étude approfondie.

La fonction F_1 se comporte autrement que les trois autres: elle vérifie *trois* équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles du second ordre et non *deux* équations seulement. Je démontre, pour ce système d'équations, des théorèmes analogues aux précédents, avec cette différence qu'un système fondamental d'intégrales est formé de trois fonctions au lieu de quatre. Ces équations admettent un grand nombre d'intégrales exprimables à l'aide de la fonction F_1 par des formules telles que

$$x^l (1-x)^m y^p (1-y)^{m'} F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, t, t'),$$

t et t' désignant des fonctions rationnelles et du premier degré de x et y. J'ai indiqué beaucoup de ces intégrales (69); M. Goursat[1] en étudiant la question d'une manière systématique, en a trouvé jusqu'à *soixante*.

[1] *Comptes rendus*, 23 octobre 1882.

Pour achever le résumé des principales propriétés des fonctions hypergéométriques de deux variables, il nous reste à dire un mot des polynômes qui s'y rattachent. On peut exprimer, à l'aide de la fonction F_2, les polynômes qu'Hermite a indiqués comme généralisation des polynômes de Legendre et des polynômes cos (n arc cos x) (Comptes rendus, t. LX), les polynômes de plusieurs variables qui ont été étudiés par Didon (t. V, VI, VII des Annales de l'Ecole Normale), et les polynômes que j'ai formés (66)

$$U_{m,n} = x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} \frac{\partial^{m+n} [x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1} (1-x-y)^{m+n}]}{\partial x^m \partial y^n},$$

analogues aux polynômes de Jacobi; ainsi

$$U_{m,n} = C F_2(-m-n, m+\gamma, n+\gamma', \gamma, \gamma', x, y),$$

C désignant une constante connue. Ces polynômes possèdent des propriétés semblables à celles des polynômes d'Hermite et des fonctions Y_n de Laplace; la propriété fondamentale est que l'intégrale double

$$\iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{m,n} U_{\mu,\nu} \, dx \, dy,$$

étendue à l'aire du triangle limité par les trois droites $x=0$, $y=0$, $1-x-y=0$ est nulle, tant que $m+n$ est différent de $\mu+\nu$; cette intégrale, au contraire, n'est pas nulle quand $m+n=\mu+\nu$ et j'indique alors sa valeur. Ces formules permettent de calculer les coefficients du développement d'une fonction de deux variables x et y en série procédant suivant les polynômes $U_{m,n}$. Le calcul se simplifie par l'introduction d'un polynôme adjoint exprimable aussi à l'aide de la fonction F_2. Les mêmes propositions s'étendent à des polynômes définis d'une façon plus générale, en ajoutant, dans les polynômes $U_{m,n}$, le facteur $(1-x-y)^{\lambda}$ en avant du signe de différentiation et le facteur inverse sous le signe de différentiation (70). Elles résultent toutes d'une propriété générale des fonctions satisfaisant à l'équation différentielle unique, obtenue en ajoutant les deux équations différentielles de la fonction F_2, et faisant $\beta+\beta'=\delta$, équation qui est intéressante à étudier pour elle-même et dont un grand nombre d'intégrales s'expriment à l'aide des fonctions F_2 et F_4. Cette propriété est la suivante: Les quantités γ, γ', $1+\alpha+\delta-\gamma-\gamma'$ étant supposées positives, soient z une intégrale de l'équation, et z_1 une intégrale de l'équation obtenue en remplaçant α et δ par $\alpha+\lambda$ et $\delta-\lambda$; l'intégrale double

$$\iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1 \, dx \, dy,$$

étendue au même triangle que plus haut est nulle, si les fonctions z et z_1 et leurs dérivées premières restent finies dans les limites d'intégration. Il est intéressant de remarquer que ce théorème comprend, comme cas très particulier, le théorème fondamental relatif aux fonctions $Y_n(\theta, \varphi)$ de Laplace: en effet, l'équation différentielle bien connue, à laquelle satisfont les fonctions Y_n, se ramène à la forme générale précédente par la substitution $\sin\theta \cos\varphi = \sqrt{x}$, $\sin\theta \sin\varphi = \sqrt{y}$; il comprend également, comme cas limite, certaines formules données par Hermite sur les polynômes qui naissent de la différentiation d'une exponentielle dont l'exposant est un polynôme homogène et du second degré en x et y.

Dans les recherches que nous venons d'exposer, les variables x et y sont regardées comme indépendantes. Si on les suppose exprimées en fonction d'une variable t, c'est-à-dire liées par une relation, les quatre fonctions hypergéométriques deviennent des fonctions d'une variable indépendante et vérifient, la première F_1, une équation différentielle linéaire du troisième ordre, les trois autres, F_2, F_3, F_4, des équations différentielles linéaires du quatrième ordre (131). L'ordre de ces équations peut s'abaisser lorsqu'on établit certaines relations particulières entre x et y. Ainsi la fonction F_4 vérifie une équation du troisième ordre quand $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$; de même F_2 quand $x+y=1$. Ces théorèmes, qui peuvent s'étendre à des systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles simultanées, semblables à celles que vérifient nos fonctions, trouvent leur application dans une question posée par Tisserand[1] au sujet d'un développement employé en Mécanique céleste.[2]

Soit $P^{(N)}(p, z)$ le polynôme de degré N en z qui forme le coefficient de Θ^N dans le développement de $(1-2\Theta z+\Theta^2)^{\frac{1-p}{2}}$ effectué suivant les puissances positives de Θ; il s'agit de trouver une formule générale donnant le développement du polynôme $P^{(N)}(p, z)$ suivant les cosinus des multiples de x et y, quand on pose $z=\mu \cos x+\nu \cos y$.

Tisserand détermine le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ de $4 \cos ix \cos jy$ dans ce développement pour les valeurs $p=2, p=3$; et de plus, il montre que, si p est de la forme $2q+3$, q entier, le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$, s'exprime à l'aide d'un polynôme hypergéométrique du second ordre. En calculant directement le coefficient général, j'ai fait voir (73) que,

[1] *Comptes rendus,* 15 et 22 octobre 1883.

[2] Voyez aussi un Mémoire de M. Radau: Sur le développement de l'expression (*Annales de l'Observatoire, Mémoires,* t. XVIII, 1884).

quels que soient le nombre p et les constantes μ et ν, ce coefficient s'exprime à l'aide d'une des fonctions hypergéométriques de deux variables par la formule

$$B_{i,j}^{N,p} = C\mu^i\nu^j F_4\left(\frac{p-1}{2}+\frac{N+i+j}{2}, \frac{i+j-N}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right),$$

le facteur C étant une constante dont je donne la valeur; le développement de la fonction F_4 qui figure dans cette expression, s'arrête de lui-même, car le second élément est un entier négatif. Dans la séance du 19 novembre 1883, Radau a communiqué à l'Académie des Sciences de Paris une méthode permettant d'établir rapidement cette même formule. Mais, dans l'application à la Mécanique céleste, que Tisserand avait en vue, μ et ν ne sont pas indépendantes et l'on a

$$\mu = \cos^2\frac{J}{2}, \qquad \nu = \sin^2\frac{J}{2}, \qquad \mu+\nu = 1.$$

Il est donc important de rechercher quelles simplifications cette relation aporte à l'expression du coefficient $B_{i,j}^{N,p}$. Dans les cas signalés par Tisserand, cette relation permet de le réduire à un polynôme hypergéométrique d'une seule variable du premier ou du second ordre, et, dans ces cas, le coefficient considéré comme fonction de J satisfait à une équation différentielle linéaire du deuxième ou du troisième ordre. Callandreau a montré (Comptes rendus séance du 26 novembre 1883) que, dans le cas général, le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ considéré comme fonction de J vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre, qu'il n'a d'ailleurs pas formée complètement. Au moment où Callandreau a publié cette Note j'étais, de mon côté, arrivé à ce même résultat: je forme (73) cette équation et j'indique les cas dans lesquels elle se réduit au second ordre ou peut être ramenée à celle de la série hypergéométrique d'ordre supérieur.

Dans toutes mes recherches sur mes fonctions hypergéométriques de deux variables, je me suis principalement placé au même point de vue qu'Euler, Gauss, Jacobi, en m'efforçant de montrer que ces fonctions constituent bien l'extension de la fonction de Gauss. Les recherches que M. E. Picard a faites postérieurement, dans une autre direction, sont venues confirmer cette manière de voir. De même que Riemann définit la fonction hypergéométrique de Gauss par ses trois points critiques et les exposants correspondants, M. E. Picard[1] s'est proposé de définir d'une

[1] *Comptes rendus,* mai 1880; *Annales de l'Ecole Normale,* octobre 1881.

façon analogue certaines fonctions de deux variables indépendantes: il retrouve ainsi une de nos fonctions hypergéométrique de deux variables, la fonction F_1. M. Goursat a montré ensuite[1] que les séries F_2 et F_3 sont susceptibles d'une définition analogue.

De nombreux mathématiciens ont généralisé les fonctions sphériques en considérant des potentiels ou des fonctions harmoniques et des formules analogues à la formule de Green, dans l'espace à q dimensions. Les polynômes $V_{m,n}$ qu'Hermite a créés comme généralisation des polynômes de Legendre et associés aux polynômes $U_{m,n}$ peuvent être rattachés à ce point de vue; ce sont de véritables fonctions sphériques sur l'hypersphère dans l'espace à q dimensions.

Les polynômes $U_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues peuvent de même être rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace (82). Ces théories ont fait l'objet de nombreuses recherches de M. Kampé de Fériet; elles ont abouti à un ouvrage que je publie chez Gauthier-Villars en collaboration avec lui.

La littérature relative à cette théorie toute française a été exposée par M. Lambert et moi dans un supplément à l'Encyclopédie des Sciences mathématiques.

Calcul approché des intégrales doubles. — Les polynômes à deux variables analogues aux polynômes de Legendre et aux polynômes cos (n arc cos x) découverts par Hermite (Journal de Crelle, t. 64, et Comptes rendus, t. LX) ont conduit Didon à des résultats intéressants, d'une grande généralité, relatifs à des polynomes $U_{m,n}(x, y)$ de degrés $m+n$ tels que l'on ait

$$\iint K(x, y)\, U_{m,n}\, U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0,$$

tant que $(m-\mu)^2+(n-\nu)^2$ n'est pas nul, $K(x, y)$ étant une fonction donnée et le champ d'intégration ayant une forme déterminée. Certains de ces polynômes peuvent être rattachés aux séries hypergéométriques de deux variables. Les polynômes de Legendre interviennent dans la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales définies simples et les polynômes plus généraux caractérisés par les conditions

$$\int_a^b K(x)\, P_n(x)\, P_\nu(x)\, dx = 0 \qquad (n \gtrless \nu),$$

[1] *Comptes rendus,* 13 et 27 novembre 1882.

dans le calcul approché des intégrales de la forme

$$\int_a^b K(x) f(x)\, dx,$$

où $K(x)$ est une fonction donnée, comme l'ont montré Christoffel, Tchebicheff et Heine.

Il y a lieu de penser que les polynômes d'Hermite et les polynômes de Didon interviendront de même dans le calcul approché des intégrales doubles de la forme

$$I = \int\int K(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$$

K étant une fonction déterminée servant à la définition des polynômes et le champ d'intégration ayant une forme donnée.

Je me suis proposé (76) de mettre ce fait en évidence dans des cas simples pouvant servir de types à une théorie générale. J'ai tout d'abord indiqué quelques propriétés nouvelles des polynômes d'Hermite généralisés par Didon, entre autres une liaison très simple entre une certaine forme quadratique et la notion de polynômes associés introduite par Hermite. Puis, arrivant à l'objet principal du Mémoire, je pose le problème comme il suit. Soient K une fonction de x et y gardant un signe constant dans le champ d'intégration et $f(x, y)$ une fonction développable, dans le champ d'intégration, en une série de puissances entières et positives de x et y; pour évaluer l'intégrale double I, je prends un polynôme $\varphi(x, y)$ de degré p en x et y, contenant par conséquent un nombre $n = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ de coefficients, et je détermine ces coefficients par des équations linéaires en exprimant que le polynôme φ prend la même valeur que la fonction f en n points (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) situés dans le champ d'intégration et n'appartenant pas à une courbe d'ordre p: la valeur approchée de l'intégrale est alors

$$J = \int\int K \varphi\, dx\, dy.$$

Comme le fait Gauss dans sa méthode d'évaluation approchée des intégrales simples, il s'agit ensuite de déterminer les points (x_i, y_i), de manière à obtenir la plus grande approximation possible, au sens de Gauss. Je forme les équations qui déterminent ces points. Sans entrer dans des détails sur le cas général, je me borne ici à indiquer deux résultats particulièrement simples.

Tout d'abord, le cas le plus simple de tous est le cas de $p=0$, $n=1$. On substitue alors à la fonction $f(x, y)$ une constante égale à la valeur qu'elle prend en un point (x_1, y_1) pour le moment inconnu: il s'agit de déterminer ce point de telle façon que l'erreur commise soit la moindre possible. On trouve que le point doit être choisi au centre de gravité du champ d'intégration, la densité en chaque point étant égale à $K(x, y)$. Si l'on forme le polynôme le plus général P *du premier degré,* s'annulant en ce point on démontre que ce polynôme possède la propriété exprimée par l'équation

$$\int\int K P \, dx \, dy = 0;$$

c'est donc le polynôme le plus général du premier degré remplissant les conditions des polynômes de Didon; en l'égalant à zéro, on obtient une droite arbitraire passant par le point fixe cherché.

Voici ensuite un second exemple simple. Supposons que le champ d'intégration soit un cercle de centre O et de rayon 1 et que $K=1$. Prenons trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sur un cercle concentrique, et remplaçons la fonction $f(x, y)$ par un polynôme du premier degré devenant égal à f aux trois points. Pour que l'erreur commise soit la plus petite possible, il faut que les points soient les sommets d'un triangle équilatéral quelconque inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Nous citerons, comme se rattachant à ces recherches, une Note de M. Bourguet (Comptes rendus, 1898, t. 126) et la fin de la thèse de M. Angelesco (Paris 1916).

Fonctions harmoniques de variables réelles.

Théorie générale. — J'ai cherché (120) à étendre les théorèmes de la théorie des fonctions d'une variable complexe aux fonctions *harmoniques*, c'est-à-dire aux fonctions de trois variables réelles, vérifiant, là où elles existent, l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

En convenant de considérer x, y, z comme les coordonnées d'un point M par rapport à trois axes rectangulaires, une fonction F vérifiant l'équation $\Delta F=0$ pourra être définie dans tout l'espace ou seulement dans une portion de l'espace

en exceptant certains points, ou certaines lignes ou certaines surfaces. La théorie de ces fonctions se rapproche tout naturellement de celle des fonctions d'une variable imaginaire $u=x+iy$, si l'on se rappelle que la partie réelle d'une fonction analytique de $x+iy$ vérifie une équation aux dérivées partielles analogue, mais à deux termes seulement. Thomson et Tait ont montré qu'il existe une suite de fonctions harmoniques $V_\nu(x, y, z)$ définies pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de l'indice ν homogènes et du degré ν en x, y, z. Ces fonctions jouent, dans la présente théorie, le même rôle que la partie réelle de l'expression $(a+ib)(x+iy)^\nu$ dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Par exemple, une fonction harmonique uniforme, finie et continue dans l'intérieur d'une sphère ayant pour centre l'origine, y est développable en une série procédant suivant les fonctions V_ν à indices positifs; une fonction harmonique uniforme finie et continue entre deux sphères ayant pour centre commun l'origine, est développable dans cet espace en une double série procédant suivant les fonctions V_ν à indices positifs et négatifs; théorèmes tout semblables à ceux de Cauchy et de Laurent pour les fonctions d'une variable imaginaire. Je montre (119), en général, qu'il existe des développements en série, propres à représenter une fonction harmonique uniforme et admettant des dérivées en tous les points d'un volume limité par des portions de surfaces sphériques, développements qui présentent les mêmes particularités que ceux que j'ai donnés pour des fonctions analytiques d'une variable, holomorphes dans une aire limitée par des arcs de cercle. Je déduis ces propositions du théorème de Green.

Prenant ensuite une fonction harmonique finie, continue et uniforme dans tout l'espace, sauf en certains points singuliers, je m'occupe d'abord de classer ces points en pôles et points singuliers essentiels; ce qui se fait aisément à l'aide des fonctions V_ν; puis je définis le *résidu* de la fonction en un pôle ou en un point essentiel isolé. Les points singuliers étant ainsi classés, j'indique l'expression la plus générale d'une fonction n'ayant que des pôles: une fonction de cette nature doit être regardée comme analogue à la partie réelle d'une fonction rationnelle d'une variable imaginaire: elle est égale à une somme de fonctions de la forme $V_\nu(x-a, y-b, z-c)$ à indices positifs ou négatifs. En supposant ensuite une fonction qui possède un nombre fini de points singuliers, parmi lesquels des points singuliers essentiels, je donne l'expression générale de cette fonction sous forme d'une somme de fonctions n'ayant chacune qu'un point singulier. Je démontre enfin, pour les fonctions harmoniques uniformes, un théorème analogue à celui de Cauchy sur la somme des résidus relatifs aux pôles

situés dans un contour, et un théorème analogue à celui de M. Mittag-Leffler fournissant l'expression d'une fonction harmonique ayant pour pôles, un nombre infini de points donnés, avec des parties principales assignées à l'avance.

Fonctions harmoniques à un, deux ou trois groupes de périodes. — Pour appliquer ces théorèmes généraux à des exemples intéressants par eux-mêmes, j'ai fait (120) une étude générale des $F(x, y, z)$ admettant trois groupes de périodes (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''); j'entends par là que ces fonctions prennent aux points $(x+a,\ y+b,\ z+c)$, $(x+a',\ y+b',\ z+c')$, $(x+a'',\ y+b'',\ z+c'')$ les mêmes valeurs qu'au point (x, y, z). On peut représenter cette propriété par l'image géométrique suivante. Considérons les trois segments de droites partant de l'origine pour aboutir aux trois points (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') et, sur ces trois segments, construisons un parallélépipède; sur les faces de ce parallélépipède, plaçons des parallélépipèdes égaux et orientés de la même façon; puis, faisons la même opération pour les nouveaux parallélépipèdes et ainsi de suite, indéfiniment, de manière à remplir tout l'espace d'un réseau de parallélépipèdes égaux et orientés de la même façon, se touchant par leurs faces égales. La fonction F possède cette propriété, qu'elle reprend les mêmes valeurs aux points placés de la même façon dans tous ces parallélépipèdes. Il suffira, d'après cela, de connaître la fonction F dans un de ces parallélépipèdes que nous appelons *parallélépipède élémentaire,* pour la connaître dans tout l'espace. On voit que ces fonctions sont semblables à la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire $u = x + iy$, qui reprend les mêmes valeurs aux points d'un plan placés de la même façon dans un réseau de parallélogrammes. Cette similitude se poursuit dans la plupart des propriétés; ainsi:

Une fonction à 3 groupes de périodes finie en tous les points d'un parallélépipède élémentaire, est une constante. Si la fonction admet dans un parallélépidède élémentaire un nombre fini de points singuliers, la somme des résidus relatifs à ces points est nulle.

Jusqu'ici ces fonctions sont conçues seulement *in abstracto* il s'agit d'avoir leurs expressions analytiques. Pour cela, je commence par construire, à l'aide d'une série, une fonction $Z(x, y, z)$ vérifiant l'équation du potentiel et présentant la plus grande analogie avec la fonction $Z(u) = \frac{H'(u)}{H(u)}$, à l'aide de laquelle on peut, comme l'a montré Hermite, représenter toutes les fonctions *elliptiques.* La fonction $Z(x, y, z)$ nous permettra, de même, de représenter toutes les fonctions

à trois groupes de périodes ayant dans un parallélépipède un nombre fini de points singuliers: elle est essentiellement définie par la condition d'avoir, pour pôles du premier degré avec le résidu $+1$, *tous les sommets du réseau des parellélépipèdes.* Par l'application du théorème analogue à celui de M. Mittag-Leffler, j'arrive à écrire cette fonction sous forme d'une série qui converge absolument, c'est-à-dire indépendamment de l'ordre dans lequel on prend ses termes. Cette fonction n'admet pas les groupes de périodes (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), pas plus que la fonction $Z(u)$ n'admet les deux périodes des fonctions elliptiques; elle vérifie des équations de la forme suivante

$$Z(x+a, y+b, z+c)-Z(x, y, z)=Ax+By+Cz+E,$$

les lettres A, B, C, E désignant des constantes qui dépendent des neuf quantités $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$; ces constantes sont liées par des relations que l'on établit *à priori* et qui permettent de les calculer dans certains cas, autrement que par des séries, par exemple dans le cas où les parallélépipèdes élémentaires sont des *cubes* (119). La fonction $Z(x, y, z)$ une fois construite, on a très simplement l'expression d'une fonction à 3 groupes de périodes n'ayant que des pôles, par une somme composée de fonctions Z et de leurs dérivées. On peut remplacer Z par une fonction à trois groupes de périodes, mais non harmonique (125). Je donne ensuite l'expression d'une fonction à trois groupes de périodes avec un nombre fini de points singuliers parmi lesquels il y a des points essentiels, puis j'étends à ces fonctions certains résultats que j'avais démontrés auparavant pour les fonctions doublement périodiques. Lorsque l'on fait croître indéfiniment une ou deux dimensions des parallélépipèdes élémentaires, on obtient des fonctions n'ayant que *deux* ou *un* groupe de périodes: parmi ces dernières se trouve une fonction qui a été employée par Chervet pour exprimer le potentiel d'une masse liquide limitée par deux plans parallèles, et traversée par un flux permanent d'électricité. J'ai donné depuis d'autres applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à des questions de *Physique mathématique* du même genre (238): ces applications se trouvent analysées plus loin.

Dans la théorie des fonctions simplement et doublement périodiques d'une variable, les expressions de ces fonctions par des séries simples de sinus et de cosinus sont de la plus haute importance, principalement pour les applications. Je me suis proposé (121), (122), de développer, de la même façon, les fonctions vérifiant l'équation $\Delta F=0$ et admettant *un*, *deux* ou *trois groupes de périodes.* La possibilité de ces développements est certaine d'après le théorème de Fourier.

De même que, dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, les fonctions périodiques les plus simples, après les fonctions périodiques holomorphes, sont celles qui admettent une infinité de pôles distribués régulièrement dans le plan comme cotg u ou snu; dans la théorie des fonctions harmoniques de trois variables x, y, z, les fonctions périodiques les plus simples, après les fonctions périodiques holomorphes en tous les points à distance finie, sont celles qui admettent une infinité de pôles distribués régulièrement dans l'espace, le mot *pôle* étant employé ici dans le sens que nous lui avons donné précédemment. Ces fonctions périodiques se présentent dans la résolution de différentes questions de Physique mathématique, ainsi qu'il résulte d'une remarque de Riemann[1], de plusieurs Notes présentées à l'Académie des Sciences par M. M. Boussinesq[2], de Saint-Venant et Flamant[3], et Chervet[4]. Les développements en séries trigonométriques indiqués se prêtent facilement au calcul numérique; ils présentent une grande analogie avec ceux des fonctions simplement et doublement périodiques d'une variable complexe. Les fonctions dont est donné le développement sont les suivantes:

1°. D'abord une fonction C_1 ayant pour pôles les points de l'axe Ox d'abscisses ma (m entier). Cette fonction est développable en une série procédant suivant les cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{a}$; le coefficient du terme général s'exprime à l'aide d'une intégrale définie qui se rattache aux fonctions de Bessel et qui a été employée par Riemann dans la solution d'une question de Physique mathématique: *Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe*[5]. La fonction que Riemann introduit pour résoudre ce problème est une combinaison linéaire des fonctions C_1; de même la fonction introduite par Chervet[6], dans un autre problème de Physique, est une différence de deux fonctions C_1. Un autre mode de développement de cette fonction a été donné par Lerch (Journal de Jordan, fasc. IV, 1899).

2°. La seconde fonction C_2 a pour pôles les points du plan xOy de coordonnées ma et nb (m et n entiers); elle se présente dans différentes questions de Physique, notamment dans la détermination du potentiel en un point d'une masse

[1] *Schwere, Electricität und Magnetismus,* bearbeitet von HATTENDORFF, p. 84.
[2] 3, 31 janvier, 30 mai 1870.
[3] 3, 10, 24 avril 1882; 12, 19 novembre 1883.
[4] 24 septembre 1883; 11 février 1884.
[5] RIEMANN's *Gesammelte mathematische Werke,* p. 54.
[6] *Comptes rendus,* 24 septembre 1883.

fluide indéfinie, ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle, traversée par un flux d'électricité (239), ou dans l'évaluation des vitesses aux différents points d'un liquide qui s'écoule par le fond d'un vase prismatique à base rectangle[1], enfin dans la détermination de la fonction de Green pour un prisme droit indéfini à base rectangle. Dans tout l'espace situé d'un même côté du plan des coordonnées xOy, par exemple pour toutes les valeurs positives de z, cette fonction et toutes ses dérivées sont développables en séries trigonométriques, procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{a}$ et $\frac{2\pi y}{b}\cdot$ Les coefficients des deux développements précédents s'obtiennent à l'aide d'une formule tirée de la théorie des fonctions Θ.

3°. Enfin la troisième fonction (240) est la fonction $Z(x, y, z)$ qui sert à former des potentiels à trois groupes de périodes, avec cette restriction que les parallélépipèdes élémentaires sont rectangles. Cette fonction intervient dans l'expression de la fonction de Green dans l'intérieur d'un parallélépipède rectangle ou du potentiel d'une masse liquide traversée par un flux permanent d'électricité et ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Je donne un développement de cette fonction en série trigonométrique, valable en tous les points de l'espace compris entre deux faces opposées d'un des parallélépipèdes élémentaires, ces faces étant prolongées indéfiniment: les coefficients de ce développement s'obtiennent, sous forme finie, par l'application des théorèmes généraux relatifs aux fonctions vérifiant l'équation $\Delta V=0$. Ce développement, qui se rapproche de celui de $\log \Theta(x+yi)\,\Theta(x-yi)$, s'appliquera, par exemple, à l'expression de la fonction de Green pour l'intérieur d'un parallélépipède rectangle, telle qu'elle a été donnée par Riemann.

Potentiels multiformes. — Les fonctions précédentes sont des fonctions harmoniques *uniformes* de trois variables réelles. A la suite d'une conversation dans laquelle le professeur M. Klein, de l'Université de Göttingen, m'avait parlé de l'intention qu'il avait d'étudier les fonctions harmoniques non uniformes, analogues aux parties réelles des fonctions algébriques d'une variable complexe, je lui communiquai (126) l'exemple suivant d'une fonction de ce genre. La partie réelle de

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a-ia')^2+(y-b-ib')^2+(z-c-ic')^2}},$$

[1] Voyez différentes Notes de M. Boussinesq (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* séances des 3 et 31 janvier, 30 mai 1870).

où $x, y, z, a, b, c, a', b', c'$ sont réels, est une fonction $W(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta W = 0$ et admettant, pour ligne singulière, un cercle; lorsque le point x, y, z partant d'une position (x_0, y_0, z_0) décrit une courbe fermée C revenant en ce point, la fonction W reprend ou non sa valeur initiale, suivant que la courbe C passe un nombre pair ou impair de fois dans le cercle. On a bien là une propriété analogue à celle de la fonction algébrique $\sqrt{u-a}$ d'une variable complexe u.

Equations différentielles à une variable indépendante — Invariants.

Equations différentielles linéaires à une variable indépendante. — Les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ont été depuis longtemps signalées. Ainsi Lagrange a démontré que, si l'on connaît une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire, on peut abaisser d'une unité l'ordre de cette équation, de même que l'on peut diminuer d'une unité le degré d'une équation algébrique dont on connaît une racine. La théorie du plus grand commun diviseur de deux polynômes et celle de l'élimination ont conduit Libri, Liouville, Brassinne à des théories analogues sur les équations différentielles linéaires; et ces questions ont été reprises et complétées par Thomé et Frobenius (Journal de Crelle, t. 74 et suivants); Frobenius a introduit la notion de l'irréductibilité des équations différentielles linéaires (Journal de Crelle, t. 76) et a démontré, à ce sujet, plusieurs théorèmes importants suggérés, sans doute, par les théorèmes analogues de la théorie des équations algébriques. La décomposition des polynômes en facteurs a été l'origine de la théorie de la décomposition du premier membre d'une équation différentielle linéaire en facteurs premiers symboliques (Floquet, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, année 1879; Supplément). Le Mémoire fondamental de Fuchs (Journal de Crelle, t. 66) qui depuis a été exposé et complété par Tannery (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, année 1874) et qui a pour objet l'étude des fonctions définies par une équation différentielle linéaire, présente plus d'une analogie avec le Mémoire célèbre de Puiseux *Sur les fonctions algébriques* (Journal de Mathématiques, t. XV). Enfin, dans un autre ordre d'idées, la théorie des invariants des formes algébriques a été étendue aux équations différentielles linéaires, dans deux Notes présentées par Laguerre à l'Académie (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXXVIII, p. 116 et 224), dans une Communication de Brioschi à la Société Mathématique de France (Bulletin, t. VII) et dans le Mémoire couronné d'Halphen

Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables (Journal des Savants étrangers, t. XXVIII, N° 1).

Mais il restait une partie des plus importantes de la théorie des équations algébriques qui n'avait pas encore son analogue dans la théorie des équations différentielles linéaires: je veux dire la partie qui traite des fonctions symétriques des racines d'une équation, de la transformation des équations et de l'extension des théories de Galois. C'est ce nouveau Chapitre de la théorie des équations différentielles linéaires que j'ai commencé en m'occupant de l'extension des théorèmes sur les fonctions symétriques et sur la transformation.

J'ai eu d'abord à m'occuper de chercher quelles sont les fonctions des intégrales d'une équation différentielle linéaire qui sont analogues aux fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique. Soient $y_1, y_2, \dots y_n$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre n; les fonctions, analogues aux fonctions symétriques, sont des fonctions algébriques entières de $y_1, y_2, \dots y_n$ et de leurs dérivées qui se reproduisent multipliées par un facteur constant différent de zéro, quand on remplace $y_1, y_2, \dots y_n$ par les éléments $z_1, z_2, \dots z_n$ d'un autre système fondamental. Je forme l'expression générale de ces fonctions et je démontre le théorème fondamental (97, 103) analogue au théorème sur les fonctions symétriques: *Soit*

$$\frac{d^n y}{d x^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} + \cdots + a_n y = 0$$

une équation différentielle linéaire sans second membre; toute fonction algébrique entière de $y_1, y_2, \dots y_n$ et des dérivées de ces fonctions qui se reproduit multipliée par un facteur constant quand on remplace ces fonctions par les éléments d'un autre système fondamental d'intégrales, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées, multipliée par une puissance de $e^{-\int a_1 dx}$.

Comme applications, il convient de citer: 1° une méthode d'élimination de la fonction entre deux équations différentielles linéaires, semblable à l'élimination algébrique par les fonctions symétriques (103); 2° une méthode générale de formation de certains invariants et semiinvariants des équations différentielles linéaires, à savoir ceux qu'il faut égaler à zéro pour exprimer qu'il y a, entre les éléments d'un système fondamental, une relation algébrique à coefficients constants (103); 3° une méthode générale pour la transformation des équations différentielles

linéaires; 4° l'intégration de certaines équations linéaires entre les intégrales desquelles il existe une relation algébrique.

Ces méthodes sont applicables à une classe d'équations différentielles linéaires, à coefficients doublement périodiques, dont on peut toujours trouver l'intégrale générale.

Equations différentielles linéaires à coefficients algébriques. — Supposons que, dans une des équations de M. E. Picard à coefficients doublement périodiques, on remplace la variable indépendante par l'intégrale elliptique de première espèce correspondante; on formera une équation, à coefficients algébriques, dont l'intégrale générale n'aura d'autres points singuliers que des pôles et des points critiques algébriques et pourra s'exprimer par des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles ayant pour exposants certaines intégrales elliptiques de première et troisième espèce. Présenté de cette façon, le théorème démontré par M. E. Picard peut être généralisé de la manière suivante (98).

Soit une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et y, la variable y étant liée à x par une équation algébrique $F(x, y)=0$ de genre p. Je suppose que l'intégrale générale n'ait d'autres points critiques que des pôles ou des points critiques algébriques, à savoir les points critiques de la fonction algébrique y de x; je suppose, de plus, que ces coefficients remplissent des conditions telles que la variation éprouvée par l'intégrale générale, quand le point analytique (x, y) parcourt deux cycles successifs, soit indépendante de l'ordre de succession de ces cycles. Sous ces conditions, l'équation a, pour intégrale particulière, une exponentielle dont l'exposant est composé linéairement avec des intégrales abéliennes de première et troisième espèce, attachées à la courbe algébrique $F(x, y)=0$. Cette intégrale particulière étant déterminée, l'intégration de l'équation linéaire se ramènera à celle d'une équation d'ordre $(n-1)$ à laquelle on pourra appliquer le même théorème et qui admettra une intégrale de la même forme, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'équation soit intégrée. Mais ce résultat est purement théorique car il n'existe pas actuellement de méthode permettant de reconnaître que l'intégrale ne change pas quand on change l'ordre de succession des cycles.

En laissant de côté cette condition de permutabilité des cycles, et imposant seulement aux coefficients de l'équation différentielle des conditions telles que l'intégrale générale n'ait d'autres points singuliers que des pôles, des points critiques algébriques et des points critiques logarithmiques, on peut classer les équa-

tions différentielles remplissant ces conditions en trois espèces correspondant aux trois espèces d'intégrales abéliennes (101). Les équations de première espèce sont celles dont l'intégrale générale *reste partout finie;* la deuxième espèce comprend les équations dont l'intégrale devient infinie, mais seulement à la manière d'une fonction algébrique; enfin la troisième espèce comprend celles dont l'intégrale générale a des points critiques logarithmiques. On se trouve alors en présence de ces questions, qu'on peut résoudre à l'aide des principes de Fuchs: une relation algébrique $F(x, y)=0$ étant donnée, former, parmi les équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients rationnels en x et y, les équations les plus générales de première, de seconde et troisième espèce avec des points singuliers donnés. Ces questions ont été traitées en partie par M. Suchar (Journal de Mathématiques de Jordan, 1902).

Parmi les équations linéaires à coefficients algébriques, j'ai étudié encore (104) des équations différentielles linéaires binômes de la forme

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \psi(x, y)\, z,$$

où $\psi(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et y, la variable y étant liée à x par une équation algébrique de genre p. J'indique le moyen de reconnaître si une de ces équations admet pour intégrale particulière une exponentielle dont l'exposant est une intégrale abélienne, et de trouver cette intégrale si elle existe. En appliquant la méthode générale aux cas $p=0$ ou $p=1$, j'arrive ainsi à intégrer une classe nouvelle d'équations linéaires à coefficients rationnels ou doublement périodiques, dans des cas où l'intégrale générale peut n'être pas uniforme et admettre des points singuliers essentiels. La méthode que j'emploie est basée sur les formules de décomposition en éléments simples, d'après la formule d'Hermite et la formule générale de Riemann-Roch.

Equations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes. — Les équations différentielles linéaires, à coefficients simplement ou doublement périodiques, sont caractérisées par ce fait qu'elles ne changent pas de forme, quand on augmente la variable indépendante d'une ou de deux périodes. On peut concevoir des équations différentielles linéaires possédant une propriété du même genre, mais beaucoup plus générale, et en conclure la propriété suivante d'une de leurs intégrales (108). Soit une équation différentielle linéaire d'ordre n définissant u en fonction de z; je suppose qu'en changeant la fonction et la

variable indépendante, c'est-à-dire en posant $z' = \varphi(z)$, $u' = u\,\psi(z)$, on puisse déterminer les deux fonctions φ et ψ de telle façon que l'équation entre u' et z' reprenne la forme primitive. Il existe alors une intégrale particulière $u = F(z)$ de l'équation proposée, qui vérifie la relation

$$F[\varphi(z)] = A\,\psi(z)\,F(z),$$

A étant une constante. Dans le cas où $n=2$, ces deux fonctions φ et ψ existent toujours, et l'on obtient des résultats déjà signalés par Kummer dans son Mémoire sur la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et étendus depuis par divers géomètres entre autres par Brioschi. Des équations fonctionnelles de ce genre ont été étudiées par Abel, par Schroeder, Korkine et enfin par M. Koenigs[1] à qui l'on doit d'importants théorèmes sur l'existence et l'expression générale des solutions holomorphes de certaines équations fonctionnelles. Ces théorèmes permettent d'étudier et d'intégrer des équations linéaires spéciales rentrant dans le type précédent.

J'admets, avec M. Koenigs, que la fonction $\varphi(z)$ est uniforme dans l'intérieur d'une région R du plan et jouit de la propriété que, si z est intérieur à cette région, il en est de même du point $z_1 = \varphi(z)$; alors, si l'on pose généralement $z_{i+1} = \varphi(z_i)$, les points de la suite $z, z_1, z_2, \ldots z_p$, sont tous à l'intérieur de la région R: ils doivent converger régulièrement vers une limite x qui n'est pas pour $\varphi(z)$ un point singulier essentiel, et qui est un zéro de la fonction $z - \varphi(z)$. Ces conditions étant remplies, je suppose que les coefficients de l'équation différentielle sont *holomorphes ou méromorphes au point limite,* hypothèse qui écarte les équations dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques, ou des fonctions fuchsiennes. Je montre (108) et (109) que toutes ces équations sont intégrables à l'aide de la fonction $B(z)$ introduite par M. Koenigs, et même qu'elles peuvent, par une substitution convenable, être ramenées à avoir leurs coefficients constants. Cette substitution est celle qu'Halphen a employée (Mémoire couronné, *Savants étrangers,* t. XXVIII) pour ramener l'équation à la forme qu'il nomme *canonique:* l'application des théorèmes de M. Koenigs montre que cette forme canonique est à *coefficients constants.*

Lorsqu'on prend le cas particulier où

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

---

[1] Recherches sur les substitutions uniformes (*Bulletin des Sciences mathématiques,* 1883); Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles (*Annales de l'Ecole Normale,* année 1884, supplément); Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles (ibid., novembre 1885).

les équations que l'on obtient sont celles qui ont été intégrées par Halphen (Comptes rendus, t. XCII, p. 779).

On peut étendre une partie des résultats précédents à des équations non linéaires; par exemple, aux équations considérées par Abel[1], par M. R. Liouville[2], par Elliot[3], par Rivereau[4], et par nous-même (110).

Ainsi, les équations homogènes mais non linéaires par rapport à la fonction inconnue u et à ses dérivées $\frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \ldots$, conservent la même forme quand on fait le changement de fonction et de variable

$$u' = u\psi(z), \qquad z' = \varphi(z).$$

Il pourra arriver qu'un choix convenable des fonctions φ et ψ les transforme en elles-mêmes. Si la fonction $\varphi(z)$ remplit les conditions supposées par M. Koenigs et si les coefficients de l'équation sont holomorphes ou méromorphes au point limite x, la considération des invariants permet d'étendre à ces équations une notable partie des résultats précédents.

Equations différentielles non linéaires. Equations réductibles à des équations linéaires. — Parmi les équations différentielles non linéaires, j'ai étudié une classe étendue d'équations *réductibles aux équations linéaires* (107). Ce sont les équations différentielles qui sont algébriques par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées $y', y'', \ldots y^{(n)}$, qui contiennent d'ailleurs la variable indépendante x d'une façon quelconque et dont l'intégrale générale s'obtient, en prenant l'intégrale générale d'une équation linéaire d'ordre $(n+1)$, et en établissant une relation algébrique entre les constantes arbitraires qui figurent dans cette dernière intégrale. J'indique le moyen de reconnaître si une équation différentielle donnée possède cette propriété et de l'intégrer dans le cas de l'affirmative. On a le théorème suivant:

Pour qu'une équation différentielle

$$\psi(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, x) = 0$$

[1] *Oeuvres,* t II, p. 19 et 26.

[2] *Comptes rendus,* 1886 et 1887.

[3] Ibid., 1890, premier semestre.

[4] Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, 1890. Gauthier-Villars.

algebrique entière et irréductible par rapport à une fonction y de x et à ses dérivées admette une intégrale de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_{n+1} y_{n+1},$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ *désignent* $(n+1)$ *fonctions de x linéairement indépendantes et* $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ *des constantes liées par une relation algébrique entière, il faut et il suffit qu'il existe une fonction λ de x telle que l'expression*

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

se décompose en deux facteurs dont l'un soit linéaire et homogène en $y, y', y'', \ldots, y^{(n+1)}$.

Ce dernier facteur, égalé à zéro, donnera une équation différentielle linéaire ayant pour intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$; l'autre facteur, qui est égal à $\frac{\partial \psi}{\partial y^{(n)}}$ pourra donner des intégrales singulières.

Equations différentielles intégrables à l'aide des fonctions Θ de plusieurs variables. — Le théorème de Riemann, donnant les zéros des fonctions Θ, permet de former des équations différentielles algébriques intégrables à l'aide de ces fonctions (94). Prenons, pour simplifier, le cas d'une fonction $\Theta(x, y)$ de deux variables, formée avec les périodes normales des deux intégrales ultra-elliptiques normales de première espèce

$$\int \frac{\alpha u + \beta}{\sqrt{f(u)}}\, du, \qquad \int \frac{\alpha' u + \beta'}{\sqrt{f(u)}}\, du,$$

$f(u)$ désignant un polynôme du cinquième degré

$$f(u) = (a_1 u + b_1)(a_2 u + b_2) \cdots (a_5 u + b_5).$$

Puis, considérons l'équation

$$\Theta(x + A, y + B) = 0,$$

A et B étant des constantes arbitraires. Cette équations définit y en fonction de x; si l'on veut employer un langage géométrique, on peut dire que cette équation définit, par rapport à deux axes rectangulaires, une infinité de courbes qui se transportent parallèlement à elles-mêmes quand les constantes varient. On formera l'équation différentielle du second ordre de toutes ces courbes, en élimi-

nant A et B entre l'équation ci-dessus et ses deux premières dérivées. L'équation différentielle ainsi formée est *algébrique;* la voici:

$$(d x\, d^2 y - d y\, d^2 x)(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 = \sqrt{(\alpha\, d y - \alpha'\, d x)(\lambda_1\, d y - \mu_1\, d x)\cdots(\lambda_5\, d y - \mu_5\, d x)},$$

où

$$\lambda_i = \alpha\, b_i - \beta\, a_i, \qquad \mu_i = \alpha'\, b_i - \beta'\, a_i.$$

Cette proposition peut s'étendre à des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Sur une application du théorème de Poisson. — Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris et dans une Thèse »*Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe*» (Naud, 1901), M. Buhl a indiqué comme extension du théorème de Poisson, la proposition suivante:

Etant donné un système d'équations différentielles simultanées tel que

$$\frac{d x_1}{X_1} = \frac{d x_2}{X_2} = \cdots = \frac{d x_n}{X_n} \tag{1}$$

où les X sont fonctions des x, il existe des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ des x, telles que, si Φ est une intégrale première du système, l'expression

$$\gamma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \cdots + \gamma_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$$

en est une autre.

Je montre (115) que ce théorème peut être déduit du théorème de Poisson, en me servant de la réduction du système (1) à la forme canonique donnée par Liouville.

Invariants des équations différentielles. — On sait que Laguerre a le premier introduit l'idée des invariants d'une équation différentielle linéaire. Il est une classe d'équations qui, à ce point de vue, se présentent tout naturellement après les équations différentielles linéaires et homogènes; c'est la classe des équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées, *mais non linéaires* (110), le degré d'homogénéité étant quelconque. Ces équations partagent, avec les équations différentielles linéaires et homogènes, cette

propriété, qu'elles conservent la même forme quand on prend une nouvelle variable indépendante ou qu'on multiplie la fonction inconnue par un facteur quelconque. Il est alors de la plus grande importance de former les fonctions des coefficients de l'équation et de leurs dérivées qui restent inaltérées dans ces changements, c'est-à-dire les invariants de l'équation différentielle. La théorie des invariants des équations différentielles linéaires, commencée par Laguerre[1] et Brioschi[2] a reçu son complet développement dans le Chapitre III du Mémoire de Halphen: *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables.*[3] M. Roger Liouville[4] a étudié à différents points de vue les invariants de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + a_0 y^3 + 3\, a_1 y^2 + 3\, a_2 y + a_3 = 0.$$

L'idée générale et le fait de l'existence des invariants ont été mis en lumière par Sophus Lie dans son Ouvrage, *Theorie der Transformations-Gruppen,* par Halphen dans une Lettre à Sylvester[5] et par M. Goursat.[6]

Je me suis proposé d'abord de traiter la théorie des invariants des équations différentielles homogènes mais non linéaires, et je me suis attaché presque exclusivement aux équations du second ordre et du second degré, en donnant des méthodes qui puissent s'étendre aux ordres et degrés supérieurs. L'équation générale homogène et du second degré par rapport à une fonction y et à ses dérivées premières et secondes y', y'' est de la forme

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2\, b_1 y' y'' + 2\, b_2 y y'' + 2\, b_3 y y' = 0,$$

les coefficients $a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3$ étant des fonctions de la variable indépendante x. Au point de vue de la théorie des invariants, ces équations se divisent en trois classes, suivant la façon dont la dérivée y'' figure dans l'équation. Dans la premère classe se trouvent les équations pour lesquelles a_0 et b_1 sont nuls; dans la deuxième, celles pour lesquelles a_0 est nul, b_1 étant différent de zéro; dans la troisième se trouvent les équations dans lesquelles a_0 est différent de zéro. Cette classification se trouve justifiée par ce fait que le changement de

---

[1] *Comptes rendus,* t. LXXXVIII, p. 116 et 224.

[2] *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. VII, p. 105.

[3] *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences,* t. XXVIII, N° 1.

[4] *Comptes rendus,* 6 septembre 1886, 12 septembre 1887; *American Journal of Mathematics,* t. X, p. 283.

[5] *American Journal of Mathematics,* t. IX, p. 137.

[6] *Comptes rendus,* 3 décembre 1888.

fonction et de variable transforme une équation d'une classe en une autre de la même classe. Après avoir montré que les équations de la première classe peuvent toujours être transformées en équations *linéaires* du second ordre, j'indique (112), pour les équations des deux autres classes, un moyen simple de former *tous leurs invariants*. Pour cela je réduis ces équations à une forme canonique contenant, pour la seconde classe, *deux invariants absolus*, et pour la troisième *trois*. Tous les autres invariants sont alors des fonctions rationnelles de ces invariants absolus et de leurs dérivées successives par rapport à la variable canonique. Comme application, j'indique les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une de ces équations soit réductible à une autre de même forme à coefficients *constants*, ou pour qu'elle admette un facteur intégrant: ces conditions s'obtiennent en égalant certains invariants à zéro. Dans les équations de la troisième classe, j'étudie en détail celles dont l'intégrale générale est un trinôme homogène du second degré par rapport aux deux constantes arbitraires. On reconnaît qu'une équation possède cette propriété en vérifiant que deux invariants sont nuls; l'intégration est alors facile; à côté de l'intégrale générale, l'équation admet, dans ce cas, *deux intégrales singulières*. Ces recherches ont été étendues à d'autres équations analogues par Rivereau dans sa thèse de Doctorat (Gauthier-Villars, 1890).

Parmi les équations différentielles homogènes d'un ordre et d'un degré quelconques, les plus simples sont les équations à *coefficients constants*. Ainsi qu'on le fait pour les équations linéaires et homogènes, on peut en trouver des solutions ayant la forme spéciale Ce^{rx}. Dans le cas des équations linéaires, les solutions ainsi obtenues sont toutes *particulières*: on peut se demander s'il en est encore ainsi lorsque l'équation différentielle homogène n'est plus linéaire. Je donne (113) la solution de cette question pour les équations différentielles homogènes du second ordre de degré arbitraire. Certaines de ces intégrales peuvent être *particulières*, d'autres *singulières*: j'indique un moyen simple de les distinguer les unes des autres. Il peut arriver que, dans des cas limites, les intégrales de la forme Ce^{rx} soient toutes particulières ou toutes singulières. Je traite, en particulier, à titre d'exemple, le cas d'une équation homogène du second ordre et du second degré qui admet quatre solutions de la forme Ce^{rx}: lorsque deux de ces solutions sont singulières, l'intégrale générale est un polynôme homogène et du second degré par rapport aux deux constantes arbitraires.

J'ai également étudié (112) les invariants des équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_0+a_1 y+a_2 y^2+\cdots+a_n y^n}{b_0+b_1 y+\cdots+b_p y^p} \qquad (p<n),$$

qui conservent la même forme, quand on choisit une nouvelle fonction inconnue η et une nouvelle variable indépendante ξ liées à y et à x par les relations

$$y=\eta u+v, \qquad \frac{d\xi}{dx}=\mu,$$

u, v et μ désignant des fonctions indéterminées de x. On obtient encore, d'une façon simple, les invariants de ces équations relatifs à ce changement de fonction et de variable, en réduisant l'équation à une forme canonique dont les coefficients sont des invariants absolus: un invariant quelconque est alors une fonction de ces invariants absolus et de leurs dérivées par rapport à la variable canonique. Comme application, je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation puisse être réduite à une autre de même forme à coefficients constants, dont l'intégration se ramène immédiatement aux quadratures. Si on laisse de côté l'équation linéaire et l'équation de Riccati, l'équation la plus simple de l'espèce considérée ($n=3, p=0$) a déjà été étudiée par M. Roger Liouville.[1] Je montre qu'on peut la ramener à une forme canonique ne contenant qu'un invariant absolu, dont le numérateur est un invariant relatif donné par M. R. Liouville. On peut écrire les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent lier les coefficients de l'équation primitive pour qu'elle soit réductible à une forme canonique donnée: on arrive, de cette façon, à exprimer les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir ces coefficients pour que l'équation soit réductible à certaines formes intégrables. On peut ramener à ce type ($n=3, p=0$) l'équation différentielle classique qui, pour le mouvement d'un projectile dans un milieu résistant, donne la vitesse v en fonction de l'angle α de la vitesse avec l'horizon (Voyez mon Traité de Mécanique, 2$^{\text{me}}$ édition, p. 354).

Equations aux dérivées partielles.

J'ai étudié certaines équations particulières aux dérivées partielles sans m'occuper de la théorie générale de ces équations.

---

[1] *Comptes rendus,* 6 septembre 1886, 12 septembre 1887.

1°. **Equations hypergéométriques à deux variables.** — Dans mes recherches sur les fonctions hypergéométriques de deux variables, j'ai été amené à m'occuper de l'équation

$$(x-x^2)\,r+(y-y^2)\,t-2\,x\,y\,s+[\gamma-(\alpha+\delta+1)\,x]\,p+[\gamma'-(\alpha+\delta+1)\,y]\,q-\alpha\,\delta\,z=0,$$

qui comprend, comme cas très particulier, l'équation des fonctions Y_n de Laplace.

2°. **Equation d'Euler et de Laplace.** — A la suite d'une Note de Darboux[1], je me suis occupé (118) de l'équation

$$E(\beta,\beta') \qquad\qquad (x-y)\,r-\beta'\,p+\beta\,q=0$$

qui a été traitée par Laplace et dont un cas particulier $\beta'=\beta$ s'était déjà présenté dans les recherches d'Euler relatives à la propagation du son. C'est également à ce cas particulier que se rapportent les résultats que Darboux a indiqués et que je me suis proposé d'étendre à l'équation générale. Après avoir établi le théorème suivant

Si l'on a obtenu une solution quelconque $\varphi(x,y)$ de l'équation $E(\beta,\beta')$, on pourra en déduire la solution plus générale

$$(a\,x+b)^{-\beta}\,(a\,y+b)^{-\beta'}\,\varphi\left(\frac{c\,x+d}{a\,x+b},\ \frac{c\,y+d}{a\,y+b}\right)$$

a, b, c, d désignant des constantes quelconques,

j'indique des solutions particulières de l'équation exprimées par des séries hypergéométriques, la solution *entière* la plus générale et enfin une forme particulièrement simple de l'intégrale générale pour le cas où β et β' sont deux nombres entiers de même signe. Poisson a donné, dans le cas où β et β' sont égaux, une forme de l'intégrale générale qui contient deux fonctions arbitraires sous des signes d'intégration définie; j'ai étendu cette formule de Poisson au cas où β et β' sont quelconques (voir Darboux *Leçons sur la théorie générale des surfaces* 2e vol., Chap. III et IV). L'équation $E(\beta,\beta')$ a été signalée par Lie comme le type des équations linéaires du second ordre admettant trois transformations infinitésimales. Elle se présente dans la théorie de la fonction hypergéométrique F_1.

[1] *Comptes rendus,* t. XCV, p. 69, 10 juillet 1882.

Equation de la propagation de la chaleur. — L'équation $\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ qui se présente dans la théorie de la chaleur, a été l'objet d'un grand nombre de travaux. Intégrée par Fourier, Poisson, Ampère[1], elle a été étudiée en détail par Riemann dans son ouvrage sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique[2], et par Schlaefli, dans un Mémoire inséré au Tome 72 du *Journal de Crelle*. Jordan l'a traitée comme exemple dans le Tome III de son *Cours d'Analyse* (p. 387). M. Boussinesq a résumé les méthodes générales d'intégration propres à cette équation et aux autres équations de la Physique mathématique dans le Tome II de son *Cours d'Analyse infinitésimale (Calcul intégral, compléments)*. Citons encore M^me Kowalevski[3] qui a appliqué à cette équation spéciale les méthodes de Cauchy, en montrant qu'il n'existe pas toujours une intégrale z qui, pour $y=0$ se réduise à une fonction donnée de x: par exemple, cette équation n'a pas d'intégrale qui se réduise à $\frac{1}{1-x}$ pour $y=0$. Darboux[4] a rappelé cet exemple de M^me Kowalevski à propos d'une Note de Méray[5] sur un fait de même nature. L'équation $\delta z=0$ constitue le type le plus important auquel on peut réduire les équations linéaires à coefficients constants dans le cas *parabolique*, comme on le verra dans un Mémoire de du Bois-Reymond (*Journal de Crelle*, t. 104).

J'ai étudié (237) cette équation au point de vue de la Physique mathématique, en supposant x, y, z réels et en m'inspirant des méthodes de Riemann. Je traite d'abord les questions suivantes:

1°. *Chercher toutes les transformations de la forme*

$$z=\lambda(x, y) z', \qquad x'=\varphi(x, y), \qquad y'=\psi(x, y),$$

qui ramènent l'équation à la même forme.

On trouve que la relation entre x, y et x', y' définit une transformation homographique du plan qui remplace ici l'inversion de Thomson pour le potentiel. Ce résultat a été généralisé par Lacour dans sa thèse de Doctorat et par Boulanger (Bulletin de la Société mathématique 1899).

---

[1] *Journal de l'Ecole Polytechnique*, t. X, p. 587.

[2] *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen*, p. 107, 122; 1869.

[3] *Journal de Crelle*, t. 80, p. 22.

[4] *Comptes rendus*, t. CVI, p. 651.

[5] *Ibid.*, p. 648.

2°. *Trouver tous les polynômes vérifiant l'équation.* — Ces polynômes s'expriment simplement à l'aide des polynômes à une variable qu'Hermite[1] a déduits de la différentiation de l'exponentielle e^{-u^2}.

Me servant ensuite d'une formule analogue à la formule de Green déduite de la notion d'équation adjointe due à Riemann, j'établis une importante formule qui me permet de démontrer le théorème suivant:

Une fonction uniforme $z=f(x, y)$ vérifiant l'équation $\delta z=0$, existant dans toute la partie du plan située au-dessous d'une certaine parallèle à l'axe Ox, $y \leq b$ et restant finie ainsi que sa dérivée par rapport à x, dans cette partie du plan, pour toutes les valeurs finies ou infinies de x et y, se réduit à une constante.

On en conclut que l'équation $\delta z=0$ ne peut pas admettre de solution uniforme dans tout le plan, n'ayant aucun point singulier à l'infini, et ayant un seul point singulier $x=a$, $y=b$, à distance finie; car une telle fonction serait constante pour toutes les valeurs de y *inférieures* à b. Il y a donc là une différence remarquable avec les équations linéaires dans le cas elliptique qui admettent des intégrales avec un seul point singulier.

Enfin, je cherche à rendre compte de ce fait que la plupart des solutions simples de l'équation $\delta z=0$ admettent des lignes de discontinuité parallèles à Ox.

Certains des théorèmes établis dans ce Mémoire s'interprètent d'une façon simple dans la théorie de la chaleur: je les reporte à la fin de cette Notice: *Théorie de la Chaleur.*

Equations simultanées aux dérivées partielles. Potentiels et fonctions harmoniques. — Dans une fonction $u+iv$ de $x+iy$ les quantités u et v vérifient les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{1}$$

d'où on déduit immédiatement que chacune de ces fonctions vérifie l'équation du potentiel logarithmique et sont associées ou conjuguées par les relations (1).

Je me suis proposé d'étudier un système analogue à (1) pour le potentiel à trois variables (124, 125). Considérons quatre fonctions X, Y, Z, T de trois variables réelles x, y, z, vérifiant les relations

[1] *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 93, 266.

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x}-\dfrac{\partial Y}{\partial z}+\dfrac{\partial Z}{\partial y}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial y}-\dfrac{\partial Z}{\partial x}+\dfrac{\partial X}{\partial z}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial z}-\dfrac{\partial X}{\partial y}+\dfrac{\partial Y}{\partial x}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}=0. \end{cases}$$

Si l'on en tire $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$, qu'on calcule ensuite $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ et qu'on forme la somme de ces expressions, on trouve *identiquement zéro.* On a un résultat analogue pour X, Y, Z. De sorte que les quatre fonctions X, Y, Z, T sont *harmoniques.*

Je démontre que, dans le système (2), on peut choisir arbitrairement les deux fonctions harmoniques Z et T, et obtenir ensuite les déterminations les plus générales des fonctions X et Y par des quadratures suivies de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z}\right)_0=0$$

définissant φ comme fonction de x et y, l'indice o signifiant que, dans le dernier terme, z est remplacé par une constante z_0.

Le système (2) est un cas particulier d'un système d'équations du même genre (124) où figurent quatre fonctions X, Y, Z, T de quatre variables x, y, z, t qui vérifient chacune l'équation à quatre termes

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0.$$

Equations linéaires simultanées aux dérivées partielles, dont l'intégrale générale contient des constantes arbitraires. — A propos de la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables, j'ai montré que l'on pouvait démontrer, pour certains systèmes d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles, des théorèmes semblables à ceux de Fuchs pour les équations différentielles linéaires à une variable indépendante. Cette similitude nous a conduits, M. E. Picard et moi (117), à étendre, à des équations linéaires simultanées aux

dérivées partielles, le théorème de M. E. Picard relatif aux équations différentielles à coefficients doublement périodiques. Nous considérons d'abord deux équations simultanées du second ordre

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z$$

admettant quatre intégrales communes linéairement indépendantes et ayant pour coefficients a_i, b_i des fonctions des deux variables indépendantes x et y à quatre paires de périodes. Alors, si l'intégrale générale est une fonction uniforme de x et y les équations admettent une intégrale particulière qui se reproduit, multipliée par des facteurs constants, quand on augmente x et y de couples de périodes et qui, par suite, est analogue aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Ce résultat est ensuite étendu à des systèmes plus généraux d'équations simultanées.

Il est à remarquer que, dans certains cas, notre théorème permet d'intégrer une équation différentielle linéaire ordinaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées par une relation algébrique de genre p. Je montre, en effet, que l'intégration d'une équation de cette nature peut être ramenée à celle d'un système de p équations linéaires simultanées aux dérivées partielles dont les eoefficients sont des fonctions abéliennes de genre p, c'est-à-dire des fonctions uniformes de p variables à $2p$ groupes de périodes, système auquel on pourra appliquer notre théorème.

Géométrie.

Théorie des déblais et remblais (165). — J'ai entrepris l'étude du problème des déblais et remblais, proposé par Monge en 1781, pour répondre à la question posée par l'Académie, en 1884, comme sujet de prix Bordin.[1]

L'Académie demandait aux concurrents, *soit l'étude générale du problème des déblais et des remblais, soit la solution dans un cas simple choisi par l'auteur du Mémoire.*

L'étude de ce beau problème remonte à Monge qui, dans un Mémoire publié en 1781, où se trouvent développées d'une manière incidente la théorie des lignes

[1] On trouvera sur mon travail un rapport de DARBOUX dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* décembre 1866.

de courbure et les propriétés des systèmes de rayons rectilignes, s'était posé la question générale suivante:

»*Deux volumes équivalents étant donnés, les décomposer en parcelles infiniment petites et deux à deux équivalentes, se correspondant suivant une loi telle que, si l'on multiplie le chemin parcouru par chaque parcelle, transportée sur celle qui lui correspond, par le volume de cette parcelle, la somme des produits ainsi obtenus soit un minimum.*»

Dans le cas où les volumes peuvent être assimilés à des aires planes situées dans le même plan, Monge résout complètement le problème en remarquant que les routes de transport, lorsqu'elles forment un système continu, doivent détacher dans le déblai et dans le remblai des aires égales. Dans le cas où les routes ne peuvent former un système continu, il présente quelques remarques, complétées depuis par Dupin dans un Mémoire sur le même sujet, qui fait partie des *Applications d'Analyse, de Géométrie et de Mécanique.* Enfin Monge, abordant le cas le plus difficile, celui où le déblai et le remblai sont des volumes, nécessairement équivalents, fait connaître la proposition suivante, qui est la pierre angulaire de cette théorie:

Les routes de transport doivent servir chacune à une infinité de parcelles, et elles sont nécessairement normales à une famille de surfaces parallèles.

Mais il faut avouer que les raisonnements par lesquels Monge est conduit à ce beau théorème n'entraînent, en aucune manière, l'adhésion; ce point essentiel, malgré l'étude nouvelle qui en a été faite par Dupin, attendait encore une démonstration solide et appelait de nouvelles recherches.

Je me suis proposé d'étudier le problème de Monge, de démontrer le théorème général qu'il a énoncé, et de résoudre le problème au moins pour certains cas particuliers.

Tout d'abord par les méthodes de la Géométrie pure, je m'élève de la considération d'un système de points isolés à celle des masses continues. J'énonce, sous le nom de *principe de translation, principe de symétrie,* etc. un certain nombre de propositions simples, dont l'application peut rendre de grands services dans la pratique. Voici, à titre d'exemple, une de ces propositions:

Supposons que le déblai et le remblai soient décomposés en éléments de même masse et que l'on puisse associer ces éléments deux à deux de telle façon que tous les segments $R_i\,D_i$ allant d'un élément du remblai à l'élément correspondant du déblai et prolongés dans le sens $R_i\,D_i$ rencontrent une portion de surface convexe S du côté de la convexité et soient normaux à cette surface, alors le système des routes les plus avantageuses se compose précisément de ces segments $R_i\,D_i$.

Il en est de même, évidemment, si ce sont les prolongements de tous les segments dans le sens opposé qui sont normaux à S du côté de la convexité. En supposant S réduit à un plan ou à un point, on obtient des cas particuliers intéressants.

Dans la deuxième partie, après avoir démontré que les routes forment un système continu ou se décomposent en plusieurs systèmes continus, j'applique la méthode des variations au problème de Monge, et j'établis le théorème fondamental, sans supposer que la densité soit constante à l'intérieur du déblai ou du remblai. Enfin, j'examine le cas où les routes se partagent en plusieurs systèmes continus et j'indique les moyens de déterminer les surfaces séparatrices, c'est-à-dire les surfaces auxquelles viennent aboutir les routes appartenant à deux systèmes différents et contigus.

Dans le cas des aires planes, nous l'avons déjà rappelé, le problème de Monge peut recevoir une solution complète où ne figurent que des quadratures. On devait se demander si, dans l'espace, l'équation aux dérivées partielles donnée par Monge n'est pas, elle aussi, intégrable dans tous les cas et d'une manière générale. Les résultats que j'ai obtenus donnent une réponse complète à cette question. Dans le cas où, par exemple, les volumes se réduisent à des aires planes situées dans des plans parallèles, l'intégration de l'équation de Monge est ramenée à celle des surfaces minima si les aires ont même densité, et à celle des surfaces à courbure constante si les densités sont différentes.

Ces exemples sont précieux, parce qu'ils prouvent que l'on doit renoncer à intégrer dans tous les cas l'équation du second ordre de Monge. Mais, même en supposant l'intégration effectuée, on se trouve en présence de nouvelles et profondes difficultés.

Ces difficultés sont de la nature de celles qui se présentent dans la théorie des surfaces minima. Si l'on considère toutes les surfaces formant une nappe continue passant par une courbe fermée, le calcul des variations apprend que la surface d'aire minimum aura, en chaque point, ses rayons de courbure égaux et de signes contraires. L'équation aux dérivées partielles de cette surface une fois intégrée, la condition à laquelle elle est assujettie, de passer par la courbe, ne permet pas de déterminer complètement les deux fonctions arbitraires dont elle dépend. Il existe une infinité de surfaces minima contenant la courbe; mais ces surfaces ne satisfont pas toutes, on le sait, à la condition, supposée cependant par le calcul des variations, de former une nappe continue reliant les uns aux autres tous les points de la courbe. On ne peut déterminer les deux fonctions

arbitraires qu'en employant des considérations tout à fait indépendantes de la méthode des variations, puisque la condition à laquelle il s'agit de satisfaire est supposée remplie au moment même où commence l'application de cette méthode. Le problème auquel on est ainsi conduit arrête aujourd'hui encore les efforts des géomètres et n'a pu être résolu que dans quelques cas particuliers.[1]

La solution du problème de Monge présente des difficultés analogues et peut-être plus grandes. Les fonctions arbitraires d'une variable, qui entrent dans les équations du système des routes, doivent être déterminées par la condition que les routes forment un système continu, permettant de transporter dans l'ensemble du remblai la totalité des parcelles qui composent le déblai. La condition, évidente *a priori*, que les routes limites soient tangentes à la fois à la surface du déblai et à celle du remblai, ne fait connaître qu'une de ces deux fonctions et il n'existe, comme dans la théorie des surfaces minima, aucune règle fixe et précise conduisant à la solution complète de la question proposée.

Pour éclaircir cette discussion, je traite quelques exemples, parmi lesquels je citerai les suivants qui me paraissent mériter quelque attention. En supposant que le déblai et le remblai sont des aires homogènes équivalentes situées dans deux plans rectangulaires, on trouve que les routes servant au transport sont normales à une surface satisfaisant à une équation aux dérivées partielles qui se transforme en elle-même par la transformation remarquable que Bonnet a indiquée à la page 486 du tome XLII des Comptes rendus. En supposant ensuite que le déblai et le remblai sont des aires homogènes équivalentes situées sur la surface d'une sphère, je démontre que les routes servant au transport sont normales à une surface possédant cette propriété que *la projection du centre de la sphère sur chaque normale se trouve au milieu des deux centres de courbure principaux.* L'emploi du système de coordonnées tangentielles dû à Bonnet me permet d'intégrer l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre définissant ces surfaces; je suis revenu depuis (144) sur l'étude de ces surfaces, en donnant sous une forme simple les expressions des coordonnées d'un de leurs points en fonction de deux paramètres et en indiquant les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques dont les premières peuvent être intégrées dans une infinité de cas comprenant une infinité de surfaces algébriques. J'ai montré en outre que ces surfaces se rattachent d'une façon simple aux surfaces minima et aux surfaces étudiées par Bonnet (Comptes rendus, t. XLII, p. 486); on a par

---

[1] Darboux, *Rapport*, loc. cit.

exemple la construction suivante: *Etant donnée une surface S de Bonnet, on mène en un point M de cette surface le plan tangent P et la normale MN jusqu'au plan xOy: le plan Π parallèle à P et situé à une distance de l'origine égale à la normale MN enveloppe une de nos surfaces.* Cette correspondance entre nos surfaces et celles de Bonnet montre que:

De tout système de routes servant à déblayer une aire plane homogène sur une aire équivalente située dans un plan parallèle, on peut déduire un système de routes servant à déblayer une aire sphérique homogène sur une aire équivalente située sur la même sphère.

Les routes servant au premier déblai seront normales à une surface de Bonnet, les routes servant au second déblai normales à une de nos surfaces. M. Goursat[1] a étudié depuis une classe étendue de surfaces comprenant les précédentes comme cas particulier.

Le problème des *déblais et remblais* a également été traité par A. de Saint-Germain, à l'aide d'une méthode géométrique élégante (Etude sur le problème des déblais et des remblais par A. de Saint-Germain, Imprimerie Le Blanc-Hardel, Caen, 1886).

Involutions d'ordre supérieur. — Les beaux travaux de Chasles, concernant les courbes et les surfaces du second ordre, sont basés en grande partie sur la notion d'involution et d'homographie entre deux éléments géométriques dépendant rationnellement d'un paramètre (points sur une droite, sur une conique, etc. droites passant par un point, tangentes à une conique, ...).

L'involution de Chasles est définie analytiquement par une relation de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C = 0$$

entre les deux valeurs λ_1 et λ_2 du paramètre variable qui correspondent aux deux éléments géométriques considérés. Je me suis proposé d'étudier les propriétés des courbes unicursales, planes ou gauches, de degrés supérieurs, en prenant pour point de départ la notion d'involution d'ordre supérieur entre trois ou plusieurs éléments géométriques dépendant rationnellement d'un paramètre (points sur une courbe unicursale, tangentes, planes osculateurs à une courbe unicursale, etc.). En premier lieu (141, 145), j'ai étudié le cas le plus simple, en prenant une involution du troisième ordre définie par une relation de la forme

[1] *American Journal,* 1888.

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3+B(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)+C(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+D=0$$

qui est l'extension naturelle de la relation de Chasles rappelée ci-dessus; de même que, dans l'involution de Chasles, il y a deux éléments doubles, il y a, dans l'involution du troisième ordre, trois éléments triples obtenus en supposant les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ égales entre elles. L'emploi de cette relation involutive permet de traiter, avec une grande facilité, la théorie des cubiques gauches, dont l'analogie avec les coniques se trouve ainsi mise en évidence à un nouveau point de vue. On a, par exemple, les théorèmes suivants: Une droite qui tourne autour d'un point fixe détermine sur une conique des groupes de deux points en involution: les points doubles sont les points de contact des tangentes issues du point. De même: Un plan qui tourne autour d'un point fixe détermine sur une cubique gauche des groupes de trois points en involution; les points triples sont les points de contact des plans osculateurs issus du point. Les réciproques sont vraies. Une propriété de l'involution du troisième ordre est que les éléments triples sont trois éléments homologues de l'involution: c'est de ce fait simple que résultent immédiatement plusieurs théorèmes importants dont le type est ce théorème bien connu: Les points d'inflexion d'une cubique plane unicursale sont en ligne droite. D'une façon générale, toutes les involutions d'ordre impair $2n+1$ possèdent la même propriété que l'involution du troisième ordre: les éléments $(2n+1)$-uples forment un groupe d'éléments homologues; de là ce théorème général (148):

Soit une courbe unicursale fixe et un faisceau de courbes algébriques tel qu'une des courbes du faisceau soit déterminée par $2n$ points et coupe la courbe unicursale en $2n+1$ points variables; il existe $2n+1$ courbes du faisceau, osculatrices à la proposée, et les $2n+1$ points d'osculation sont sur une courbe du faisceau.

Ce théorème s'étend à des courbes unicursales gauches, coupées par des faisceaux de surfaces algébriques.

Une notion qui ne se présente pas dans l'involution de Chasles et qui joue un rôle important dans les involutions d'ordre supérieur est celle des groupes d'*éléments singuliers.* Si l'involution est d'ordre n, il existe des systèmes de valeurs de $(n-1)$ des éléments tels que le $n^{\text{ième}}$ est *indéterminé;* ces systèmes de valeurs forment les groupes d'éléments singuliers; ils sont définis par deux relations involutives simultanées. Par exemple, pour l'involution du troisième ordre, il existe deux éléments singuliers qui sont imaginaires, quand les trois éléments triples sont réels, et réels, quand deux des éléments triples sont imaginaires.

Après avoir appliqué l'involution du troisième ordre à l'étude des cubiques gauches, j'ai étudié les courbes gauches unicursales du quatrième ordre, en prenant comme point de départ une relation involutive entre quatre éléments, relation qui me conduit à la classification et aux principales propriétés de ces courbes (146, 147).

Ces méthodes peuvent être appliquées à l'étude de toutes les courbes unicursales ou, plus généralement, de tous les systèmes dont les éléments dépendent rationnellement d'un paramètre variable. Mais il est bien intéressant de remarquer que la relation involutive de Chasles, ainsi que les relations involutives d'ordre supérieur dont nous venons de parler, ne sont que des cas particuliers du célèbre théorème d'Abel, sur les intégrales algébriques, appliqué aux courbes unicursales. Les beaux résultats, que Clebsch a obtenus en appliquant le théorème d'Abel à l'étude de la Géométrie sur une courbe[1] se présentent donc à nous comme donnant la généralisation la plus naturelle et la plus profonde de l'idée élémentaire d'involution.

A un point de vue algébrique une relation involutive entre n éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ permet de donner des interprétations intéressantes de l'évanouissement des invariants de la forme obtenue en faisant $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$.

Homographie. — La notion d'homographie entre deux éléments (divisions homographiques, faisceaux homographiques), due à Chasles, peut être aussi étendue utilement à plusieurs éléments. C'est ce que j'ai montré, pour un cas particulier (relation homographique entre trois éléments, avec application aux surfaces du troisième ordre), dans une Communication faite à la Société philomathique en 1879.

Complexes. — On sait que Chasles a démontré l'identité des propriétés des pôles et plans polaires par rapport à une cubique gauche, avec les propriétés des plans et de leurs foyers dans le mouvement hélicoïdal d'un corps solide. J'ai donné (141) de cette importante proposition, une démonstration nouvelle fondée sur la considération de l'involution du troisième ordre. Si l'on se place dans les idées de Plücker, qui prend pour élément de l'espace la ligne droite au lieu du point ou du plan, on peut dire aussi que les tangentes d'une cubique gauche font partie d'un complexe de droites du premier ordre. Il y avait alors deux problèmes à résoudre: 1° Une cubique gauche étant donnée, trouver les

[1] Voyez *Leçons de Géométrie,* publiées par LINDEMANN, traduites par BENOIST, t. III.

éléments du mouvement hélicoïdal ou du complexe correspondant; 2° un complexe de droites de premier ordre étant donné, trouver les cubiques gauches dont les tangentes appartiennent au complexe. Je résous ces deux problèmes en donnant, pour le second, le théorème suivant, qui a été étendu par M. E. Picard[1] aux courbes unicursales d'ordre supérieur: *La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une courbe unicursale du troisième ordre, située dans un plan, puisse être considérée comme la projection sur ce plan d'une cubique gauche ayant son axe perpendiculaire au plan, est que la courbe ait ses trois points d'inflexion à l'infini.*

Passant ensuite aux courbes gauches unicursales du quatrième ordre, je donne (146) les conditions nécessaires et suffisantes pour que les tangentes à l'une de ces courbes appartiennent à un complexe de droites du premier ordre dont je forme l'équation: il existe alors un deuxième complexe qui a des relations simples avec le premier et avec la courbe. Pour obtenir les conditions cherchées, je me sers de ce théorème général (149) que, pour toutes les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe du premier ordre, le déterminant bien connu qui, par son évanouissement, donne les points où le plan osculateur est stationnaire, est un carré parfait. Ainsi, dans le cas actuel, il faut que l'équation du quatrième degré donnant ces points soit un carré parfait. Ces conditions nécessaires sont suffisantes, comme il résulte de l'étude des propriétés des courbes pour lesquelles elles sont satisfaites. Alors les quatre points de la courbe, où le plan osculateur est stationnaire, sont confondus deux à deux avec des points simples en chacun desquels la tangente a trois points communs avec la courbe.

Sur la propriété caractéristique du cylindroïde. — On sait que le conoïde du troisième ordre de Plücker, appelé cylindroïde par Cayley, possède cette propriété signalée par Ball que *le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices rectilignes de la surface est une courbe plane.* — J'ai démontré (164) que le cylindroïde est, en dehors des cylindres, la seule surface réglée possédant cette propriété. Le même théorème a été démontré ensuite par M. Bricard, puis par M. Demoulin (Bulletin de la Société mathématique, t. XXIX).

Lignes qui se conservent dans la déformation d'un milieu. — Extension des théorèmes sur les tourbillons. — Imaginons une transformation ponctuelle uniforme continue et reversible

$$x=f(a, b, c), \quad y=f_1(a, b, c), \quad z=f_2(a, b, c)$$

[1] *Annales de l'Ecole Normale Supérieure,* 1877.

faisant correspondre à chaque point $P_0(a, b, c)$ d'une région de l'espace R_0 un point $P(x, y, z)$ d'une région R, et inversement. Après avoir écrit (90) les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux systèmes de lignes

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

$$\frac{da}{A} = \frac{db}{B} = \frac{dc}{C}$$

se correspondent dans les deux milieux, je donne quelques propriétés de ces lignes correspondantes, propriétés qui généralisent les propriétés des lignes et surfaces de tourbillons indiquées par Helmholtz dans le mouvement des fluides.

Divers. — Je cite rapidement, pour terminer, quelques notes de Géométrie: l'une (152) donnant tous les systèmes de deux familles de courbes orthogonales uniquement composées de coniques; l'autre, démontrant cette propriété que les hélices sont les seules courbes gauches pour lesquelles une droite, invariablement liée au trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale, puisse engendrer une surface développable; la troisième (154) contenant l'étude de certaines courbes qui dépendent d'un paramètre et dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire, et la quatrième (155) déterminant les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée, par une méthode qui rappelle celle de Moutard pour la détermination des courbes *anallagmatiques*.

Mécanique.

On trouvera ci-dessous des renseignements sur des travaux particuliers de Mécanique; mais parmi ces travaux je demande la permission de parler d'abord de ceux qui se rapportent à une nouvelle forme des équations de la dynamique, s'appliquant à tous les systèmes, que les liaisons s'expriment par des relations sous forme finie (systèmes *holonômes* d'après Hertz) ou que les liaisons s'expriment sous forme différentielle *non* intégrable (systèmes *non holonômes*). On sait que les équations de Lagrange s'appliquent aux systèmes holonômes; ces équations montrent que le mouvement du système est défini dès que l'on connaît la demi force vive ou énergie cinétique T en fonction des coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots q_k$, et de leurs dérivées par rapport au temps. Si les liaisons ne sont pas holonômes, le déplacement infiniment petit du système à partir d'une certaine position dépend

des variations arbitraires de k paramètres $q_1, q_2, \ldots q_k$: le mouvement du système n'est plus caractérisé par la conaissance de la seule force vive (195); les équations de Lagrange ne sont plus applicables. Divers géomètres dont le premier paraît avoir été M. Vito Volterra ont donné des équations généralisant celles de Lagrange en restant dans le premier ordre de dérivation. En allant jusqu'au second ordre de dérivation par rapport au temps, on peut avoir des équations toujours applicables: dans ces équations q_i'' désigne la dérivée seconde de q_i par rapport à t. Les nouvelles équations se rattachent au principe de la *moindre contrainte de Gauss.* Formons l'énergie d'accélération du système

$$S = \frac{1}{2} \Sigma m J^2,$$

où J désigne l'accélération du point de masse m; cette expression est du second degré en $q_1'', q_2'', \ldots q_k''$; d'autre part, pour un déplacement quelconque compatible avec les liaisons, on a

$$\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_k \delta q_k.$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\frac{\partial S}{\partial q_1''} = Q_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2''} = Q_2, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_k''} = Q_k.$$

Ces équations peuvent d'ailleurs être appliquées à des cas où les liaisons ne sont plus linéaires (228). M. Beghin s'en est servi dans sa Thèse (Paris 1923) pour exposer la théorie de l'asservissement. Je crois qu'elles ont une portée philosophique très grande: nous ne savons pas quelles sont les liaisons qui produisent les phénomènes physiques; nous ignorons si elles sont holonômes ou non. Il est probable qu'elles ne le sont pas: dès lors les équations précédentes, s'appliquent. Dans cet ordre d'idées, j'ai publié une Note dans les Comptes Rendus (245) en m'appuyant sur certains résultats relatifs à l'électricité donnés par M. Carvallo dans la collection Scientia; le même ordre d'idées a été développé par M. Guillaume dans un article postérieur des Comptes Rendus. J'ai exposé la théorie de ces équations dans le tome III de mon Traité de Mécanique rationnelle et dans le premier fascicule du Mémorial.

La fonction T caractérise un système holonôme, en ce sens que deux systèmes qui, pour un choix convenable des paramètres, ont même fonction T prennent le

même mouvement quand les forces appliquées sont telles que $Q_1, Q_2, \ldots Q_k$ aient les mêmes expressions dans les deux systèmes. Au contraire, on ne peut pas affirmer d'une manière générale, que l'expression de l'énergie cinétique T caractérise un système, car deux systèmes différents peuvent avoir la même expression de T, les mêmes expressions pour $Q_1, Q_2, \ldots Q_k$, et prendre cependant des mouvements différents (195). La forme précédente des équations paraît donc la plus simple qui soit applicable à tous les genres de liaisons et de variables. Cette forme se rattache au principe de la moindre contrainte de Gauss (82); on peut en effet énoncer les équations (E) en disant que les dérivées secondes q_i'' des paramètres indépendants ont à chaque instant les déterminations rendant minimum la fonction du second degré

$$S-(Q_1 q_1'' + Q_2 q_2'' + \cdots + Q_k q_k'');$$

cet énoncé se ramène à son tour au principe de Gauss (193). La fonction S ne peut pas être choisie arbitrairement: elle est assujettie à remplir certaines conditions (196) qu'il serait trop long d'indiquer ici.

J'applique cette forme générale au mouvement d'un corps solide (194), en particulier au mouvement d'un solide pesant de révolution assujetti à rouler sans glisser sur un plan horizontal. Pour le problème du cerceau que j'avais traité antérieurement (210) par une méthode directe, je me suis rencontré avec M. Korteweg pour montrer que l'intégration des équations du mouvement peut être ramené à des quadratures, quand on emploie, comme élément analytique, la fonction hypergéométrique de Gauss.

Une autre question de mécanique sur laquelle j'attire l'attention est la *Tendance des systèmes à échapper au frottement* que j'ai expliquée dans un mémoire du Journal de Crelle. On a ainsi la raison mathématique de faits d'observation journalière: par exemple quand le vent pousse les feuilles sur une route, elles glissent fort rarement et le plus souvent, dès que la chose est possible, se mettent à rouler.

Enfin je citerai certaines publications relatives aux principes mêmes de la Mécanique. Autrefois on concevait *a priori* un mouvement absolu: j'ai essayé de montrer comment on peut rattacher au mouvement d'un système la notion d'axes fixes (235); j'ai aussi cherché à voir comment il conviendrait de modifier les principes de la mécanique suivant le système d'axes considéré comme fixe (254).

Je citerai également les recherches relatives à une équation fonctionnelle (246) pour l'équilibre relatif d'une masse fluide soumise à l'attraction newtonienne

de ses parties et animée d'une rotation uniforme, puis les recherches relatives aux figures d'équilibre des fils dont les éléments se repoussent deux à deux (242); pour ce dernier problème, M. Bratu, professeur à l'Université de Cluj en Roumanie, a traité dans sa thèse (Paris, 1914) le cas où la répulsion est proportionnelle à la distance, cas où on peut remplacer le fil par son centre de gravité.

Enfin, je signalerai une étude du mouvement aérien de sphères légères, étude qui explique certains faits d'expérience par l'introduction d'une résistance de milieu due à la rotation (233) et des recherches sur le mouvement d'ensemble d'une masse fluide soumise à des attractions newtoniennes intérieures et extérieures (256), (257) et (255).

Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps dans les problèmes de Mécanique. — On sait que les fonctions elliptiques donnent la solution complète du problème du pendule simple, en permettant d'exprimer le sinus et le cosinus de l'angle d'écart par des fonctions uniformes du temps, aisées à calculer numériquement. Ces fonctions admettent une période réelle T qui est la durée de l'oscillation et une période imaginaire de la forme $i\,T'$ qui, au premier moment, ne paraît pas avoir de signification mécanique. Or cette période imaginaire s'interprète de la façon la plus simple (171): si le pendule était placé dans la même position initiale et la pesanteur changée de sens, c'est-à-dire dirigée vers le haut, le pendule oscillait sur l'arc supérieur de la circonférence qu'il décrit, et la durée de l'oscillation serait précisément T'. Cette interprétation résulte du théorème général suivant:

Etant donné un système de points matériels assujettis à des liaisons indépendantes du temps t et soumis à des forces qui ne dépendent que des positions des différents points, les intégrales des équations différentielles du mouvement de ce système restent réelles si l'on y remplace t par $t\sqrt{-1}$ et les projections des vitesses initiales $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ par $-\alpha_k\sqrt{-1}, -\beta_k\sqrt{-1}, -\gamma_k\sqrt{-1}$. Les expressions ainsi obtenues sont les équations du nouveau mouvement que prendraient les mêmes points matériels si, placés dans les mêmes conditions initiales, ils étaient sollicités par des forces respectivement égales et opposées à celles qui produisaient le premier mouvement.

Cette méthode ne donne rien quand le mouvement a lieu sans l'intervention de forces autres que les forces de liaison, c'est-à-dire quand le monvement est géodésique: en particulier elle ne donne rien pour le mouvement à la Poinsot: pour ce dernier mouvement j'ai indiqué une méthode spéciale (209), pour inter-

préter la période imaginaire des fonctions elliptiques qui figurent dans la solution analytique de Jacobi.

Le théorème général peut se rattacher aussi aux équations d'homogénéité en mécanique.

Chaînette sphérique. — L'analogie entre les propriétés de l'équilibre des fils et celles du mouvement d'un point matériel se retrouve jusque dans certains faits très particuliers. C'est ainsi que la recherche de la figure d'équilibre d'une chaînette homogène pesante sur une sphère peut être effectuée par une méthode toute semblable à celle qu'Hermite a employée, en intégrant une équation de Lamé, pour exprimer, en fonction uniforme du temps, les coordonnées d'un point pesant mobile sur une sphère (Journal de Crelle, t. 85). On trouve (173) que les coordonnées d'un point de la chaînette sphérique et l'arc de cette courbe peuvent être exprimés en fonction uniforme d'un paramètre, à l'aide des fonctions Θ et H de Jacobi; en faisant les calculs, on rencontre et l'on intègre une équation différentielle linéaire, analogue à celle de Lamé.

Mouvement d'un fil dans un plan fixe. — Parmi les systèmes matériels non rigides formés d'une infinité d'éléments, le plus simple est un fil ou une chaîne mobile dans un plan fixe sous l'action de forces données. Si on laisse de côté le problème des cordes vibrantes et, en général, la théorie des oscillations infiniment petites, le problème du mouvement d'une chaîne dans un plan a été peu étudié. Les résultats les plus importants et les plus simples sur ce sujet sont dus à Résal (Traité de Mécanique générale, t. I, p. 321 et suiv.). Résal forme deux équations simultanées aux dérivées partielles, de l'intégration desquelles dépend la solution du problème; puis il ajoute que l'élimination de la tension entre ces deux équations conduit à une équation aux dérivées partielles du *sixième ordre*. En employant un système de coordonnées tangentielles, j'arrive (183) à ramener la solution du problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du *quatrième ordre* seulement. Voici une analyse rapide de la méthode suivie. A l'instant t la chaîne est disposée suivant une certaine courbe; appelons α l'angle que fait la tangente à cette courbe, en un point, avec l'axe Ox et δ la distance de cette tangente à l'origine des coordonnées; cette distance δ sera une fonction des deux variables indépendantes α et t; je prends alors, pour fonction inconnue p, une fonction dont la dérivée partielle par rapport à α est δ. C'est cette fonction p des deux variables α et t qui vérifie une équation

aux dérivées partielles du quatrième ordre; une fois p connu, les expressions des coordonnées d'un point de la courbe, de l'arc et de la tension s'obtiennent très aisément.

A toute intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles, correspond un mouvement possible du fil, à condition que la tension soit positive. Par exemple, en supposant que la force extérieure dépende uniquement de la position de l'élément du fil, on retrouve, pour les courbes planes, le résultat de Léauté[1] relatif à la figure de repos apparent d'une corde en mouvement dans l'espace. Il suffit, pour cela, de chercher à vérifier l'équation par une intégrale particulière de la forme $\varphi(\alpha)+\psi(t)$; on trouve ainsi que le glissement du fil est uniformément accéléré, et que la figure de repos apparent est la figure d'équilibre que prendrait le fil si la composante tangentielle de la force était augmentée d'une constante. Léauté, se plaçant au point de vue pratique, n'a considéré que le cas où le glissement est *uniforme*. Je résous le même problème, en supposant le fil hétérogène, puis je trouve les mouvements qui peuvent être représentés par un glissement le long d'une courbe animée d'un mouvement de translation ou de rotation, ou restant homothétique d'elle-même, etc. . . Toutes ces questions sont traitées par un procédé uniforme et ramenées à un même problème d'Analyse. Enfin ma méthode se prête facilement à l'étude des oscillations infiniment petites autour d'une position d'équilibre stable. Cette méthode a été étendue au mouvement dans l'espace par Floquet, de l'Université de Nancy.

De l'homographie en Mécanique. — »La découverte des *principes de projection centrale* marque incontestablement une époque importante dans l'histoire de la Géométrie moderne. Les méthodes fondées sur ces principes possèdent un caractère à la fois intuitif et systématique, qui les rend également propres à découvrir de nouvelles propriétés des figures et à rattacher tout un ensemble de propositions à une même vérité générale.«[2] Il m'a paru intéressant de montrer que ces mêmes principes peuvent être appliqués, en Mécanique, au mouvement d'un ou de plusieurs points libres sollicités par des forces qui ne dépendent que des positions des points. On peut, par exemple, à l'aide de la transformation homographique, rattacher les unes aux autres des questions de Mécanique en apparence différentes, comme le mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance et le mouvement d'un point attiré par un plan

---

[1] *Comptes rendus*, 10 novembre 1879; *Bulletin de la Société philomatique*, 18 novembre 1879.

[2] Moutard, *Applications d'Analyse et de Géométrie de Poncelet*, t. I, p. 509.

fixe en raison inverse du cube de la distance. Voici l'exposé de la transformation pour le cas le plus simple possible, c'est-à-dire pour le mouvement d'un point matériel M, dans un plan fixe, sous l'action d'une force F *dépendant seulement de la position du mobile*. Si l'on fait, sur les coordonnées x et y du point M, une transformation homographique par les formules connues

$$x_1 = \frac{a x + b y + c}{a'' x + b'' y + c''}, \quad y_1 = \frac{a' x + b' y + c'}{a'' x + b'' y + c''}$$

en remplaçant le temps t par une autre variable t_1 liée à t par la relation

$$k\, d t_1 = \frac{d t}{(a'' x + b'' y + c'')^2} \qquad (k \text{ constant}),$$

on trouve (175) que le point M_1 de coordonnées x_1 et y_1 se meut, dans le temps t_1, comme un point matériel sollicité par une force F_1 dépendant uniquement *de la position du mobile*: la trajectoire du second point M_1 est la *transformée homographique* de celle du premier M; la force F_1 se déduit de F d'une manière simple, sa direction est la *transformée homographique* de la direction de la force F. Il résulte de cette dernière propriété que, si la force F est centrale ou parallèle à une direction fixe, la force F_1 passe aussi par un point fixe à distance finie ou infinie. Notre transformation comprend, comme cas particulier, deux transformations qu'Halphen a indiquées[1] pour conclure des lois de force bien connues (attraction proportionnelle à la distance ou inversement proportionnelle au carré de la distance), les lois de force signalées par Darboux et Halphen, comme étant les plus générales qui font décrire à leur point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales. On doit se demander maintenant s'il existe, en Mécanique comme en Géométrie, des transformations plus générales que la transformation homographique qui seraient obtenues en remplaçant les fonctions linéaires figurant dans les formules précédentes par d'autres fonctions des coordonnées x et y. On arrive par un calcul un peu long, à la conclusion suivante: *Si la nouvelle force F_1 doit dépendre uniquement de la position du mobile M_1, quelle que soit la force F, la seule transformation réalisant cette condition est la transformation homographique.* Ces considérations peuvent être étendues au mouvement d'un point dans l'espace et même au mouvement de plusieurs points, à condition de faire, dans ce dernier cas, une transformation

[1] *Bulletin de la Société philomathique*, 7me série, t. I, p. 89.

homographique générale contenant à la fois les coordonnées de tous les points. Comme application de ces méthodes, j'indique un moyen de trouver les lois de forces centrales faisant décrire à leur point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales. Ces lois de forces ont été déterminées simultanément par Halphen et Darboux, à la suite d'une question posée par J. Bertrand. Je simplifie (208) notablement le calcul d'Halphen en employant la transformation homographique pour ramener le cas des forces centrales à celui des forces parallèles.

Sur des transformations de mouvements. — A la suite d'une remarque de M. Goursat, j'ai généralisé la théorie de l'homographie en Mécanique (171) de la façon suivante.

Soit un système matériel holonôme dont les liaisons sont indépendantes du temps et dont la position est définie par n paramètres $p_1, p_2, \ldots p_n$. Si ce système est sollicité par des forces dépendant des positions et des vitesses des points d'application, les équations du mouvement sont, d'après Lagrange,

$$\frac{d}{d t}\left(\frac{\partial S}{\partial p_\alpha'}\right)-\frac{\partial S}{\partial p_\alpha}=P_\alpha, \quad p_\alpha'=\frac{d p_\alpha}{d t} \tag{1}$$

S désignant la demi-force vive du système. Les quantités P_α sont des fonctions de $p_1, p_2, \ldots p_n, p_1', p_2', \ldots p_n'$; dans le cas particulier où les forces ne dépendent que de la position du système, les P_α ne contiennent pas de dérivées p_α'.

A côté de ce premier système qui se meut dans le temps t, considérons un deuxième système dont la configuration dépend de n paramètres $q_1, q_2, \ldots q_n$ et qui se meut dans le temps t_1, sous l'action de forces quelconques. Les équations du mouvement de ce système sont

$$\frac{d}{d t_1}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha, \quad q_\alpha'=\frac{d q_\alpha}{d t_1}, \tag{2}$$

les quantités Q_α dépendant des q_α et de leurs dérivées q_α'. On devra considérer les deux problèmes de Mécanique comme *équivalents*, s'il existe une transformation de la forme

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \varphi_\alpha(p_1, p_2, \ldots p_n) \\ d t &= \lambda(p_1, p_2, \ldots p_n)\, d t_1 \end{aligned} \tag{3}$$

transformant le système des équations (2) dans le système (1).

Je démontre (177) que, si l'on n'impose aucune condition aux forces, on peut, d'une infinité de manières, faire correspondre à tout mouvement de l'un des systèmes, sous l'action de forces dépendant des positions et des vitesses, un mouvement analogue de l'autre.

Je particularise ensuite le problème en cherchant si, à tout mouvement du premier système, sous l'action de forces *ne dépendant que de la position* du système, on peut faire correspondre un mouvement analogue du second. J'établis que la transformation n'est possible que si certaines relations de condition ont lieu entre les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ des deux formes S et T. De plus, *si la transformation existe, elle doit faire correspondre à un mouvement du premier système, quand aucune force n'agit sur lui, un mouvement analogue du deuxième.* En un mot, la transformation doit conserver les mouvements *géodésiques*. On se trouve ainsi amené à une question qui a été étudiée par Beltrami, Lipschitz, Dini, dans leurs travaux sur les formes quadratiques de différentielles, et par S. Lie.

M. Painlevé (Comptes rendus, 1892) a donné sur ce genre de transformations d'importants théorèmes qu'il faut rapprocher de plusieurs Notes de M. R. Liouville (Comptes rendus, 1892).

Il est évident que l'on peut toujours, pour un système quelconque, employer la transformation $dt = C dt_1$, C étant une constante réelle ou purement imaginaire (voyez Stäckel, Crelle, t. 107); mais, pour des systèmes spéciaux, il en existe d'autres. Par exemple, pour des points matériels libres, on peut employer une transformation homographique (177); pour un point mobile sur une sphère, on peut employer une transformation par projection centrale sur un plan. Enfin, comme l'a montré M. Dautheville (Comptes rendus et Annales de l'Ecole Normale Supérieure, t. VII, 1890) on peut transformer le mouvement d'un point sur une surface à courbure totale constante en un mouvement plan (ce qui correspond à un théorème de J. Beltrami), et, plus généralement, on peut transformer le mouvement d'un point sur une surface en un mouvement d'un point sur une autre surface (non applicable), si la première surface satisfait aux conditions trouvées par Dini, pour que les lignes géodésiques se correspondent.

Extension des équations de Lagrange au cas du frottement. — En combinant le principe des vitesses virtuelles et le principe de d'Alembert, Lagrange a réduit à un procédé uniforme la mise en équations de tous les problèmes de Mécanique. Lorsque certains points du système glissent *avec frottement* sur des surfaces, on peut évidemment employer encore la méthode de Lagrange, mais à

condition d'ajouter aux forces directement appliquées les forces de frottement dont les grandeurs sont inconnues, puis-qu'elles sont proportionnelles aux réactions normales des surfaces; il faut ensuite éliminer ces grandeurs inconnues. J'ai modifié (198) la méthode de Lagrange de manière à obtenir des équations du mouvement ne contenant ni les forces de liaison, ni les forces de frottement. La méthode que j'emploie consiste à appliquer le principe de d'Alembert, en imprimant au système un déplacement virtuel qui est compatible avec les liaisons sans frottement et dans lequel chaque point frottant se déplace normalement à la réaction totale de la surface sur laquelle il glisse. Cette méthode permet d'appliquer au cas du frottement les équations données par Lagrange.

Du tautochronisme dans un système matériel. — Le tautochronisme dans le mouvement d'un point a été l'objet de nombreuses recherches; il ne semble pas que l'on se soit occupé du tautochronisme des systèmes. J'ai traité cette question (186) en posant le problème comme il suit: *Imaginons un système à liaisons indépendantes du temps, possédant k degrés de liberté, sollicité par des forces connues ne dépendant que de la configuration du système; quelles nouvelles liaisons, au nombre de $k-1$, faut-il imposer au système pour que le système à liaisons complètes ainsi obtenu soit tautochrone, c'est-à-dire mette le même temps à revenir à une position déterminée, quelle que soit la position initiale dans laquelle on l'abandonne à lui-même sans vitesse?*

Je montre que la résolution du problème dépend de l'intégration de deux équations simultanées; si donc k est supérieur à 2, il y a indétermination: la question comporte une infinité de solutions. Pour déterminer le problème, on peut s'imposer $k-2$ conditions nouvelles, par exemple, assujettir le système final à liaisons complètes, à posséder la propriété du tautochronisme, non seulement à l'égard des forces données, mais encore à l'égard de $k-2$ autres systèmes de forces. Ainsi, pour un point matériel libre, on obtient un problème déterminé en cherchant sur quelle courbe il faut le faire glisser, pour qu'il y ait tautochronisme à la fois pour la pesanteur et pour une attraction issue d'un point fixe et fonction de la distance.

Propriétés d'une position d'équilibre d'un système. — Lorsqu'un système holonôme dont les liaisons sont indépendantes du temps est sollicité par des forces dérivant d'une fonction de forces U, la recherche des positions d'équilibre du système se trouve ramenée à la recherche des maxima et minima de cette

fonction U regardée comme fonction des paramètres indépendants qui servent à définir la configuration géométrique du système.

En partant de cette propriété bien connue qui est une conséquence immédiate du principe des vitesses virtuelles, on peut, même pour un système sollicité par des forces ne dérivant pas d'une fonction de forces, assigner une infinité de fonctions devenant maxima ou minima *dans une position d'équilibre donnée du système.* On obtient ainsi (181) des théorèmes donnant des propriétés de la position d'équilibre considérée mais ne permettant pas, en général, de trouver cette position, car l'énoncé de ces propriétés suppose connue la position d'équilibre. Je rattache à ce point de vue des théorèmes de Lagrange (principe de Torricelli) et de Möbius (principe du minimum de la somme des carrés des distances).

Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions. — Dans le *Messenger of Mathematics* (t. IV, 1867), Niven a montré comment les équations de Lagrange peuvent être employées utilement pour l'étude des percussions: la même question a été traitée par Routh (*Rigid Dynamics,* I[er] volume). Mais la méthode suivie par ces auteurs peut être perfectionnée, car les équations qu'ils donnent contiennent encore des percussions de liaison provenant des liaisons nouvelles introduites brusquement au moment du choc. Ces équations ne répondent donc pas entièrement au but poursuivi par Lagrange, qui est d'obtenir des équations ne contenant pas les forces de liaison. Je montre comment on peut atteindre ce but (202) et (203).

Imaginons un système en mouvement dans lequel les liaisons ont lieu *sans frottement.* La manière la plus générale de concevoir un choc ou une percussion sur ce système paraît être la suivante: à un instant donné t_0, on introduit brusquement de nouvelles liaisons dans le système et, en même temps, on supprime brusquement certaines liaisons anciennes. Le mouvement du système est alors troublé: il se produit des percussions entre ses différentes parties et, dans un intervalle de temps très court t_1-t_0 les vitesses des différents points du système subissent des variations finies, sans que le système change sensiblement de position; en outre, l'action des forces ordinaires, telles que la pesanteur, peut être regardée comme négligeable pendant l'intervalle de temps t_1-t_0, de sorte que les changements brusques de vitesses survenus dans cet intervalle sont dus uniquement aux percussions qui se produisent sur les différentes parties du système, en vertu des liaisons imposées à ces parties. Je ne m'occupe que de la première approximation qui consiste à regarder le système comme immobile pendant le temps très

court $t_1 - t_0$ et à regarder comme nulles les actions des forces ordinaires, autres que celles qui produisent les percussions.

Tout d'abord, je fais une classification des liaisons qui existent au moment t_0 où le choc se produit. Il est entendu que le choc est terminé et a produit tous ses effets à l'instant t_1, extrêmement rapproché de t_0.

Les liaisons qui existent au moment du choc peuvent être de deux espèces: les unes sont persistantes, les autres ne le sont pas. Nous appelons *persistantes* les liaisons qui, existant au moment du choc, existent encore après, de telle sorte que le déplacement réel qui suit immédiatement le choc soit compatible avec ces liaisons. Au contraire, les liaisons *non persistantes* sont celles qui, existant au moment du choc, n'existent pas après; le déplacement réel qui suit immédiatement le choc n'est pas compatible avec ces liaisons.

D'après cela, les liaisons existant au moment du choc peuvent être classées dans les catégories suivantes, qui s'excluent:

1°. Liaisons existant avant, pendant et après le choc;

2°. Liaisons existant pendant et après, mais non avant;

3°. Liaisons existant avant et pendant, mais non après;

4°. Liaisons existant seulement pendant le choc, mais n'existant ni avant ni après.

Les deux premières catégories contiennent des liaisons persistantes, les deux autres des liaisons non persistantes.

Par exemple, dans le pendule balistique, le pendule est mobile autour d'un axe fixe; cette liaison existe avant, pendant et après la percussion; le boulet, primitivement indépendant du pendule, vient brusquement faire corps avec lui; on a ainsi une nouvelle liaison dont la brusque réalisation produit le choc et qui existe pendant et après le choc, mais non avant. Quand deux corps élastiques se choquent, une liaison est brusquement introduite dans le système des deux corps, car leurs surfaces sont venues en contact; les deux corps se séparent ensuite; on a ainsi une liaison existant pendant la percussion, mais n'existant ni avant, ni après. Enfin imaginons deux points reliés par un fil inextensible et lancés en l'air: supposons qu'on saisisse brusquement l'un des deux points et qu'à ce moment le fil se rompe, alors on voit qu'une liaison a été brusquement introduite d'une façon persistante, car un des points devient et reste fixe; en même temps une liaison, existant avant le choc, n'existe plus après, car le fil s'est rompu; cette liaison rentre dans la troisième catégorie.

En vertu des liaisons de la première catégorie, la configuration du système

dépend de k paramètres $q_1, q_2, \ldots q_k$ et la demi force vive T est une fonction du deuxième degré des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$ par rapport au temps. On peut toujours choisir ces paramètres de façon que les liaisons des deuxième, troisième, quatrième catégories s'expriment par des relations de la forme

$$q_1=0,\ q_2=0,\ \ldots,\ q_c=0, \qquad (c<k).$$

Les vitesses finales du système possèdent alors la propriété suivante:

Les dérivées partielles de T, par rapport aux dérivées de ceux des paramètres qui ne sont pas assujettis à s'annuler au moment du choc, ont les mêmes valeurs avant et après le choc.

Le nombre des inconnues est en général supérieur à celui des équations. Pour achever de déterminer le problème, il faut faire des hypothèses particulières, tirées de considérations d'élasticité par exemple, sur ce qui se passe après le choc. On a, de ce fait, un exemple élémentaire, en prenant le choc direct de deux corps sphériques et en écartant le cas où les corps sont parfaitement mous; alors la liaison brusquement introduite ne persiste pas après le choc, car les deux sphères se séparent. La Mécanique rationnelle fournit, entre les vitesses des deux sphères après le choc, *une seule équation* exprimant que la vitesse du centre de gravité commun n'a pas changé. On obtient la seconde équation par des considérations d'élasticité: ainsi en supposant les sphères parfaitement élastiques, on écrit que la force vive totale est la même après et avant le choc. Le problème est complètement résolu par la règle énoncée toutes les fois que les liaisons des troisième et quatrième catégories n'existent pas, ou, ce qui revient au même, toutes les fois que les liaisons existant au moment du choc sont toutes *persistantes*.

Sur l'équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide. — Guyou a publié, sur l'équilibre d'un vaisseau avec un chargement liquide, d'importants travaux[1] qui se trouvent résumés dans l'Ouvrage intitulé: *Théorie du Navire*. Le même sujet a été traité par Duhem, qui a donné des formules générales renfermant la solution du problème.[2] D'un autre côté, Greenhill[3] a fait l'exposé des recherches des géomètres anglais sur cette question dans son *Traité d'Hydrostatique*.

[1] Guyou: 1°. *Cours autographié de l'Ecole Navale* (1881);
2°. *Théorie de la variation de la stabilité ou variation différentielle* (*Revue maritime*, 1879);
3°. *Théorie du Navire* (librairie Berger-Levrault, Ire édition 1887, 2me édition 1894).

[2] M. Duhem a donné un résumé succinct de ses recherches dans une *Note des Comptes rendus*, t. CXXIX, p. 879 (27 novembre 1899).

[3] Greenhill, *A treatise on Hydrostatics*.

J'ai indiqué, pour ce problème (221—224), une solution géométrique qui se rattache directement à la belle méthode que Guyou a donnée pour l'équilibre d'un flotteur sans liquides intérieurs.

Cette solution peut être résumée comme il suit:

Soit B le centre du système des forces parallèles constitué: 1° par les poids $p_1, p_2, \ldots p_n$ appliqués aux centres $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des liquides intérieurs; 2° par la poussée $p+p'$ appliquée au centre C de la carène. Quand on oriente le flotteur de toutes les manières possibles, le point B décrit, par rapport au flotteur, une surface (B) et, à chaque instant, le plan tangent à cette surface au point B est horizontal.

Pour que le flotteur soit dans une position d'équilibre stable, il faut et il suffit que la distance du centre de gravité du flotteur seul (sans les liquides) au plan tangent à la surface (B) au point B soit un minimum.

Sur les équations de l'Hydrodynamique et la théorie des tourbillons. — Ce travail a surtout un but historique et pédagogique. J'y montre, comme l'avait déjà remarqué Maurice Lévy[1], que des équations renfermant tous les éléments de la théorie des tourbillons et analogues, parfois même identiques à celles de Kirchhoff, se trouvent dans un Mémoire de Cauchy, présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1815 et imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers* en 1827; ce Mémoire, intitulé: *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie* est reproduit dans le premier volume (Ire série) des *Œuvres complètes de Cauchy*, imprimé chez Gauthier-Villars en 1882, et les équations dont il est question se trouvent dans la deuxième Partie, section première.

En me plaçant surtout au point de vue de l'enseignement, j'indique ensuite une interprétation simple et immédiate des équations de Cauchy, donnant les théorèmes fondamentaux de la théorie des tourbillons et conduisant en même temps aux équations de Weber.

Questions diverses. — Je cite sommairement quelques articles de Mécanique, l'un (207) donnant une forme générale de la fonction des forces pour laquelle on peut intégrer les equations du mouvement d'un point dans l'espace en coordon-

[1] Voyez un important article de Maurice Lévy: *L'Hydrodynamique moderne et l'hypothèse des actions à distance* (Revue générale des Sciences pures et appliquées, 15 décembre 1890). Voyez également un excellent Travail historique de M. Brillouin, publié dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse en 1885.

nées elliptiques; l'autre (185) montrant que, grâce à une proposition de Tait et Thomson, on peut étendre aux courbes brachistochrones la théorie des *développées* des *lignes de courbure*, etc. en remplaçant partout les arcs de courbes par le temps que met le mobile à les parcourir sans frottement, la constante des forces vives étant nulle; le troisième (217) relatif aux expériences du Commandant Hartmann; le quatrième (216) montrant que dans la déformation infiniment petite d'un milieu élastique isotrope la surface des dilatations et la surface directrice des efforts ont mêmes plans cycliques, et le dernier (219, 220) sur les fonctions et vecteurs de points dans le mouvement d'un fluide.

Théorie de la chaleur. — Mon étude sur l'équation différentielle $r-q=0$ (237) a été entreprise principalement pour répondre à la question suivante, qui m'a été posée par M. Boussinesq, sur la théorie de la chaleur. On considère un conducteur indéfini dans lequel la température u est supposée dépendre uniquement de l'abscisse x. Cette température u étant donnée arbitrairement en fonction de x, $u=f(x)$, à l'instant initial $t=0$, les formules de Fourier déterminent la température à un instant *postérieur* quelconque $t>0$. Mais on demande: 1° *si l'état initial donné pour* u, *provient lui-même d'un état antérieur* $t<0$; 2° *lorsque cet état antérieur existe, s'il est unique et comment on peut le trouver.* Voici la réponse à ces deux questions: l'état antérieur n'existe pas toujours; quand il existe, il est unique et peut être déterminé dans des cas très généraux. On reconnaît que l'état antérieur existe en s'assurant de la convergence de certaines séries. On peut indiquer, à ce sujet, la condition analytique suivante: pour que l'état antérieur existe, il est nécessaire (mais non suffisant) que la fonction donnée $f(x)$ soit une fonction transcendante entière, c'est-à-dire une fonction développable en série procédant suivant les puissances entières positives de x. Le fait que cette condition n'est pas suffisante résulte d'un exemple que j'indique pour le cas de l'armille, d'après Fourier.

Potentiel. — L'étude que j'ai faite des fonctions vérifiant l'équation du potentiel m'a permis de résoudre quelques problèmes de Physique mathématique. J'ai d'abord (239) résolu (en commun avec Chervet), le problème de la distribution du potentiel dans une masse liquide ayant la forme d'un prisme rectangulaire indéfini, dans l'hypothèse que les électrodes d'une pile se trouvent en deux points du liquide et qu'un régime permanent soit établi. L'expression de ce potentiel s'obtient aisément, au moyen de l'extension du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions vérifiant l'équation différentielle du potentiel (238). J'ai reconnu ensuite

que l'on peut appliquer la même méthode au cas où la masse liquide aurait la forme d'un parallélépipède rectangle, les électrodes se trouvant en des points quelconques de la masse. Ces résultats sont susceptibles d'une grande extension (231) et fournissent ainsi une application, à la *Physique mathématique,* des propositions que j'avais obtenues en poursuivant l'analogie entre les fonctions qui vérifient l'équation différentielle du potentiel et les fonctions d'une variable imaginaire. Ces applications comprennent, entre autres, la détermination de la fonction de Green pour un parallélépipède rectangle d'après Riemann, le calcul des vitesses dans l'écoulement d'un liquide par le fond d'un vase prismatique, tel que l'ont donné M. M. Boussinesq, de Saint-Venant et Flamant. J'arrive à résoudre ces mêmes problèmes pour tous les volumes limités par un polyèdre possédant la propriété suivante: si l'on prend les symétriques du polyèdre par rapport à chacune de ses faces, puis les symétriques des nouveaux polyèdres par rapport à chacune de leurs faces, et ainsi de suite indéfiniment, les polyèdres en nombre infini ainsi obtenus *ne pénètrent pas les uns dans les autres.* Dans toutes ces applications, le seul élément analytique nouveau qu'il soit nécessaire d'introduire est la fonction que j'ai appelée $Z(x, y, z)$, ou les fonctions plus simples auxquelles elle se réduit, quand un ou deux groupes de périodes deviennent infinis.

Bibliographie.

Ouvrages.

a. NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE M. PAUL APPELL.

Rédigée par lui-même à l'appui de sa candidature comme membre de l'Académie des Sciences, dans la Section de Géométrie.

Paris, G.-V., in-4: 1re éd. 1884, 39 p.; 2e éd. 1889, 83 p.; 3e ed. 1892, in-4, 112 p.

b. THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES ET DE LEURS INTÉGRALES, par PAUL APPELL ET ÉDOUARD GOURSAT.

Étude des Fonctions analytiques sur une surface de Riemann.

Paris, G.-V., 1895, gr. in-8, x-530 p.

Préface de CH. HERMITE: p. *a-g*.

Présentation par M. P. APPELL à l'Académie des Sciences: CR, t. 120, 18 fév. 1895, p. 362—363.

c. PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET APPLICATIONS, par P. APPELL ET É. LACOUR.

Paris, G.-V., 1897, gr. in-8, IX-421 p.

Présentation par M. P. APPELL des fasc. I et II à l'Académie des Sciences: CR, t. 122, 29 juin 1896, p. 1523—1524; — t. 123, 30 novembre 1896, p. 932.

Deuxième édition 1923. Avec la collaboration d. M. GARNIER.

d. ELÉMENTS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE, à l'usage des Ingénieurs, des physiciens et des candidats au certificat de mathématiques générales. G.-V.

e. SUR LES FONCTIONS SPHÉRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES.

Paris, G.-V., 1925, en collaboration avec M. KAMPÉ DE FÉRIET.

f. COURS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Professé par M. P. APPELL à la Faculté des sciences de Paris, rédigé par M. M. ABRAHAM et DELASSUS, Paris, Hn, 1888, in-4, lithographié.

g. LEÇONS SUR L'ATTRACTION ET LA FONCTION POTENTIELLE.

Professées à la Faculté des Sciences de Paris, redigées par M. CHARLIAT. Paris, G. C., 1892, gr. in-8.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

h. Tome I. Statique. — Dynamique du point.

i. Tome II. Dynamique des systèmes; Mécanique analytique.

j. Tome III. Equilibre et mouvement des milieux continus.

k. Tome IV. Figures d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène en rotation uniforme soumise a l'attraction newtonienne de ses particules.
Analyse B. S. M. Thiry 1921, t. XLV, p. 281. — G. V.

l. PRÉCIS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE PAR P. APPELL ET S. DAUTHEVILLE.
Introduction à l'Étude de la Physique et de la Mécanique appliquée.
A l'usage des Candidats aux Certificats de Licence et des élèves des Écoles techniques supérieures.
Paris, G.-V., 1910, gr. in-8, VI-729 p.

m. LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE PAR P. APPELL ET J. CHAPPUIS à l'usage des classes de mathématiques A et B.
1re partie. Notions géometriques. Cinématique.
2me partie. Dynamique et Statique du point. Statique des corps solides. Machines simples.
Paris G. V.

n. LA SCIENCE FRANÇAISE.
Paris, LR, 1917.

o. LES MOUVEMENTS DE ROULEMENT EN DYNAMIQUE.
Paris, G. V., collection Scientia.

p. THÉORIE DES VECTEURS ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.
Paris, Py., 1920.

q. EDUCATION ET ENSEIGNEMENT.
Paris, F. A., 1922.

r. SOUVENIRS D'UN ALSACIEN 1858—1922.
Paris, Py., 1923.

s. HENRI POINCARÉ.
(Collection »Nobles Vies et Grandes Oeuvres.) Pl., 1925.

t. SUR UNE FORME GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE.
(Mémorial, G. V., 1925.)

u. SUR LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES ET LES POLYNÔMES HYPERSPHÉRIQUES.
(Mémorial, G. V., 1925.)

Analyse pure.

1° Fonctions d'un point analytique.

1. *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.*

   Ce Mémoire a obtenu, le 21 janvier 1889, la Médaille d'Or accordée par S. M. le Roi de Suède et de Norvège, OSCAR II, à l'occasion du 60e anniversaire de sa naissance.

   AM, t. 13, 1890, 174 p.

   Rapport de CH. HERMITE: AM, t. 13, 1890, p. VII—XII.

2. 3. *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y).*

   CR, t. 94, 13 mars 1882, p. 700—703, 2 sept. 1882, p. 109—131, 132—144.
   AM, t. 1, 1882—1883.

4. *Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique.*

   CR, t. 95, 9 oct. 1882, p. 624—626.

5. *Sur une classe de fonctions dont les logarithmes sont des sommes d'intégrales abéliennes de première et de troisième espèce.*

   CR, t. 92, 18 avr. 1881, p. 960—962.

6. *Relations entre les résidus d'une fonction d'un point analytique (x, y) qui se reproduit, multipliée par une constante, quand le point (x, y) décrit un cycle.*

   CR, t. 95, 23 oct. 1882, p. 914—919.

7. *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.*

   JL, 3e s., t. 9, janv. 1883, p. 5—24.
   Analyse: BSM, 2e s., t. 9, 2e p., janv. 1885, p. 20—21.

2° Séries. Intégrales définies. Généralités sur les fonctions d'une variable.

8. *Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable.*

   Je donne des exemples de cas où l'on peut reconnaître l'existence d'un pôle ou d'un point critique pour une fonction définie par une série entière, et déterminer la partie principale.

   CR, t. 87, 28 oct. 1878, p. 689—692.

9. *Évaluation d'une intégrale définie.*

   Je donne la valeur d'une intégrale définie portant sur des fonctions hypergéométriques.

   CR, t. 87, 2 déc. 1878, p. 874—876.

10. *Sur la série hypergéométrique et les polynômes de Jacobi.*

J'indique quelques applications de l'intégrale définie dont j'ai donné l'expression dans la Note n° 9.

CR, t. 89, 7 juil. 1879, p. 31—38.

11. *Sur les séries divergentes à termes positifs.*

Je donne divers théorèmes sur les séries divergentes numériques et notamment sur les séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable.

AMPG, 64. Teil, 16 sept. 1879, S. 387—392.

12. *Développement en série entière de* $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$.

AMPG, 65. Teil, 6 janv. 1880, S. 171—175.

13. *Développement en séries trigonométriques des polynômes de M. Léauté.*

NAM, 3e s., t. 16, juin 1897, p. 265—268.

14. *Sur une classe de polynômes.*

J'étudie des polynômes $P_n(x)$ de degré n tels que

$$\frac{dP_n}{dx} = nP_{n-1}.$$

Ces polynômes forment une classe spéciale comprenant les polynômes que Ch. Hermite a déduits de la différentiation de e^{-x^2} et les polynômes introduits par Léauté pour le développement d'une fonction dont on connaît les valeurs moyennes des dérivées dans un intervalle. Je définis en même temps une opération fonctionnelle qui consiste à former le polynôme $(PQ)_n$ obtenu en remplaçant, dans P_n, chaque puissance x^k par un polynôme $Q_k(x)$. Ces polynômes ont été rencontrés par M. Pincherle dans diverses recherches (AMB, s. 2, t. 12, 1888, p. 126). Ils se rencontrent dans certaines intégrales qui se rattachent à la constante C d'Euler (CR, 1923, t. 177, p. 1165—1166, et 1924, t. 178, p. 157—158).

ASEN, 2e s., t. 9, avr. 1880, p. 119—144.

15. 16. *Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle.*

CR, t. 94, 1er mai 1882, p. 1238—1240.

MA, Bd 21, 1883, 23 sept. 1882, S. 118—124.

17. *Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle.*

AM, t. 1, 1882—1883, p. 145—152.

18. *Sur certains développements en série de puissances.*

Je présente des remarques sur le degré d'indétermination des coefficients dans les développements donnés dans les Notes N^{os} 15, 16, 17.

BSMF, t. 11, 1882—1883, 18 fév. 1883, p. 65—71.

19. *Définition d'une opération sur les fonctions.*

Cette Note contient la définition d'une opération itérative d'ordre fractionnaire.

BSP, 7^e s., t. 3, 1878—1879, 12 avr. 1879, p. 166.

20. *Développements en série procédant suivant les inverses de polynômes donnés.*

CR, t. 157, 1913.
BSM, t. 37, 1913.
CR, t. 157, 1913.
BSMF, t. 48, 1920.

21. *La dérivée de la fonction $\Psi(x)$ de Gauss, quand x est commensurable.*

CR, 1924, t. 178, p. 1229—1230.

22. *Sur l'intégrale* $\int \log(z-a)\, d\log(z-b)$.

AM, 1923, t. 44, p. 217—218.

23. *Sur les intégrales définies de la forme* $\int \varphi(x)\, d\varphi(y)$.

AM, 1923, t. 44, p. 213—215.

3° Fonctions périodiques et doublement périodiques d'une variable. Périodicité générale.

24. *Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en séries trigonométriques des fonctions elliptiques.*

BSMF, t. 13, 1884—1885, 6 déc. 1884, p. 13—18.
Remarque de H. Poincaré: BSMF, t. 13, 1884—1885, 20 déc. 1884, p. 19—27.

25. *Sur un problème d'interpolation relatif aux fonctions elliptiques.*

BSMF, 2^e s., t. 10, 1re p., mai 1886, p. 109—114.

26. *Sur les fonctions elliptiques.*

Je définis les fonctions elliptiques *in abstracto* et j'expose leur réduction aux fonctions Θ. Cette méthode peut être étendue aux fonctions de deux variables (Voir n^os 58 et 59).

CR, t. 110, 6 janv. 1890, p. 32—34.

27. *Sur une expression nouvelle des fonctions elliptiques par le quotient de deux séries.*

AJM, v. 14, nº 1, 1892, p. 9—14.

28. *Décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.*

CR, t. 97, 17 déc. 1883, p. 1419—1422.

29 à 31. *Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce.*

Dans le Mémoire nº 29, j'étudie la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, et je présente des remarques sur certaines fonctions d'un point analytique (x, y). Les principaux résultats que je démontre se trouvent dans la Note nº 30.

ASEN, 3^e s., t. 1, avril, mai 1884, p. 135—164.

CR, t. 101, 28 déc. 1885, p. 1478—1480.

ASEN, 3^e s., t. 3, janv., fév. 1886, p. 9—42.

32. *Développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.*

ASEN, 3^e s., t. 2, janv. 1885, p. 9—36.

33. *Application du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce.*

Dans ce Mémoire, je donne, du théorème de M. Mittag-Leffler, une application dans laquelle les degrés des polynômes qu'on retranche de la partie principale croissent indéfiniment.

ASEN, 3^e s., t. 2, févr., mars 1885, p. 67—74.

34. *Quelques exemples de séries doublement périodiques.*

NAM, 3^e s., t. 15, mars 1896, p. 126—129.

35. *Formations d'une fonction $F(x)$ possédant la propriété*

$$F[\varphi(x)]=F(x).$$

Je généralise le mode de représentation analytique des fonctions périodiques et j'applique à plusieurs exemples la formule obtenue.

CR, t. 88, 21 avr. 1879, p. 807—810.

36. *Sur les fonctions telles que* $F\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)=F(x)$.

J'applique la méthode exposée dans la Note n° 35, en lui faisant subir quelques légères modifications pour simplifier le calcul.

CR, t. 88, 19 mai 1879, p. 1022—1024.

37. *Sur quelques applications de la fonction* $\Gamma(x)$ *et d'une autre fonction transcendante.*

CR, t. 86, 15 avr. 1878, p. 953—956.

38. *Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes étudiées par M. Heine.*

CR, t. 89, 17 nov. 1879, p. 841—844.

39. *Sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions de M. Heine.*

CR, t. 89, 15 déc. 1879, p. 1031—1032.

40. *Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes.*

Dans ce Mémoire, je développe les considérations que j'ai présentées dans les Notes n^{os} 37 à 39. J'étudie en particulier des relations fonctionnelles, renfermant des fonctions Θ, ou des fonctions elliptiques, dans lesquelles interviennent *trois* périodes.

MA, Bd. 19, 1882, août 1881, S. 84—102.

41. *Sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels.*

CR, t. 94, 3 avr. 1882, p. 936—938.

42. *Sur des intégrales définies se rattachant au logarithme intégral.*

BSM, t. XXXVII, 1914, p. 327—328.

43. *Sur l'élément simple de la décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.*

AM, t. 42, 1920, p. 341—347.

44—44$^{\text{bis}}$. *Intégrales définies se rattachant à la constante C d'Euler.*

CR, 1923 et 1924, t. 177 et t. 178.

4° Fonctions de plusieurs variables. Fonctions abéliennes; fonctions de deux variables à deux, trois ou quatre paires de périodes. Fonctions hypergéométriques de deux variables. Polynômes d'Hermite à deux variables. Inversion des intégrales multiples.

45. *Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes.*

Dans ce Mémoire, j'étends à une classe particulière de fonctions de deux variables indépendantes x et y les théorèmes de MM. Weierstrass

et Mittag-Leffler sur les fonctions d'une seule variable. J'applique ensuite les théorèmes généraux ainsi obtenus à la formation de certaines fonctions simplement périodiques de deux variables.

AM, t. 2, 15 mars 1883, p. 71—80.

46. *Propositions d'Algèbre et de Géométrie déduites de la considération des racines cubiques de l'unité.*

J'obtiens des fonctions de deux variables à deux paires de périodes liées par une certaine relation algébrique et une infinité de systèmes de surfaces jouissant de propriétés remarquables.

CR, t. 84, 19 mars 1877, p. 540—543.

47. *Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires.*

Je fais l'étude de $n+1$ fonctions de n variables, à n groupes de périodes, definies par un système d'équations aux différentielles totales et généralisant celles de la Note n° 46.

CR, t. 84, 11 juin 1877, p. 1378—1380.

48. *Sur les fonctions uniformes de deux points analytiques qui sont laissés invariables par une infinité de transformations rationnelles.*

CR, t. 96, 4 juin 1883, p. 1643—1646.

49. *Sur un cas de réduction des fonctions Θ de deux variables à des fonctions Θ d'une variable.*

CR, t. 94, 13 fév. 1882, p. 421—424.

50. *Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables.*

BSMF, t. 10, 1881—1882, 3 mars 1882, p. 59—67.

51. *Sur une fonction analogue à la fonction Θ.*

Dans cette Note, il s'agit d'une fonction définie par une série simple d'exponentielles dont l'exposant est un polynôme du quatrième degré en n. Cette fonction a été étudiée ensuite par M. Rivereau (AFSMa, t. 2, 1892, p. 59). (Voir N[os] 52, 82, 83, 84, 85, 86, 87.)

AFSMa, t. 1, 1891, p. 47—52.

52. *Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières.*

BSMF, t. 19, 1890—1891, 18 nov. 1891, p. 125—127.

53. *Sur les fonctions de Bernoulli à deux variables.*
Extrait d'une Lettre adressée à MARTIN KRAUSE.
AMPG, d. R., 4 Bd., 9 oct. 1903, S. 292—293.

54. *Sur des fonctions de deux variables à trois ou quatre paires de périodes.*
CR, t. 90, 26 janv. 1880, p. 174—176.

55. *Sur certaines expressions quadruplement périodiques.*
CR, t. 108, 25 mars 1889, p. 607—609.

56. *Sur les fonctions de deux variables à plusieurs paires de périodes.*
CR, t. 110, 27 janv. 1890, p. 181—183.

57. *Sur les fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce.*
ASEN, 2e s., t. 7, mai 1890, p. 143—154.

58. 59. *Sur les fonctions périodiques de deux variables.*
L'objet de ce travail est l'étude des fonctions méromorphes de deux variables à quatre (ou à trois) paires de périodes. La méthode suivie peut être étendue d'elle-même aux fonctions de n variables à $2n$ groupes de périodes.
CR, t. 111, 3 nov. 1890, p. 636—638.
JL, 4e s., t. 7, f. 2, 1891, p. 157—219.

60. 61. *Sur les fonctions abéliennes.*
CR, t. 94, 26 juin 1882, p. 1702—1704.
CR, t. 103, 20 déc. 1886, p. 1246—1248.

62. 63. *Sur l'inversion des intégrales abéliennes.*
CR, t. 99, 8 déc. 1884, p. 1010—1011.
JL, 4e s., t. 1, f. 3, 1885, p. 245—279.

64. *Formes des intégrales abéliennes des diverses espèces.*
AFST, t. 7, 1893, p. A. 5—A. 8.

65. *Sur les fonctions abéliennes considérées comme fonctions algébriques de fonctions d'une variable.*
Ce Mémoire est inséré dans le premier des deux Tomes des *Acta Mathematica* imprimés NIELS HENRICK ABEL *in Memoriam.*
AM, t. 26, 8 juil. 1902, p. 249—253.

66. 67. *Sur les séries hypergéométriques de deux variables, et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles.*

Je définis quatre séries ordonnées suivant les puissances positives croissantes de deux variables, qui se rattachent à la célèbre série de Gauss, comme les fonctions Θ de deux variables de Göpel et de Rosenhain se rattachent aux fonctions Θ d'une variable d'Abel et de Jacobi.

CR, t. 90, 16 févr. et 20 mars 1880, p. 296—298, et p. 731—733.

68. *Sur la série $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$.*

Cette série, qui a été définie dans la Note n° 66, peut être représentée par une intégrale définie semblable à celle dont Jacobi s'est occupé dans le t. 56 du JC, 1859, s. 149.

CR, t. 90, 26 avr. 1880, p. 977—979.

69. *Sur quelques formules relatives aux fonctions hypergéométriques de deux variables.*

CR, t. 91, 16 août 1880, p. 364—368.

70. *Sur des polynômes de deux variables analogues aux polynômes de Jacobi.*

AMPG, 66. Teil, 1881, 26 oct. 1880, S. 238—245.

71. *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables.*

Ce Mémoire a été présenté à l'Académie dans la séance du 29 mars 1880; je lui ai fait subir quelques modifications, afin d'y faire rentrer les résultats que j'ai obtenus depuis et qui ont été indiqués dans deux Notes présentées à l'Académie les 26 avril et 16 août 1880.

JL, 3e s., t. 8, mai, juin 1882, p. 173—216.

72. *Sur certaines formules de Hansen et de Tisserand.*

Je trouve qu'un certain coefficient introduit par Tisserand est exprimé par un polynôme hypergéométrique de deux variables.

CR, t. 97, 12 nov. 1883, p. 1036—1039.

73. *Sur une formule de Tisserand et sur les séries hypergéométriques de deux variables.*

J'applique, à des questions étudiées par Tisserand, Radau et Callandreau, les résultats que j'ai donnés dans le Mémoire n° 71 et dans la Note n° 72.

JL, 3e s., t. 10, déc. 1884, p. 407—428.

Analyse: BSM, 2e s., t. 10, 2e p., nov. 1886, p. 225—226.

74. *Les polynômes d'Hermite rattachés aux polynômes de Legendre.*
ASAPP, v. 5, nº 2º, 1910, p. 65—68.

75. *Quelques propriétés des polynômes $U_{m,n}$ d'Hermite et des polynômes X_n de Legendre.*
ASAPP, v. 5, nº 4º, 1910, p. 209—212.

76. *Sur une classe de polynômes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles.*
J'étends aux intégrales doubles la méthode que Gauss a fondée sur les propriétés des polynômes de Legendre pour le calcul approché des intégrales simples. Cette méthode est exposé par M. Angelesco dans sa thèse (Paris 1916). Citons aussi une Note de H. Bourget, CR, 1898.
AFST, t. 4, 1890, p. H. 1—H. 20.

77. 78. *Sur un mode d'inversion des intégrales multiples.*
BSMF, t. 25, 20 janv. 1897, p. 10.
CR, t. 124, 1er fév. 1897, p. 213—214.

79. *Exemples d'inversion d'intégrales doubles.*
AJM, v. 19, nº 4, 1897, p. 377—380.

80. *Le théorème du dernier multiplicateur de Jacobi rattaché à la formule dite d'Ostrogradsky ou de Green.*
CR, 1912, t. 155, p. 878—881.

81. *Les polynômes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions.*
CR, 1913, t. 156, p. 1423—1425.

82. *Les polynômes $U_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace.*
CR, 1912, t. 156, p. 1582—1585.

83. *Les polynômes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux potentiels à q variables.*
RCMP, t. XXXVI, 1913.

84. *Sur la convergence des séries procédant suivant les polynômes d'Hermite ou les polynômes analogues plus généraux.* (En collaboration avec M. Kampé de Fériet.)
CR, 1914, t. 158, p. 381—385. Il s'agit dans cette Note de polynômes à plusieurs variables.

85. *Sur l'inversion approchée de certaines intégrales réelles et sur l'extension de l'équation de Kepler et des fonctions de Bessel.*
CR, 1915, t. 160, p. 419—423.
Cette Note contient la définition des fonctions de Bessel à plusieurs variables.

86. *Sur les fonctions Θ de degrés supérieurs.*
CR, t. 153, 1911, p. 584—587.
Sur les fonctions Θ du quatrième degré.
CR, t. 153, 1911, p. 617—618.

87. *Sur des fonctions se rattachant aux fonctions Θ du quatrième degré.*
RCMP, t. XXXIII, 1911.

88. *Sur une transformation de certaines fonctions déduites des fonctions Θ de degré supérieur.*
CR, t. 159, 1914, p. 474—476.
Contribution à l'étude des fonctions Θ de degré supérieur.
CR, t. 161, 1915, p. 161—165.

89. *Sur une deuxième forme des fonctions Θ de degré supérieur.*
CR, t. 161, 1915, p. 370—373.

90. 91. *Essai sur les fonctions Θ du quatrième degré.*
AM, t. 40, p. 291—309.
t. 41, p. 285—303.

5° Equations différentielles ordinaires. Invariants.

92. *Sur des polynômes satisfaisant à une équation différentielle du troisième ordre.*
J'applique, dans cette Communication, un théorème antérieur.
AFAS, 8me session, Montpellier, 3 sept. 1879, p. 257—260.

93. *Sur certaines équations différentielles linéaires contenant un paramètre variable.*
AFAS, 8me session, Montpellier, 3 sept. 1879, p. 253—257.

94. *Intégration de certaines équations différentielles à l'aide des fonctions Θ.*
Cette intégration résulte du théorème de Riemann sur les zéros des fonctions Θ de plusieurs variables.
CR, t. 90, 24 mai 1880, p. 1207—1210.

95. *Sur les équations différentielles linéaires à une variable indépendante.*
CR, t. 90, 21 juin 1880, p. 1477—1479.

96. *Sur la transformation des équations différentielles linéaires.*
CR, t. 90, 26 juil. 1880, p. 211—214.

97. *Sur les équations différentielles linéaires.*
Je signale, pour les équations différentielles linéaires, des propriétés analogues à celles des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique et à la transformation des équations algébriques; je donne des applications.
CR, t. 91, 26 oct. 1880, p. 684—685.

98. *Sur une classe d'équations différentielles linéaires.*
Je généralise les recherches de Ch. Hermite sur l'équation de Lamé (CR, t. 86, 1878, p. 850), celles de M. M. E. Picard et Mittag-Leffler sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (CR, t. 90, 1880, p. 292—299) et celles de Fuchs sur certaines équations différentielles linéaires JL, t. 4, 1878, p. 125, en considérant des équations différentielles dont l'intégrale générale n'a que des pôles sur la surface de Riemann et dont les substitutions fondamentales sont permutables.
CR, t. 91, 13 déc. 1880, p. 972—974.

99. *Sur une classe d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante.*
Je résume un Mémoire où se trouvent développées des propositions du N° 98.
CR, t. 92, 10 janv. 1881, p. 61—63.

100. *Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques.*
CR, t. 92, 25 avril 1881, p. 1005—1008.

101. *Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.*
Ces équations sont celles dont l'intégrale générale n'admet sur une surface de Riemann, d'autres singularités que des pôles et des points critiques logarithmiques. Je les classe en équations de 1re, 2me, 3me espèce d'après des caractères analogues à ceux qui servent à classer les trois espèces d'intégrales abéliennes.
AM, t. 13; 1890, 21 janv. 1889, p. 163—174.

Equation de la propagation de la chaleur. — L'équation $\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ qui se présente dans la théorie de la chaleur, a été l'objet d'un grand nombre de travaux. Intégrée par Fourier, Poisson, Ampère[1], elle a été étudiée en détail par Riemann dans son ouvrage sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique[2], et par Schlaefli, dans un Mémoire inséré au Tome 72 du *Journal de Crelle*. Jordan l'a traitée comme exemple dans le Tome III de son *Cours d'Analyse* (p. 387). M. Boussinesq a résumé les méthodes générales d'intégration propres à cette équation et aux autres équations de la Physique mathématique dans le Tome II de son *Cours d'Analyse infinitésimale (Calcul intégral, compléments)*. Citons encore M^me^ Kowalevski[3] qui a appliqué à cette équation spéciale les méthodes de Cauchy, en montrant qu'il n'existe pas toujours une intégrale z qui, pour $y=0$ se réduise à une fonction donnée de x: par exemple, cette équation n'a pas d'intégrale qui se réduise à $\frac{1}{1-x}$ pour $y=0$. Darboux[4] a rappelé cet exemple de M^me^ Kowalevski à propos d'une Note de Méray[5] sur un fait de même nature. L'équation $\delta z=0$ constitue le type le plus important auquel on peut réduire les équations linéaires à coefficients constants dans le cas *parabolique*, comme on le verra dans un Mémoire de du Bois-Reymond (*Journal de Crelle*, t. 104).

J'ai étudié (237) cette équation au point de vue de la Physique mathématique, en supposant x, y, z réels et en m'inspirant des méthodes de Riemann. Je traite d'abord les questions suivantes:

1°. *Chercher toutes les transformations de la forme*

$$z=\lambda(x, y) z', \qquad x'=\varphi(x, y), \qquad y'=\psi(x, y),$$

qui ramènent l'équation à la même forme.

On trouve que la relation entre x, y et x', y' définit une transformation homographique du plan qui remplace ici l'inversion de Thomson pour le potentiel. Ce résultat a été généralisé par Lacour dans sa thèse de Doctorat et par Boulanger (Bulletin de la Société mathématique 1899).

[1] *Journal de l'Ecole Polytechnique*, t. X, p. 587.

[2] *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen*, p. 107, 122; 1869.

[3] *Journal de Crelle*, t. 80, p. 22.

[4] *Comptes rendus*, t. CVI, p. 651.

[5] *Ibid.*, p. 648.

2°. *Trouver tous les polynômes vérifiant l'équation.* — Ces polynômes s'expriment simplement à l'aide des polynômes à une variable qu'Hermite[1] a déduits de la différentiation de l'exponentielle e^{-u^2}.

Me servant ensuite d'une formule analogue à la formule de Green déduite de la notion d'équation adjointe due à Riemann, j'établis une importante formule qui me permet de démontrer le théorème suivant:

Une fonction uniforme $z=f(x, y)$ vérifiant l'équation $\delta z=0$, existant dans toute la partie du plan située au-dessous d'une certaine parallèle à l'axe Ox, $y \leq b$ et restant finie ainsi que sa dérivée par rapport à x, dans cette partie du plan, pour toutes les valeurs finies ou infinies de x et y, se réduit à une constante.

On en conclut que l'équation $\delta z=0$ ne peut pas admettre de solution uniforme dans tout le plan, n'ayant aucun point singulier à l'infini, et ayant un seul point singulier $x=a$, $y=b$, à distance finie; car une telle fonction serait constante pour toutes les valeurs de y *inférieures* à b. Il y a donc là une différence remarquable avec les équations linéaires dans le cas elliptique qui admettent des intégrales avec un seul point singulier.

Enfin, je cherche à rendre compte de ce fait que la plupart des solutions simples de l'équation $\delta z=0$ admettent des lignes de discontinuité parallèles à Ox.

Certains des théorèmes établis dans ce Mémoire s'interprètent d'une façon simple dans la théorie de la chaleur: je les reporte à la fin de cette Notice: *Théorie de la Chaleur.*

Equations simultanées aux dérivées partielles. Potentiels et fonctions harmoniques. — Dans une fonction $u+iv$ de $x+iy$ les quantités u et v vérifient les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{1}$$

d'où on déduit immédiatement que chacune de ces fonctions vérifie l'équation du potentiel logarithmique et sont associées ou conjuguées par les relations (1).

Je me suis proposé d'étudier un système analogue à (1) pour le potentiel à trois variables (124, 125). Considérons quatre fonctions X, Y, Z, T de trois variables réelles x, y, z, vérifiant les relations

[1] *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 93, 266.

différentielles linéaires à une variable, à des équations simultanées définissant r et t en fonctions linéaires de s, p, q, z.

CR, t. 90, 29 mars 1880, p. 731—734.

117. *Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles* (En commun avec M. E. Picard).

Cette Note contient une extension d'un théorème donné par M. E. Picard pour les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (CR, t. 90, 1880, p. 293).

CR, t. 92, 21 mars 1881, p. 692—695.

118. *Sur une équation linéaire aux dérivées partielles.*

Je montre que l'une des équations rencontré dans la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables, contient, comme cas particulier, une équation différentielle linéaire étudiée par G. Darboux (CR, t. 95, 1882; p. 69); j'étends à cette équation les principales propriétés indiquées par ce géomètre.

BSM, 2° s., t. 6, I° p., déc. 1882, p. 314—318.

119. *Sur les fonctions satisfaisant à l'équation* $\Delta F = 0$.

Je considère une fonction $F(x, y, z)$ de trois variables réelles représentant les coordonnées rectangulaires d'un point M. Je suppose que la fonction F est uniforme, continue, qu'elle admet des dérivées premières et secondes et qu'elle vérifie l'équation du potentiel en tous les points M situés à l'intérieur d'une surface fermée S, excepté en certains points isolés, que j'appelle *points singuliers.* Ces points peuvent se classer en pôles et points essentiels.

CR, t. 96, 5 fév. 1883, p. 368—371.

120. *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle* $\Delta F = 0$.

Je fais l'étude générale des fonctions qui satisfont à l'équation $\Delta F = 0$. La première partie contient une extension d'un théorème dû à M. Mittag-Leffler et plusieurs applications d'un théorème de Green; j'étudie ensuite celles de ces fonctions qui reprennent les mêmes valeurs aux points homologues d'un réseau de parallélépipèdes et qui possèdent des propriétés semblables à celles de la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire. Ces fonctions s'expriment à l'aide d'un élément simple Z analogue à la fonction $\frac{H'}{H}$ introduite par Hermite dans la théorie des fonctions elliptiques.

AM, t. 4, 22 janv.—3 mars 1884, p. 313—374.

121. 122. *Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions vérifiant l'équation du potentiel $\Delta F = 0$.*

CR, t. 102, 21 juin 1886, p. 1439—1442.

JL, 4e s., t. 3, f. 1, 1887, p. 5—52.

123. *Sur les fonctions harmoniques à trois groupes de périodes.*

J'indique un élément analytique pouvant remplacer la fonction Z des deux Mémoires N° 119 et 120.

RCMP, t. 22, 1° sept. 1906; p. 361—370.

On trouvera une application par A. Myller: CR, t. 145, 11 nov. 1907, p. 790—792.

124. 125. *Sur des potentiels conjugués.*

Je donne un système de quatre équations aux dérivées partielles du premier ordre entre quatre fonctions X, Y, Z, T de trois variables réelles, x, y, z. Je démontre que si l'on choisit arbitrairement la fonction T vérifiant l'équation du potentiel, il existe une infinité de fonctions X, Y, Z vérifiant le système précédent; je précise le degré d'indétermination et j'exprime ces fonctions par des intégrales définies.

BSMF, t. 19, 1890—1891, 15 avr. 1891, p. 68—70.

AFSMa, t. 2; f. 3, 1892, p. 53—58.

126. *Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes.*

Extrait d'une Lettre adressée à M. F. Klein.

Je considère une certaine fonction $F(x, y, z)$ qui vérifie l'équation $\Delta F = 0$ et qui admet un cercle pour ligne singulière.

MA, Bd. 30, 26 avr. 1887, S. 155—156.

127. *Sur l'intégration des équations différentielles simultanées que vérifie le polynôme $U_{m,n}$ d'Hermite.*

CR, 1918, t. 166, p. 309—312.

128. *Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles et sur des cas de réductions des fonctions hypergéométriques de deux variables.*

CR, 1918, t. 166, p. 408—411.

129. *Sur une intégrale définie dont l'élément est une exponentielle du 4me degré.*

ASAPP, 1917, t. XII, p. 12—13.

130. *Sur un système de trois équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles.*

RCMP, 1923, t. XLVII, p. 15—16.

131. *Sur une équation différentielle ordinaire liée à certains systèmes d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles.*
CR, 1918, t. 166, p. 469—472.

132. *Addition à la Note précédente.* (Cette addition a pour objet de faire connaître des travaux de M. Roger Liouville antérieurs à la Note précédente.)
CR, 1918, t. 166, p. 1555—1556.

133. *Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie des fonctions hypergéométriques.*
CR, 1920, t. 171, p. 557—561.
RCMP, 1924, t. XLVIII.

Analyse appliquée à l'Algèbre.

134. *Sur les fractions continues périodiques.*
AMPG, 62 Teil, 1878, S. 183—188.

135. *Sur les polynômes qui expriment la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des n premiers nombres entiers.*
NAM, 3e s., t. 6, juil. 1887, p. 312—321.

136. 136bis. *L'unité complexe rattachée à une fraction continue à termes réels.*
ASAPP, t. IX, 1914 et t. X, 1915.

137. *Sur un nouveau mode de développement d'un nombre en fraction continue.*
BSM, 1914, t. XXXVIII, p. 118—120.
(Voir les Notes de A. Cahen, CR, 1923 et 1924.)

138. *Sur les valeurs approchées des polynômes de Bernoulli.*
Appliquant aux polynômes de Bernoulli une méthode donnée par M. G. Darboux dans son Mémoire sur les fonctions de grands nombres (JL, 3° s., t. 4, 1878, p. 5, 337), je donne l'expression approchée du polynôme de Bernoulli de rang n, pour n très grand.
NAM, 3° s., t. 6, déc. 1887, p. 547—554.

139. *Sur une suite de polynômes ayant toutes leurs racines réelles.*
AMPG, d. R., 1 Bd., 1901, 10 déc. 1900, S. 69—71.

140. *Sur les fonctions sphériques et autres analogues.*
En commun avec M. Armand Lambert (exposé fait d'après l'Article en allemand de M. A. Wangerin, avec des additions): un développe-

ment étendu donne la bibliographie des recherches sur les fonctions sphériques et les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables; ces recherches sont dues surtout à des mathématiciens français.

ESMEF, t. II, Art. 28.

Géométrie infinitésimale.

141. *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide.*

Thèse pour le grade de Docteur ès Sciences mathématiques, soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 20 juin 1876. J'étudie les deux problèmes suivants: 1° Etant donné un mouvement hélicoïdal, déterminer les cubiques gauches correspondantes; 2° Etant donnée une cubique définie par certaines équations, déterminer le mouvement hélicoïdal correspondant.

ASEN, 2° s., t. 5, juil., août 1876, p. 245—274.

Paris, G.-V., 1876, in-4, IV + 35 p.

142. *Sur une propriété caractéristique des hélices.*

AMPG, 64. Teil, 30 janv. 1879, S. 19—23.

143. *Mémoire sur les Déblais et les Remblais des systèmes continues ou discontinus.*

Ce Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences pour le Concours du Prix Bordin (Géométrie) en 1884, a été couronné à la suite d'un rapport de G. Darboux.

MSAS, t. 29, N° 3, 1887, p. 1—208.

Rapport de M. G. Darboux: CR, t. 101, 21 déc. 1885, p. 1312—1316.

144. *Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux.*

AJM, v. 10, 1888, p. 175—186.

Géométrie analytique.

145. *Note sur les cubiques gauches.*

CR, t. 82, 3 janv. 1876, p. 70—72.

146. 147. *Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre.*

CR, t. 83, 18 déc. 1876, p. 1209—1211.

AMPG, 62. Teil, 1878, S. 175—182.

148. *Théorème général sur les courbes unicursales.*
AMPG, 60. Teil, 1877, S. 125—127.

149. *Théorème concernant les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe de droites du premier ordre.*
AMPG, 60. Teil 1877, S. 274—275.

150. *Sur l'homographie d'ordre supérieur.*
BSP, 7° s., t. 4, 1879—1880, 25 oct. 1879, p. 18—20.

151. *Sur une représentation des points imaginaires en Géométrie plane.*
AMPG, 61. Teil, 16 août 1877, S. 359—360.

152. *Sur les familles de courbes orthogonales uniquement composées de coniques.*
AMPG, 63. Teil, 1879, 4 août 1878, S. 50—55.
Analyse par August: JFM, Bd. II, J. 1879, S. 501—503.

153. *Sur les points d'intersection d'une conique fixe par une conique mobile passant par deux points fixes.*
NAM, 3° s., t. 8, janv. 1889, p. 48—56.

154. *Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.*
NAM, 3° s., t. II, mars 1892, p. 115—119.

155. *Sur les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée.*
BSMF, t. 22, 7 fév. 1894, p. 27.

156. *Courbes autopolaires.*
NAM, 3° s., t. 13, mai 1894, p. 206—210.

157. *Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels.*
AMPG, d. R., 4 Bd., 1903, 19 juin 1902, S. 20—21.

158. *Sur les lignes asymptotiques de la surface représentée par l'équation $XYZ = T^3$.*
AMPG, 61. Teil, 21 mars 1877, S. 144—145.

159. *Sur les conditions qui expriment qu'un système de trois axes est trirectangle.*
NAM, 3° s., t. 13, fév. 1894, p. 41—43.

160. *Exercices sur les courbes de direction.*
On sait que Laguerre a appelé courbes de direction les courbes algébri-

ques telles que les cosinus directeurs de la tangente en un point puissent être exprimés rationnellement en fonction de x et de y.

NAM, 3° s., t. 15, nov. 1896, p. 491—495.

161. *Exercice sur la détermination du point double d'une cubique plane unicursale.*

RMS, t. 4, 8° a., juin 1898, p. 505—506.

162. *Exercices sur la détermination des points doubles d'une quartique plane unicursale.*

RMS, t. 4, 8° a., sept. 1898, p. 585—589.

163. *Sur le cylindroïde.*

RMS, t. 3, 5° a., juin 1895, p. 129—130.

164. *Propriété caractéristique du cylindroïde.*

Il existe un conoïde droit, signalé par Plücker et par Cayley, nommé cylindroïde, jouissant de la propriété que le lieu des projections d'un point fixe quelconque sur ses génératrices est une courbe plane. Je démontre que, réciproquement, toute surface réglée non cylindrique possédant cette propriété est un cylindroïde (Voyez une Note de M. Demoulin, BSMF, t. 29, 1900, p. 39—59).

BSMF, t. 28, 20 juin 1900, p. 261—265.

165. *Le problème des Déblais et des Remblais.*

RO, t. 1, 28 fév. 1890, p. 97—99.

CR, t. 180, 1925, p. 781—782.

166. *Sur certains polygônes dont les sommets décrivent des courbes algébriques et dont les côtés enveloppent des courbes algébriques.*

CR, t. 162, 1916, p. 306—308.

167. *Sur des lignes polygonales et sur des surfaces polyedrales généralisant les polygônes de Poncelet.*

BSM, t. XL, 1916, p. 244—246.

(Voir des Notes de Fontené, NAM, 1897, et CR, t. 162, 1916, p. 306—308.)

168. *Sur les courbes algébriques définies par une relation paramétrique.*

BSM, t. XXXIX, 1915, p. 43—48.

170. *Courbe de raccordement et élastique plan.*

BSMF, t. 49, 1921, p. 105—108.

Mécanique rationnelle.

171. *Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps en Mécanique.*
CR, t. 87, 30 déc. 1878, p. 1074—1077.

172. *Remarques sur l'introduction de fonctions continues n'ayant pas de dérivée, dans les éléments de la Mécanique.*
En commun avec M. Janaud.
CR, t. 93, 12 déc. 1881, p. 1005—1008.

173. *Sur la chaînette sphérique.*
Je donne, pour exprimer les coordonnées d'un point de la chaînette sphérique en fonctions elliptiques d'un paramètre, une méthode qui revient à l'intégration d'une équation analogue à celle de Lamé.
BSMF, t. 13, 1884—1885, 4 fév. 1885, p. 65—71.

174. 175. *De l'homographie en Mécanique.*
J'emploie en Mécanique la méthode de transformation des figures par projection centrale, qui joue un rôle si important en Géométrie. J'étudie d'abord le cas d'un point matériel sollicité par une force dans un plan fixe; je termine ainsi: Ces considérations peuvent être étendues au mouvement d'un point dans l'espace et même au mouvement de plusieurs points, à condition de faire, dans ce dernier cas, une transformation homographique générale contenant à la fois les coordonnées de tous les points.»
CR, t. 108, 4 fév. 1889; p. 224—226.
AJM, v. 12, 1890, p. 103—114.

176. *Sur une transformation de mouvement et les invariants d'un système en Mécanique.*
BSMF, t. 20, 16 mars 1892, p. 21—22.

177. *Sur des transformations de mouvement.*
Je considère deux systèmes matériels dont les liaisons sont indépendantes du temps et je cherche si, à tout mouvement du premier système, on peut faire correspondre un mouvement du second, les forces ne dépendant que des positions.
JC, Bd. 110, Ht. 1, 1892, S. 37—41.

178. *Sur une transformation de mouvements.*
J'étudie une certaine transformation de mouvements, puis je montre qu'un problème traité par Elliot (CR, t. 116, 1893, p. 1117; ASEN, 1893,

p. 231) et une question résolue par M. Mestschersky (BSM, 2° s., t. 18, 1894, p. 170), peuvent être envisagés comme des cas particuliers de cette transformation.

AJM, v. 17, N° 1, 1895, p. 1—5.

179. *Réduction à la forme canonique des équations d'équilibre d'un fil flexible et inextensible.*

Je ramène, à une forme canonique permettant l'application des théorèmes de Jacobi, les nombreuses analogies qui existent entre les équations d'équilibre d'un fil et les équations du mouvement d'un point.

CR, t. 96, 12 mars 1883, p. 688—691.

180. *Sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible.*

AFST, t. 1, 1887, p. B. 1—B. 5.

181. *Sur certaines propriétés d'une position d'équilibre d'un système.*

AFST, t. 6, 1892, p. C. 1—C. 6.

182. 183. *Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe.*

Je ramène l'intégration des équations du mouvement d'un fil flexible et inextensible dans un plan à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

CR, t. 103, 22 nov. 1886, p. 991—993.

AM, t. 12, 1888—1889, 17 sept. 1888, p. 1—50.

184. *Quelques remarques sur les équations du mouvement d'une chaîne parfaitement flexible.*

ASAPP, v. 4, N° 1, N° 2, 1909, p. 9—17, 113—115.

185. *Remarque sur les courbes brachistochrones.*

BSMF, t. 19, 1890—1891, 6 mai 1891, p. 97—98.

186. *Du tautochronisme dans un système matériel.*

Un système matériel est tautochrone lorsqu'il met le même temps à revenir à une position déterminée quelle que soit la position initiale dans laquelle on l'abandonne à lui-même sans vitesse. J'indique la solution générale du problème des tautochrones.

CR, t. 114, 2 mai 1892, p. 996—998.

187. *Remarque sur une Note de M. G. di Pirro, intitulée: Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique.*

CR, t. 123, 14 déc. 1896, p. 1057.

188. *Remarques sur une Note de M. Levi-Civita, intitulée: Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique.*
CR, t. 124, 22 fév. 1897, p. 395.

189. *Sur les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton.*
J'indique comment certaines démonstrations des équations de Lagrange ne peuvent pas être appliquées, quand les liaisons ne sont pas exprimables en termes finis.
BSMF, t. 26, 7 déc. 1898, p. 265—267.

190. *Sur les mouvements de roulement; équations du mouvement analogues à celles de Lagrange.*
CR, t. 129, 7 août 1899, p. 317—320.

191. 192. *Sur une forme générale des équations de la Dynamique.*
Cette forme d'équations s'applique à tous les systèmes sans frottement, holonomes ou non; elle repose sur la considération de l'énergie d'accélération $S=\frac{1}{2}\Sigma m J^2$ où J est l'accélération du point m.
CR, t. 129, 28 août 1899, p. 423—427.
JC, Bd. 121, Ht. 4, 1900, S. 310—319.

193. *Sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique.*
CR, t. 129, 11 sept. 1899, p. 459—460.

194. *Développements sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique.*
JL, 5° s., t. 6; f. 1, 1900, p. 5—40.

195. *Sur une forme générale des équations de la Dynamique et sur le principe de Gauss.*
Je démontre l'impossibilité de déduire les équations du mouvement d'un système non holonome de la seule connaissance de la demi-force vive T et de la fonction des forces U.
JC, Bd. 122, Ht. 3, 1900, S. 205—208.

196. *Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique.*
JL, 5° s., t. 7, f. 1, 1901, p. 5—12.

197. *Sur le principe de la moindre contrainte de Gauss.*
AMLB, 1901—1902, p. 407—412.

198. *Extension des équations de Lagrange au cas du frottement de glissement.*
CR, t. 114, 15 fév. 1892, p. 331—334.
Analyse par E. LAMPE: JFM, Bd. 24, J. 1892, S. 856—857.

199. *Sur l'extinction du frottement.*
J'étudie le problème de l'extinction du frottement dans le cas d'un système matériel présentant certains caractères qui sont réalisés dans la plupart des systèmes usuels.
BSMF, t. 35, 11 avr. 1907, p. 131—133.

200. *Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement.*
Je développe et précise les indications que j'ai données dans la Note N° 199. Voir, comme suite à cette Note, une Note de M. E. DANIELE (N. C., s. 5, v. 15, Giugno 1908, p. 492).
JC, Bd. 133, Ht. 2, 1907, S. 93—96.

201. *Sur un théorème relatif au déplacement initial d'un système sans frottement.*
AFAS, II, Résumés, Clermont-Ferrand, 1908, gr. in-8, p. 49.

202. 203. *Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions.*
Pour un système holonome, je déduis des équations de Lagrange une forme simple des équations de la théorie des percussions.
CR, t. 116, 26 juin 1893, p. 1483—1487.
JL, 5° s., t. 2, f. 1, 1896, p. 5—20.

204. *Remarques sur les systèmes non holonomes.*
A propos d'une Note intitulée *Sur les percussions dans les systèmes non holonomes*, par M. M. BEGHIN et ROUSSEAU (JL, 1903, p. 21).
JL, 5° s., t. 9, f. 1, 1903, p. 27—28.

205. 206. *Sur le théorème des aires.*
CR, t. 119, 5 nov. 1894, p. 770—771.
BSMF, t. 22, nov. 1894, p. 190—195.

207. *Sur le mouvement d'un point en coordonnées elliptiques.*
BSMF, t. 19, 1890—1891, 20 mai 1891, p. 102—103.

208. *Sur les lois de forces centrales faisant décrire à leur point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales.*
AJM, v. 13, 1891, p. 153—158.
Analyse par J. HADAMARD, RO, t. 2, 30 mars 1891, p. 190.

209. *Interprétation de la période imaginaire dans un mouvement à la Poinsot.*
BSMF, t. 26, 15 juin 1898, p. 98—102.

210. *Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau.*
RCMP, t. 14, 1900, 27 juil. 1899, p. 1—6.
Voir Extrait d'une Lettre adressée à M. P. Appell par M. D. J. K. Korteweg; RCMP, t. 14, 1900, p. 7—8.

211. *Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air.*
AMPG, d. R., 5 Bd., 15 mars 1903, S. 177—179.

212. *Remarque relative à un Mémoire de M. Lucio Silla, intitulé: Sopra Alcune questioni di Statica.*
RCMP, t. 21, 10 fév. 1906, p. 314—315.

213. *Sur les lignes qui se conservent dans la déformation d'un milieu continu.*
BSMF, t. 26, 6 juil. 1898, p. 135—136.

214. *Lignes correspondantes dans la déformation d'un milieu; extension des théorèmes sur les tourbillons.*
JL, 5° s., t. 5, f. 2, 1899; p. 137—153.

215. *Déformation spéciale d'un milieu continu; tourbillons de divers ordres.*
BSMF, t. 29, 1901, 21 nov. 1900, p. 16—17.

216. *Sur les expressions des tensions en fonction des déformations dans un milieu élastique homogène et isotrope.*
NAM, 4° s., t. 2, mai 1902, p. 193—197.

217. *Note sur les expériences du Commandant Hartmann.*
Exposées dans un Mémoire intitulé *Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts* (Revue d'Artillerie, t. 45, 46, 47, 1894, 1895, 1896).
BSMF, t. 28, 17 janv. 1900, p. 66—68.

218. *Sur quelques fonctions et vecteurs de points dans le mouvement d'un fluide.*
CR, t. 136, 26 janv. 1903, p. 186—189.

219. *Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide.*
JL, 5° s., t. 9, f. 1, 1903, p. 5—19.

220. *Sur les fonctions et vecteurs de point contenant uniquement les dérivées premières des composantes de la vitesse.*

BSMF, t. 31, 1903, p. 68—73.

221. *Sur les positions d'équilibre d'un navire avec un chargement liquide.*

CR, t. 129, 16 oct. 1899, p. 567—569.

222. *Equilibre d'un flotteur avec un chargement liquide.*

CR, t. 129, 23 oct. 1899, p. 636—637.

223. *Remarques sur une note de M. P. Duhem, intitulée: Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants, et, en particulier, d'un navire qui porte un chargement liquide.*

CR, t. 129, 27 nov. 1899, p. 880.

224. *Sur l'équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide.*

JEP, 2° s., 5° c., 1900, p. 101—107. — RMa, t. 148, 1901, p. 5—20.

225. 226. *Equation fonctionnelle pour l'équilibre d'une masse liquide en rotation sous l'attraction newtonienne.*

SSS, 48° congrès, Paris, 30 mars 1910, p. 20—23.
RCMP, t. 30, 2 Apr. 1910, p. 82—84.

227. *Machine à déterminer les balourds.*

Les roues des wagons de chemins de fer sont associées par paires: les deux roues d'une même paire sont réunies par un cylindre rigide, de façon à former un solide de révolution autour de l'axe de ce cylindre. La paire de roues ainsi constituée est liée au wagon de telle façon que son mouvement relatif, par rapport au wagon, soit une rotation autour de l'axe commun des deux roues. Une condition essentielle de stabilité est alors que cet axe soit un axe principal d'inertie relatif au centre de gravité. Des méthodes statiques permettent de voir si le centre de gravité est sur l'axe commun des deux roues; mais ce n'est que par des expériences dynamiques que l'on peut voir si cet axe est principal pour le centre de gravité et, par conséquent, pour chacun de ses points. Supposons que l'axe ne soit pas un axe principal d'inertie et, pour simplifier, supposons qu'il puisse être rendu principal en enlevant à la roue R une masse m, placée en un point M de cette roue, et à la roue R_1 une masse m_1, placée en M_1. On dit alors que la roue R présente un *balourd* m et la roue R_1 un *balourd* m_1.

Je fais la théorie de l'appareil imaginé par M. HAFFNER pour déterminer la position et la masse des balourds.

JEP, 2° s., 9° c., 1904, p. 151—162.

228. *Sur les liaisons non linéaires par rapport aux vitesses.*

RCMP, 1912, t. XXXIII.

Cette Note a été le point de départ d'importants travaux de M. DELASSUS, CR et AENS.

229. *Exemple de mouvement d'un point assujetti à une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse.*

RCMP, 1911, t. XXXII.

230. *Sur les liaisons cachées et les forces gyroscopiques apparentes dans les systèmes non holonômes.*

CR, t. 162, 1916, p. 27—29.

231. *Le principe du minimum de l'énergie d'accélérations et la substitution des liaisons aux forces.*

CR, t. 159, 1914, p. 989—992.

232. *Sur une extension de la théorie des tourbillons et des équations de Weber.*

CR, t. 164, 1917, p. 71—75.

233. 234. *Mouvements aériens gauches de sphères pesantes légères.*

CR, 1918, t. 166, p. 22—25, et Journal de Physique, 1918.

235. *Sur la notion d'axes fixes et de mouvement absolu.*

CR, 1918, t. 166, p. 513—516.

236. *Sur la théorie de la chaleur.*

CR, t. 110, 27 mai 1890, p. 1061—1066.

237. *Sur l'équation $r=q$ et la théorie de la chaleur.*

JL, 4° s., t. 8, f. 2; 1892, p. 187—216.

238. *Sur la distribution du potentiel dans des masses liquides limitées par des faces planes.*

Dans cette Note, à la suite d'une correspondance que j'ai échangée avec M. CHERVET, je m'occupe de la distribution du potentiel d'une masse liquide indéfinie, soit limitée par deux plans parallèles, soit ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle ou d'un parallélépipède

rectangle, les électrodes étant placées d'une façon quelconque. Le potentiel est alors une fonction uniforme de x, y, z, ayant deux groupes de périodes et admettant une infinité de pôles simples dans la section droite des deux électrodes.

CR, t. 98, 28 janv. 1884, p. 214—216.

239. *Sur la distribution du potentiel dans une masse liquide ayant la forme d'un prisme rectangulaire indéfini* (En commun avec M. Chervet).

CR, t. 98, 11 fév. 1884, p. 358—360.

240. *Sur quelques applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à la Physique mathématique.*

Cette fonction Z a été définie dans le Mémoire N° 120, p. 36.

AM, t. 8, 23 mars 1886, p. 265—294.

241. *Mouvement d'une particule électrisée soumise à l'action d'un point électrique et d'un pôle magnétique confondus.*

ASAPP, v. 4, N° 3°, 1909, p. 129—131.

242. *Figures d'équilibre d'un fil ou de deux fils dont les éléments s'attirent ou se repoussent.*

CR, 1913, t. 156, p. 500.

Voyez Bratu, thèse, Paris 1914, Analyse: BSM, t. XXXVIII, 1914, p. 240—241.

243. *Sur une transformation du mouvement d'un système holonôme conservatif donné dans le mouvement d'un autre système donné ayant le même degré de liberté.* (En collaboration avec M. Vergne.)

CR, t. 157, 1913, p. 1800—1801.

244. *Sur un théorème de Joseph Bertrand relatif à la cinématique des milieux continus.*

BSM, 1917, t. XLI, p. 23—28.

245. *Aperçu sur l'emploi possible de l'énergie d'accélération dans les équations de l'électrodynamique.*

CR, 1912, t. 154, p. 1037—1040.

246. *Equation fonctionnelle pour l'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses parties.*

CR, 1913, t. 156, p. 587—590.

247. Hommage à l'Académie des Sciences d'un article de l'Edition française de *l'Encyclopédie des Sciences mathématiques* relatif à *l'Hydrodynamique.* (En commun avec M. Beghin.)

CR, 1914, t. 158, p. 920.

248. *Le principe du minimum de l'énergie d'accélération et la substitution des liaisons aux forces.*
CR, 1914, t. 159, p. 989—992.

249. *Sur les liaisons cachées et les forces gyroscopiques apparentes dans les systèmes non holonômes.*
CR, 1916, t. 162, p. 27—29.
Voir une Note de M. EDOUARD GUILLAUME »Sur l'extension des équations de M. Appell à la physique des milieux continus; application à la théorie des électrons».
CR, t. 156, 1913, p. 875—877.

250. *Equilibre relatif d'une masse fluide homogène en rotation soumise à l'attraction newtonienne de ses parties.*
ABL, Notice 1919.

251. *Sur les oscillations ellipsoïdales d'une sphère liquide.*
CR, 1920, t. 172, p. 761—764.

252. *Sur le mouvement périodique d'un fluide.*
CR, 1921, t. 172, p. 885—888.

253. *Lettre à M. Mittag-Leffler;*
t. 38 des Acta Mathematica consacré à la mémoire d'HENRI POINCARÉ.
CR, 1921, t. 172, p. 1265—1266.

254. *Sur les principes de la Mécanique usuelle.*
Mémoire de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, 1922, 2me série, t. 57, p. 1—4.

255. *Mouvement d'ensemble d'une masse fluide hétérogène, soumise à l'attraction mutuelle de ses particules, autour de son centre de gravité.*
CR, 1924, t. 179, p. 119—120.

256. *Sur la nature du mouvement d'un corps céleste fluide autour de son centre de gravité.*
CR, 1924, t. 179, p. 795—796.

257. *Idem.*, AM, 1926.

Abréviations.

AAWB *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Berlin, in-4.

AFAS *Comptes rendus des Sessions de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences.* Paris, rue Serpente, 28, gr. in-8.

AFSMa *Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.* Paris, G. M., in-4.

AFST *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse* pour les Sciences mathématiques et les Sciences physiques. Paris, G.-V., in-4.

ABL *Annuaire du Bureau des Longitudes.* Paris, G.-V., in-16.

AJM *American Journal of Mathematics,* edited by FRANK MORLEY, published under the Auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore, in-4.

AM *Acta Mathematica.* Journal fondé et rédigé par G. MITTAG-LEFFLER. Berlin, Stockholm, Paris, Hn., in-4.

AMB *Annali di Matematica pura et applicata* già diretti da FRANSCESCO BRIOSCHI, continuati dai Prof. L. BIANCHI. — Milano, C. R., in-4.

AMPG *Archiv der Mathematik und Physik,* Gegründet 1841 durch J.-A. GRUNERT, Her. von E. LAMPE, . . . Leipzig, B.G.T., gr. in-8.

ASAPP *Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto,* publicados sobra direcção de F. GOMES TEIXEIRA. Coïmbre, gr. in-8.

ASEN *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.* Paris, G.-V., in-4.

BAMS *Bulletin of the American mathematical Society.* Lancaster, P.A., and New York, the Macmillan Society, 2d s., in-8.

BBSL *Bollettino di Bibliografia et Storia delle Scienze matematiche,* pubblicato per cura di GINO LORIA, Torino, C.C., gr. in-8.

BSM *Bulletin des Sciences mathématiques,* fondé en 1870 par GASTON DARBOUX, publié par GASTON DARBOUX, ÉMILE PICARD et JULES TANNERY continué par E. PICARD et P. APPELL. De 1870 à la fin de 1884, le titre fut *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* Paris, G.-V., gr. in-8.

BSMF *Bulletin de la Société mathématique de France.* Paris, G.-V., gr. in-8.

BSP *Bulletin de la Société philomathique de Paris.* Paris, S., de 1864 à 1888, in-8; ensuite gr. in-8.

CMF *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky,* redigu jí K. PETR, BOH. KUČERA. Praze, B. Stýbla, gr. in-8.

CR *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.* Paris, G.-V., in-4.

EM *L'Enseignement mathématique* dirigé par C.-A. LAISANT et H. FEHR. Paris, G.-V., et Genève, Georg, gr. in-8.

ESMEF *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées.* Édition française publiée d'après l'édition allemande sous la direction de JULES MOLK. Paris, G.-V., gr. in-8.

IF *Institut de France.* Paris, F.-D., in-4.
IM *L'Intermédiaire des Mathématiciens* fondé en 1894 par C.-A. Laisant et Émile Lemoine. Paris, G.-V., in-8.
JC *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Beg. von A. L. Crelle. Her von K. Hensel. Berlin, G.R., in-4.
JEP *Journal de l'École Polytechnique.* Paris, G.-V., in-4.
JFM *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* Beg. von Carl Ohrtmann. Her. von Emil Lampe. Berlin, G.R., gr. in-8.
JL *Journal de Mathématiques pures et appliqueés* fondé par J. Liouville, rédigé par Camille Jordan, Paris, G.-V., in-4.
JST *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* publicado pelo D[r] F. Gomes Teixeira. Coïmbre, gr. in-8.
LCD *Literarisches Centralblatt für Deutschland.* Beg. von Fredrich Barncke. Her. von Edward Barncke. Leipzig, E. Avenarius, in-4.
MA *Mathematische Annalen.* Beg. 1868 durch Alfred Clebsch und Carl Neumann. Her. von Felix Klein, . . . Leipzig, B.G.T., gr. in-8.
MAWB *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Berlin, gr. in-8.
MSAS *Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France.* Paris, I. N., in-4.
MMP *Monatshefte für Mathematik und Physik.* Her. von G. v. Escherich, F. Mertens und W. Wirtinger. Wien, J. Eisenstein, gr. in-8.
Ms *Mathesis.* Recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand, Ad. Hoste; Paris, G.-V., gr. in-8.
NAM *Nouvelles Annales de Mathématiques,* fondées en 1842 par Gérono et Terquem, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard, Paris, G.-V., in-8.
NAW *Nieuw Archief voor Wiskunde* onder redactie van J. C. Kluyver, D. J. Korteweg en P. H. Schoute. Amsterdam, Delsman en Nolthenius, gr. in-8.
NC *Il nuovo Cimento,* Organo della *Società italiana di Fisica,* pubblicato per cura dei Direttori . . . Pisa, Pieraccini, gr. in-8.
NTM *Nyt Tidsskrift for Matematik,* Redigeret af C. Juel og V. Trier. København, Jul. Gjellerup, in-8.
ÖS *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar.* Stockholm, P. A. Norstedt, in-8.
RCMP *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* Palermo, gr. in-8.
RMa Ministère de la Marine. *Revue Maritime.* Paris. R. Chapelot et C[ie], gr. in-8. (Rédaction, 2, rue Royale.)
RMS *Revue de Mathématiques spéciales.* Paris, N., in-4.
RO *Revue générale des Sciences pures et appliquées.* Directeur: Louis Olivier, Paris, in-4.
RR *Revue scientifique. (Revue rose.)* Directeur de la rédaction: Ch. Moureu. Paris, 41 *bis,* rue de Châteaudun, in-4.

SSS *Comptes rendus du Congrès des Sociétés Savantes de Paris et des départements. Section des Sciences.* Paris, I.N., gr. in.-8.

WM *Wiadomosci matematyczne.* Rédigé en polonais. Rédacteur et éditeur: S. Dickstein. Warszawa, Marszalkowska, 117, gr. in-8.

ZMP *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* Her. von O. Schlömlich und M. Cantor. Leipzig, B.G.T., gr. in-8.

aa.	aargang.
Afd.	Afdeling.
Abt.	Abteilung.
Bd.	Band.
Beg.	Begründet.
c.	cahier.
D.	Deel.
d. R.	dritte Reihe.
f.	fascicule.
Ht.	Heft.
Her.	Herausgegeben.
J.	Jahrgang.
Lit.	Literaturberichte.
n. s.	nouvelle série, new series.
T. R.	Tweede Reeks.
S.	Seite.
s.	série, series.

A. C.	Armand Colin.
B. G. T.	B. G. Teubner.
C. C.	Carlo Clausen.
C. D.	Charles Delagrave.
C. N.	C. Naud.
C. R.	C. Rebeschini di Turati.
D. P.	Dunod et Pinat.
F. A.	Félix Alcan.
F. D.	Firmin Didot.
G. C.	Georges Carré.
G. M.	G. Masson.
G.-V.	Gauthier-Villars.
G. R.	Georg Reimer.
H.	Hachette et Cie.
Hn.	A. Hermann; Hermann et fils.
I. N.	Imprimerie nationale.
L. R.	Larousse.
N.	Nony et Cie.
Py.	Payot.
Pl.	Plon.

QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES SE RATTACHANT À LA CONSTANTE D'EULER.

PAR

PAUL APPELL

à PARIS.

Dans des recherches sur la constante C d'Euler, j'ai obtenu certaines formules dont les principales sont données dans les Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris (3. décembre 1923 et 7. janvier 1924). Je me propose ici de développer les calculs qui conduisent aux résultats indiqués et de faire connaître quelques autres formules.

I. On sait que la constante d'Euler est donnée par

$$-C = \Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-u} \log u \, du = 4 \int_0^\infty e^{-x^2} x \log x \, dx$$

où, comme dans tout ce qui suit, les logarithmes sont népériens. On a de même

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} \log u}{\sqrt{u}} du = 4 \int_0^\infty e^{-x^2} \log x \, dx,$$

$$\Gamma''(1) = \int_0^\infty e^{-u} (\log u)^2 du = 8 \int_0^\infty e^{-x^2} x (\log x)^2 dx,$$

$$\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} (\log u)^2}{\sqrt{u}} du = 8 \int_0^\infty e^{-x^2} (\log x)^2 dx$$

et, d'une manière générale, pour les dérivées d'ordre n,

$$\Gamma^{(n)}(1)=\int_0^\infty e^{-u}(\log u)^n\,du=2^{n+1}\int_0^\infty e^{-x^2}x(\log x)^n\,dx,$$

$$\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}(\log u)^n}{\sqrt{u}}\,du=2^{n+1}\int_0^\infty e^{-x^2}(\log x)^n\,dx.$$

Nous allons chercher à exprimer ces intégrales à l'aide de C. Tout d'abord, d'après un théorème général dû à Gauss, la différence $\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}-\Gamma'(1)$ est connue, sous forme finie, quand u est commensurable; on a, en particulier

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{\pi}\,(C+2\log 2). \tag{1}$$

On obtient facilement cette formule en dérivant par rapport à u l'équation bien connue

$$\Gamma(u)\,\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\pi}\,2^{-2u}\,\Gamma(2u)$$

ce qui donne

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}+\frac{\Gamma'\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)}=-2\log 2+2\frac{\Gamma'(2u)}{\Gamma(2u)}, \tag{2}$$

puis faisant $u=\frac{1}{2}\cdot$

On a ensuite en dérivant deux fois l'équation

$$\Gamma(u)\,\Gamma(1-u)=\frac{\pi}{\sin\pi u},$$

$$\Gamma''(u)\,\Gamma(1-u)-2\,\Gamma'(u)\,\Gamma'(1-u)+\Gamma(u)\,\Gamma''(1-u)=\frac{\pi^3}{\sin\pi u}+2\frac{\pi^3\cos^2\pi u}{\sin^3\pi u}$$

et, pour $u=\frac{1}{2}$,

$$\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\left[(C+2\log 2)^2+\frac{\pi^2}{2}\right]\cdot \tag{3}$$

Pour avoir $\Gamma''(1)$ dérivons la relation (2)

$$\frac{\Gamma''(u)}{\Gamma(u)}-\left[\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right]^2+\frac{\Gamma''\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)}-\left[\frac{\Gamma'\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)}\right]^2=4\left[\frac{\Gamma''(2u)}{\Gamma(2u)}-\left[\frac{\Gamma'(2u)}{\Gamma(2u)}\right]^2\right] \tag{4}$$

puis faisons $u=\frac{1}{2}$,

$$\Gamma''(1)=C^2+\frac{\pi^2}{6}\cdot \tag{5}$$

II. Pour calculer $\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma'''(1)$ on peut procéder par voie intégrale, en formant le produit

$$-C\,\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)=32\int\!\!\int e^{-(x^2+y^2)}\,x\log x\,(\log y)^2\,dx\,dy,$$

l'intégrale double étant étendue à l'angle droit $x\,O\,y$ des axes de coordonnées. En coordonnées polaires, la même intégrale est

$$-C\,\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)=32\int\!\!\int e^{-r^2}r^2\cos\theta\,(\log r\cos\theta)\,(\log r\sin\theta)^2\,dr\,d\theta$$

où r (rayon vecteur) varie de 0 à ∞ et θ (angle polaire) de 0 à $\frac{\pi}{2}\cdot$ En développant

$$-C\,\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)=32\int_0^\infty e^{-r^2}r^2(\log r)^3\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$$

$$+32\int_0^\infty e^{-r^2}r^2(\log r)^2\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,[\log\cos\theta+2\log\sin\theta]\,d\theta$$

$$+32\int_0^\infty e^{-r^2}r^2\log r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,[2\log\cos\theta\log\sin\theta+(\log\sin\theta)^2]\,d\theta$$

$$+32\int_0^\infty e^{-r^2}r^2\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\log\cos\theta\,(\log\sin\theta)^2\,d\theta.$$

L'intégration par parties donne

$$2^{n+2}\int_0^\infty e^{-r^2} r^2 (\log r)^n\, dr = 2^{n+1}\int_0^\infty e^{-r^2} (\log r)^n\, dr$$

$$+ n\, 2^{n+1}\int_0^\infty e^{-r^2} (\log r)^{n-1}\, dr$$

$$= \Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\, n\, \Gamma^{(n-1)}\left(\frac{1}{2}\right), \qquad (n=3,\, 2,\, 1)$$

puis

$$4\int_0^\infty e^{-r^2} r^2\, dr = 2\int_0^\infty e^{-r^2}\, dr = \sqrt{\pi}.$$

On a ainsi en posant

$$I_n = 32\int_0^\infty e^{-r^2} r^2 (\log r)^n\, dr$$

les valeurs

$$I_3 = \Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right) + 6\, \Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$I_2 = 2\, \Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) + 8\, \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$I_1 = 4\, \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) + 8\sqrt{\pi}$$

$$I_0 = 8\sqrt{\pi}.$$

Calculons, d'autre part, les intégrales relatives à θ. La première

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = 1,$$

la seconde J_2 devient, en posant $\sin\theta = s$

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,[\log\cos\theta + 2\log\sin\theta]\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 \log(1-s)\,ds$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \log(1+s)\,ds + 2\int_0^1 \log s\,ds = -3 + \log 2;$$

la troisième J_3 est

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,[2\log\cos\theta\log\sin\theta + (\log\sin\theta)^2]\,d\theta$$

$$= \int_0^1 \log(1-s)\log s\,ds + \int_0^1 \log(1+s)\log s\,ds + \int_0^1 (\log s)^2\,ds$$

ou, d'après les formules connues,

$$\int_0^1 \frac{\log(1-s)}{s}\,ds = -\frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^1 \frac{\log(1+s)}{s}\,ds = \frac{\pi^2}{12},$$

$$J_3 = -\frac{\pi^2}{4} - 2\log 2 + 6.$$

Enfin la quatrième J_4 s'écrit

$$J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\log\cos\theta\,(\log\sin\theta)^2 = A + B,$$

avec

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 \log(1-s)(\log s)^2\,ds$$

$$B = \frac{1}{2}\int_0^1 \log(1+s)(\log s)^2\,ds.$$

On a

$$\log(1-s) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{s^n}{n}, \quad \int_0^1 s^n (\log s)^2\, ds = \frac{2}{(n+1)^3},$$

donc

$$A = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n(n+1)^3} = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3}.$$

En employant les notations suivants

$$S_k = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^k}, \quad S'_k = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^k}, \quad S''_k = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^k},$$

on a donc enfin

$$A = -(3 - S_2 - S_3).$$

On obtient de même

$$B = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3}\right]$$

$$B = -3 + 2S'_1 + S'_2 + S'_3.$$

La quatrième intégrale relative à θ est donc

$$J_4 = A + B = 2S'_1 + S'_2 + S'_3 + S_2 + S_3 - 6;$$

mais on a

$$S'_1 = \log 2, \quad S_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad S_k - S'_k = \frac{1}{2^{k-1}} S_k, \quad 2S''_k = S_k + S'_k,$$

$$S'_2 = \frac{1}{2} S_2 = \frac{\pi^2}{12}, \quad S'_3 = \frac{3}{4} S_3,$$

donc

$$J_4 = 2\log 2 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{7S_3}{4} - 6.$$

Finalement

$$-C\,\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)=I_3 J_1+I_2 J_2+I_1 J_3+I_0 J_4$$

$$=\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)+6\,\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)+\left[\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)+4\,\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right](2\log 2-6)$$

$$+\left[\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{\pi}\right](-\pi^2-8\log 2+24)$$

$$+\sqrt{\pi}(16\log 2+2\pi^2+14\,S_3-48)$$

d'où on tire, en posant

$$C+2\log 2=D$$

et rappelant les formules

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{\pi}\,D,\quad \Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\left(D^2+\frac{\pi^2}{2}\right)$$

(6) $$\frac{\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}=-D^3-\frac{3\pi^2}{2}D-14\,S_3.$$

Pour obtenir $\Gamma'''(1)$, il suffit de dériver (4) puis de faire $u=\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\frac{\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}-\frac{3\,\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}+2\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right]^3$$

$$=7\left[\Gamma'''(1)-3\,\Gamma''(1)\,\Gamma'(1)+2\,\Gamma'(1)^3\right]$$

d'où, en réduisant

(7) $$\Gamma'''(1)=-C^3-\frac{\pi^2}{2}C-2\,S_3.$$

On voit que, en considérant S_k comme un coefficient connu, les quantités $\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma^{(n)}(1)$, pour $n=1, 2, 3$ contiennent C au degré n. Cette propriété est générale: on peut l'établir par la voie du calcul intégral, en suivant la méthode précédente; mais il est plus simple d'employer une méthode différentielle qui fournira, en même temps, une vérification des formules trouvées.

III. On a, comme il est connu

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim_{\nu=\infty} \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \cdots - \frac{1}{x+\nu} + \log \nu \right].$$

En dérivant

$$\frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - \left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right]^2 = \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(x+n)^2} + \cdots\right] \tag{8}$$

d'où, pour $x=1$, en remarquant que $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$

$$\Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6};$$

pour $n = \frac{1}{2}$, on a de même

$$\frac{\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} - D^2 = 4\, S''_2;$$

mais

$$S''_2 = \frac{1}{2}(S_2 + S'_2) = \frac{3}{4} S_2 = \frac{\pi^2}{8}$$

donc, comme on l'a trouvé,

$$\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\left(D^2 + \frac{\pi^2}{2}\right).$$

En dérivant encore une fois (8) on a

$$\frac{\Gamma'''(x)}{\Gamma(x)} - 3\,\frac{\Gamma''(x)\,\Gamma'(x)}{\Gamma^2(x)} + 2\left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right]^3$$

$$= -2\left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(x+n)^3} + \cdots\right]$$

d'où pour $x=1$ et pour $x = \frac{1}{2}$

$$\Gamma'''(1) = -3\,C\left(C^2 + \frac{\pi^2}{6}\right) + 2\,C^3 - 2\,S_3$$

ce qui donne l'expression (7) et

$$\frac{\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = -3D\left(D^2 + \frac{\pi^2}{2}\right) + 2D^3 - 16S''_3$$

ce qui, d'après la relation

$$S''_3 = \frac{1}{2}(S_3 + S'_3) = \frac{7}{8}S_3$$

donne la formule (6).

Pour démontrer que $\Gamma^{(n)}(1)$ et $\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$ sont des polynomes de degré n en C dont les coefficients dépendent des sommes S_k, écrivons

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\,\Sigma(x)$$

et dérivons $(n-1)$ fois; nous avons

(9)
$$\begin{aligned}\Gamma^{(n)}(x) = {} & \Sigma(x)\,\Gamma^{(n-1)}(x) + \frac{n-1}{1}\Sigma'(x)\,\Gamma^{(n-2)}(x) \\ & + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\Sigma''(x)\,\Gamma^{(n-3)}(x) + \cdots\cdots \\ & + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1\,.\,2\ldots p}\Sigma^{(p)}(x)\,\Gamma^{(n-p-1)}(x) + \cdots \\ & + \Sigma^{(n-1)}(x)\,\Gamma(x).\end{aligned}$$

En faisant ensuite $x=1$ ou $x=\frac{1}{2}$ on a une équation démontrant le théorème. Par exemple pour $x=1$ on remarquera que $\Sigma(1) = -C$, $\Sigma'(1) = S_2$, $\Sigma''(1) = -1\,.\,2\,S_3, \ldots$

$$\Sigma^{(p)}(1) = (-1)^{p-1}\,1\,.\,2\ldots(p-1)\,p\,S_{p+1}.$$

On voit que, si le théorème est vrai pour les dérivées d'ordre $1, 2, \ldots (n-1)$, il l'est pour celle d'ordre n.

Un théorème analogue, qui se démontre de même, a lieu pour $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$.

On trouve notamment $\Gamma^{\mathrm{IV}}(1) = C^4 + \pi^2 C^2 + 8\,S_3\,C + 3\,S_2^2 + 6\,S_4$ où $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ et

$$\frac{\Gamma^{\mathrm{IV}}\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = D^4 + 3\pi^2 D^2 + 56\,S_3\,D + \frac{3\pi^4}{4} + 80\,S_4.$$

Voici, à cet égard, un théorème digne d'attention. La quantité $\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$ s'exprime en D par le même polynôme que $\Gamma^{(n)}(1)$ en C, à condition de remplacer, dans $\Gamma^{(n)}(1)$, les sommes S_k par les quantités $2^k S''_k$, c'est à dire par $(2^k-1)S_k$. En effet, en écrivant $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\Sigma(x)$ et dérivant $(n-1)$ fois, on obtient en faisant successivement $x=1$ et $x=\frac{1}{2}$ deux relations récurrentes identiques entre les polynômes $\Gamma^{(k)}(1)$, et $\frac{\Gamma^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$ avec cette seule différence que dans le deuxième membre, S_k est remplacé par $2^k S''_k$. Par exemple $\Gamma''(1)=C^2+S_2$, $\frac{\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}=D^2+4S''_2$, où $S_2=\frac{\pi^2}{6}$, $S''_2=\frac{3}{4}S_2=\frac{\pi^2}{8}$. De même $\Gamma'''(1)=-C^3-\frac{\pi^2}{2}C-2S_3$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)=-D^3-\frac{3\pi^2}{2}D-14S_3.$$

Nous poserons $\Gamma^{(n)}(1)=P_n(C)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)=Q_n(D)$, P_n et Q_n désignant des polynômes de degré n. On a alors la proposition suivante

$$\frac{dP_n}{dC}=-nP_{n-1},\quad \frac{dQ_n}{dD}=-nQ_{n-1}$$

ce qui fait rentrer les polynômes $(-1)^n P_n(C)$ et $(-1)^n Q_n(D)$ dans la catégorie générale des polynômes que j'ai étudiés autrefois (Annales de l'École Normale Supérieure, 2[ième] série 6. IX, 119—144, 1880). En effet, on vérifie cette proposition pour $n=1, 2, 3$; on démontre ensuite que, si elle est vraie pour les polynômes $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$, elle l'est pour P_n. D'après (9) on a

$$(9^{\text{bis}})\quad \begin{aligned} P_n=&-CP_{n-1}+(n-1)S_2P_{n-2}+\cdots+(-1)^{p-1}(n-1)(n-2)\ldots(n-p)S_{p+1}P_{n-p-1}\\ &+\cdots+(-1)^{n-3}(n-1)(n-2)\ldots 2\,.\,S_{n-1}P_1+(-1)^{n-2}(n-1)\ldots 1\,.\,S_n.\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à C et admettant la proposition pour $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{dP_n}{dC}=&(n-1)CP_{n-2}-P_{n-1}-(n-1)(n-2)S_2P_{n-3}+\cdots\\ &+(-1)^{p-2}(n-1)(n-2)\ldots(n-p-1)S_{p+1}P_{n-p-2}+\cdots\\ &+(-1)^{n-2}(n-1)(n-2)\ldots 2\,.\,1\,.\,S_{n-1}.\end{aligned}$$

Or ceci est égal à $-n P_{n-1}$ comme il est aisé de le vérifier à l'aide de la relation (9^{bis}) où on change n en $(n-1)$.

IV. On peut également obtenir les formules analogues à celle qui donne $-C\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$ ou encore $\Gamma'(1)\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$ par la voie de la différentiation. Pour cela on part de

$$\Gamma(u)\,\Gamma(v)=\Gamma(u+v)\,B(u,v)$$

et on dérive p fois par rapport à u et q fois par rapport à v, puis on donne à u et à v les valeurs 1 ou $\frac{1}{2}$, combinées de toutes les façons possibles, ce qui donne trois combinaisons. On arrive ainsi à des expressions contenant les intégrales

$$\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}(\log t)^h\,[\log(1-t)]^k\,dt$$

où

$$h=0,1,2,\ldots p,$$
$$k=0,1,2,\ldots q,$$

pour $u=1$ ou $\frac{1}{2}$, $v=1$ ou $\frac{1}{2}$. Je ne m'arrêterai pas aux formules correspondantes, faciles à établir. Je signale seulement les intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\theta\,d\theta=-\frac{\pi}{2}\log 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\theta\log\sin\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}\left[(\log 2)^2-\frac{\pi^2}{24}\right].$$

Dans les formules correspondantes C disparait.

Le même fait se présente si l'on part de la formule

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}=\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^u}\right)$$

d'où en dérivant

$$\frac{\Gamma''(u)}{\Gamma(u)} - \left[\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right]^2 = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cdot \frac{\log(1+x)}{(1+x)^u}$$

et pour $u=1$

$$\frac{\pi^2}{6} = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cdot \frac{\log(1+x)}{1+x}$$

formule où C disparait; de même dérivant de nouveaux et faisant $x=1$, on a, après avoir remplacé $\Gamma'''(1)$ par sa valeur (7),

$$2\,S_3 = \int_0^\infty \frac{[\log(1+x)]^2}{x(1+x)}\,dx.$$

V. En faisant dans l'expression

$$-C = \int_0^\infty e^{-u} \log u\,du,$$

$$u = \alpha t, \qquad \alpha > 0$$

on a

$$-\frac{C+\log\alpha}{\alpha} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \log t\,dt,$$

ce qui montre d'abord que

$$\int_0^\infty e^{-kt} \log t\,dt = 0$$

pour

$$k = e^{-C}.$$

Dérivant ensuite un certain nombre de fois par rapport à α, on a

$$-\frac{M_{n-1}(C+\log\alpha)}{\alpha^n} + \frac{N_{n-1}}{\alpha^n} = \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t} \log t\,dt,$$

où les coefficients M_i, N_i sont des entiers. Dérivant encore une fois par rapport à α, on a

$$M_n = n\,M_{n-1},\; N_n = n\,N_{n-1} + M_{n-1}$$

avec $M_0 = 1$, $N_0 = 0$. Donc

$$M_n = 1 \,.\, 2 \ldots n, \quad N_n = 1 \,.\, 2 \ldots n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

En faisant $\alpha = 1$, on voit que

$$-M_n C + N_n = \int_0^\infty t^{n+1} e^{-t} \log t \, dt.$$

On voit aussi que

$$\int_0^\infty t^{n+1} e^{-k_n t} \log t \, dt = 0$$

pour

$$k_n = e^{\frac{M_n}{N_n} - C} = e^{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - C}.$$

Si n est très grand, la valeur asymptotique de k_n est n, car

$$\frac{k_n}{n} = e^{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - C - \log n}$$

$$\lim \frac{k_n}{n} = 1,$$

pour n infini.

Il est evident que des formules analogues peuvent être obtenues pour $\int_0^\infty t^{n+1} e^{-\alpha t} (\log t)^h \, dt$. Par exemple

$$\frac{(C + \log \alpha)^2 + \frac{\pi^2}{6}}{\alpha} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} (\log t)^2 \, dt$$

expression qui ne s'annule pour aucune valeur réelle de $\log \alpha$ et qui donne des formules analogues aux précédentes si l'on dérive par rapport à α.

On a de même

$$\frac{-(C + \log \alpha)^3 - \frac{\pi^2}{2}(C + \log \alpha) - 2 S_3}{\alpha}$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} (\log t)^3 \, dt$$

où l'intégrale s'annule pour une valeur réelle de $\log \alpha$. Et ainsi de suite, relations que l'on peut dériver par rapport à α.

On obtient les mêmes relations en partant de

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,dx$$

faisant $x=\alpha t$

$$\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}=\int_0^\infty e^{-\alpha t} t^{p-1}\,dt,$$

dérivant par rapport à p et faisant ensuite $p=1$ ou $p=\frac{1}{2}\cdot$ Si l'on pose $\log \alpha=x$, $\alpha=e^x$, l'intégrale

$$e^x \int_0^\infty e^{-te^x} (\log t)^n\,dt \tag{10}$$

est un polynôme $R_n(x)$ de degré n en x. On a

$$\frac{dR_n}{dx}=-nR_{n-1} \tag{11}$$

ce qui fait rentrer $(-1)^n R_n$ dans la catégorie des polynômes déjà cités. D'après la théorie générale développée dans les Annales de l'École normale pour 1880 la fonction génératrice

$$1+\frac{h}{1}R_1(x)+\frac{h^2}{1\,.\,2}R_2(x)+\cdots+\frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}R_n(x)+\cdots$$

est de la forme

$$e^{-hx}f(h).$$

On doit donc pour déterminer $f(h)$ avoir, d'après l'expression du polynôme $R_n(x)$ par l'intégrale (10)

$$e^{-hx}f(h)=e^x \int_0^\infty e^{-te^x} e^{h\log t}\,dt$$

$$e^{-hx}f(h)=e^x \int_0^\infty e^{-te^x} t^h\,dt$$

ou en faisant

$$te^x = u, \quad e^x\,dt = du$$

$$e^{-hx} f(h) = e^{-hx} \int_0^\infty e^{-u} u^h\,du$$

d'où

$$f(h) = \Gamma(h+1) = h\,\Gamma(h).$$

La fonction génératrice des polynômes $R_n(x)$ est donc $e^{-hx}\Gamma(h+1)$.

La propriété (11) des polynômes $R_n(x)$ résulte aussi de ce fait, qui saute aux yeux, pour $n=1, 2, 3$, que

$$R_n(x) = P_n(C+x).$$

En effet on a

$$R_n(\log \alpha) = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} (\log t)^n\,dt.$$

Faisons le changement de variable

$$\alpha t = u, \quad \alpha\,dt = du,$$

$$R_n(\log \alpha) = \int_0^\infty e^{-u} (\log u - \log \alpha)^n\,du$$

$$= P_n(C) - n \log \alpha\, P_{n-1}(C) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (\log \alpha)^2 P_{n-2}(C) + \cdots$$

$$= P_n(C) + \log \alpha \frac{dP_n}{dC} + (\log \alpha)^2 \frac{d^2 P_n}{dC^2} + \cdots$$

$$= P_n(C + \log \alpha).$$

La proposition est ainsi démontrée.

Les expressions et les propriétés des polynômes $P_n(C)$ et $R_n(x)$ résultent immédiatement de l'expression trouvée pour la fonction génératrice $e^{-hx}\Gamma(h+1)$ des polynômes $R_n(x)$. On a en effet, d'après une formule connue,

$$\Gamma(h+1) = e^{-hC + \frac{1}{2} S_2 h^2 + \frac{1}{3} S_3 h^3 + \cdots}$$

alors

$$e^{-hx}\Gamma(h+1)=e^{-h(C+x)}e^{\frac{1}{2}S_2h^2+\frac{1}{3}S_3h^3+\cdots}$$

$$=\sum\frac{h^n}{1.2\ldots n}R_n(x).$$

On peut remarquer d'autre part que les polynômes $R_n(x)$ ont le moindre nombre possible de racines réelles, zéro si n est pair, une si n est impair. En effet, si n est pair l'expression de $R_n(x)$ par une intégrale définie montre que $R_n(x)$ est *positif*, quel que soit x; si n est impair, la relation $\frac{d\,R_n(x)}{dx}=-n\,R_{n-1}$ montre que $R_n(x)$ a, au plus, une racine réelle.

BESTIMMUNG DER DISKRIMINANTEN ALGEBRAISCHER KÖRPER.

Von

ÖYSTEIN ORE

in Oslo.

In den beiden Arbeiten: »Zur Theorie der algebraischen Körper»[1] und »Weitere Untersuchungen zur Theorie der algebraischen Körper»[2] habe ich eine algebraische Methode angegeben, wodurch man in einem vorgelegten Körper immer die Primidealzerlegung einer Primzahl bestimmen kann.

Die vorliegende Arbeit bildet eine Fortsetzung der eben erwähnten Arbeiten, indem ich mich hier zu verschiedenen anderen Aufgaben in der Theorie der algebraischen Körper wende. Es soll hier eine einfache Methode zur Bestimmung der Körperdiskriminante angegeben werden, wodurch man immer die genaue Potenz bestimmen kann, in welcher eine vorgelegte Primzahl die Körperdiskriminante teilt. Weiter soll gezeigt werden, wie man für ein jedes Primideal ein Fundamentalsystem aufstellen kann, und wie man daraus ein Fundamentalsystem für die zugehörige Primzahl ableitet. Sogleich gebe ich eine einfachere Form für die in den oben erwähnten Arbeiten gegebene Darstellung der Primideale. Aus diesen Untersuchungen folgen auch verchiedene interessante Sätze über die Zusammensetzung von Gleichungsdiskriminanten und Indizes für algebraische Zahlen.

Diese Abhandlung ist während meines Aufenthalts als Stipendiat an dem mathematischen Institute, Stockholm, geschrieben worden, und ich bringe dem Direktor des Instituts, Herrn Professor Mittag-Leffler, meinen herzlichsten Dank für die dadurch entstandene Erleichterung meiner Arbeit dar.

---

[1] Acta mathematica, 44. Diese Arbeit soll im Folgenden mit A bezeichnet werden.

[2] Acta mathematica, 45. Diese Arbeit soll im Folgenden mit B bezeichnet werden.

Kap. I. Bestimmung der Fundamentalsysteme.

§ 1.

Fundamentalsysteme für Primideale und Primzahlen.

Es sei ein algebraischer Körper $P(\vartheta)$ n^{ten} Grades gegeben. Die Zahl ϑ soll ganz algebraisch angenommen werden und genügt folglich einer Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 . x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{1}$$

wo die Koeffizienten

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

ganze rationale Zahlen bedeuten.

Im Folgenden soll immer p eine rationale Primzahl bezeichnen und weiter $\mathfrak{p}$ ein Primideal f^{ten} Grades sein, das in p aufgeht.

Ein System von f ganzen Zahlen des Körpers

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_f$$

soll ein *Fundamentalsystem für das Primideal* $\mathfrak{p}$ *heissen*, wenn die p^f Zahlen

$$a_1 . \eta_1 + a_2 . \eta_2 + \cdots + a_f . \eta_f \qquad (a_i = 0, 1, \ldots, p-1)$$

ein vollständiges Restsystem $(\operatorname{mod} \mathfrak{p})$ bilden, d. h. wenn α eine beliebige ganze Zahl des Körpers bedeutet, so ist

$$\alpha \equiv b_1 . \eta_1 + b_2 . \eta_2 + \cdots + b_f . \eta_f \pmod{\mathfrak{p}},$$

wo die Zahlen b_i eindeutig aus der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ bestimmt sind.

Allgemeiner soll gesagt werden, dass, wenn P ein Idealteiler von p ist und $NP = p^k$, die k Zahlen

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$$

ein *Fundamentalsystem für* P bilden, wenn die p^k ganzen Zahlen

$$a_1 . \eta_1 + a_2 . \eta_2 + \cdots + a_k . \eta_k \qquad (a_i = 0, 1, \ldots p-1)$$

ein vollständiges Restsystem $(\operatorname{mod} P)$ bilden.

Wenn nun $\mathfrak{p}^e$ ein Idealteiler von p ist, so kann man aus einem Fundamentalsysteme für $\mathfrak{p}$ leicht auch ein Fundamentalsystem für das Ideal $\mathfrak{p}^e$ ableiten. Wenn nämlich

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{e-1} \tag{2}$$

ein System von ganzen Zahlen des Körpers bezeichnet, wo allgemein γ_i durch $\mathfrak{p}^i$ genau teilbar ist, so bilden die Zahlen

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_f, \gamma_1 \eta_1, \gamma_1 \eta_2, \ldots \gamma_1 \eta_f, \ldots, \gamma_{e-1} \eta_1, \gamma_{e-1} \eta_2, \ldots \gamma_{e-1} \eta_f$$

ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{p}^e$.

Um dies nachzuweisen, braucht man nur zu zeigen, dass eine lineare Summe mit ganzen rationalen Koeffizienten von diesen Zahlen, also eine Zahl von der Form

$$\alpha = \sum_{i=1}^{f} a_i \eta_i + \gamma_1 \sum_{i=1}^{f} a_i^{(1)} \cdot \eta_i + \cdots + \gamma_{e-1} \sum_{i=1}^{f} a_i^{(e-1)} \cdot \eta_i,$$

nur dann durch $\mathfrak{p}^e$ teilbar sein kann, wenn die ganzen rationalen Zahlen $a_i^{(j)}$ alle durch p teilbar sind. Da aber α auch durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein muss und die Zahlen (2) alle durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind, so folgt

$$\sum_{i=1}^{f} a_i \eta_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

und somit sind alle a_i durch p teilbar. Diese letzte Summe ist daher auch sicher durch $\mathfrak{p}^e$ teilbar. Dann folgt weiter, dass man auch

$$\gamma_1 \cdot \sum_{i=1}^{f} a_i^{(1)} \cdot \eta_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$$

haben muss, und da γ_1 genau durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, wird auch

$$\sum_{i=1}^{f} a_i^{(1)} \cdot \eta_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

folglich werden alle $a_i^{(1)}$ durch p teilbar, usw.

Ein System

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m \tag{3}$$

von n ganzen Zahlen des Körpers soll ein *Fundamentalsystem für die Primzahl* p heissen, wenn die p^n Zahlen

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \cdots + a_n \lambda_n \qquad (a_i = 0, 1, \ldots p-1)$$

ein vollständiges Restsystem für p bilden. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Zahlen (3) ein Fundamentalsystem für p bilden, kann man auch so ausdrücken, dass sie (mod p) linear unabhängig sind, d. h. dass eine Kongruenz

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \cdots + a_n \lambda_n \equiv 0 \pmod{p}$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten nur dann bestehen kann, wenn alle a_i durch p teilbar sind.

Man kann aber diese Bedingung etwas umformen. Wenn nämlich

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

eine Minimalbasis des Körpers ist, so hat man

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= b_{1,1}\,\omega_1 + b_{1,2}\,\omega_2 + \cdots + b_{1,n}\,\omega_n, \\
\lambda_2 &= b_{2,1}\,\omega_1 + b_{2,2}\,\omega_2 + \cdots + b_{2,n}\,\omega_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_n &= b_{n,1}\,\omega_1 + b_{n,2}\,\omega_2 + \cdots + b_{n,n}\,\omega_n,
\end{aligned}$$

wo die Koeffizienten $b_{i,j}$ ganz rational sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung für ein Fundamentalsystem für p wird dann, dass der *Index*

$$k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots & b_{1,n}, \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots & b_{2,n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & b_{n,2}, & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

nicht durch p teilbar ist. Bedeutet d die Körperdiskriminante, so folgt aus der Relation

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)^2 \,.\, d,$$

dass die Primzahl p in der Körperdiskriminante und in der Diskriminante $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ des Fundamentalsystems für p in derselben Potenz aufgeht. Um daher die Potenz zu bestimmen, in welcher p in der Körperdiskriminante aufgeht, braucht man folglich nur ein Fundamentalsystem für die Primzahl p zu kennen.

Es ist eben gezeigt worden, wie man aus einem Fundamentalsysteme für das Primideal $\mathfrak{p}$ ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{p}^e$ herleiten kann. Ist aber

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\ldots\mathfrak{p}_s^{e_s},\ N\mathfrak{p}_i = p^{f_i}$$

die Primidealzerlegung von p, so kann man, wenn die Fundamentalsysteme für $\mathfrak{p}_i^{e_i}\,(i = 1, 2, \ldots s)$ bekannt sind, auch ein Fundamentalsystem für p herleiten. Man kann nämlich solche ganze Zahlen Π_i des Körpers bestimmen, dass Π_i durch das Ideal

$$\mathfrak{p}_1^{e_1}\ldots\mathfrak{p}_{i-1}^{e_{i-1}}\mathfrak{p}_{i+1}^{e_{i+1}}\ldots\mathfrak{p}_s^{e_s},$$

aber nicht durch $\mathfrak{p}_i$ teilbar ist. Wenn dann die Zahlen

$$\eta_1^{(i)}, \eta_2^{(i)}, \ldots \eta_{e_i f_i}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ bilden, so sind die Zahlen

$$\Pi_i\,\eta_1^{(i)}, \Pi_i\,\eta_1^{(i)}, \ldots \Pi_i\,.\,\eta_{e_i f_i}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

ein Fundamentalsystem für p. Denn eine Zahl α, welche eine lineare Summe mit ganzen rationalen Koeffizienten von diesen Zahlen ist, hat die Gestalt

$$\alpha = \Pi_1\sum_{j=1}^{e_1 f_1} a_j^{(1)}\,.\,\eta_j^{(1)} + \Pi_2\sum_{j=1}^{e_2 f_2} a_j^{(2)}\,\eta^{(2)} + \cdots + \Pi_s\sum_{j=1}^{e_s f_s} a_j^{(s)}\,\eta_j^{(s)}.$$

Wenn nun α durch p teilbar sein soll, müssen alle Koeffizienten $a_j^{(i)}$ durch p teilbar sein. Da nämlich α auch durch das Ideal $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ teilbar sein muss und da alle Zahlen $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_s$ ausser Π_i durch $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ teilbar sind, so folgt

$$\Pi_i\sum_{j=1}^{e_i f_i} a_j^{(i)}\,.\,\eta_j^{(i)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i^{e_i}}$$

und daraus, weil Π_i nicht durch $\mathfrak{p}_i$ teilbar ist,

$$\sum_{j=1}^{e_i f_i} a_j^{(i)}\,.\,\eta_j^{(i)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i^{e_i}}.$$

Da aber die Zahlen $\eta_j^{(i)}$ ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ bilden, so folgt aus dieser Kongruenz, dass alle $a_j^{(i)}$ durch p teilbar sein müssen.

§ 2.

Bestimmung der Primideale.

Wie in der Arbeit A gezeigt worden ist, kann man nun die Primidealzerlegung einer vorgelegten Primzahl p in der folgenden Weise bestimmen.

Es sei

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{e_1} \varphi_2(x)^{e_2} \ldots \varphi_s(x)^{e_s} \pmod{p} \tag{4}$$

die Primfunktionzerlegung von $f(x) \pmod{p}$, wo die Primfunktion $\varphi_i(x)$ die Form

$$\varphi_i(x) = x^{m_i} + a_1^{(i)} . x^{m_i - 1} + \cdots + a_{m_i}^{(i)}$$

hat. Dann folgt zunächst aus (4), dass man für p die Idealzerlegung

$$p = \mathfrak{a}_1 . \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s \tag{5}$$

hat, wo keine der Ideale $\mathfrak{a}_i$ Einheitsideale sind. Weiter ist

$$\mathfrak{a}_i = (p, \varphi_i(\vartheta)^{e_i}) \qquad (i = 1, 2 \ldots s),$$

und diese Ideale sind alle zu einander relativ prim.

Um eine weitere Zerlegung des Ideals $\mathfrak{a} = (p, \varphi(\vartheta)^e)$ zu bestimmen, bildet man die *Entwicklung* $(p, \varphi(x))$ *von* $f(x)$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{t} Q_i(x) . p^{\alpha_i} . \varphi(x)^i . \tag{6}$$

Dabei bedeutet also $\varphi(x)$ eine Primfunktion $(\mathrm{mod}\, p)$ vom Grade m und $Q_i(x)$ ein Polynom höchstens vom Grade $m-1$. Weiter soll der Exponent α_i so gewählt sein, dass $Q_i(x)$ den Zahlenfaktor p nicht enthält, und endlich ist

$$t = \left[\frac{n}{m}\right].$$

Zu den Punkten $(t-i, \alpha_i)$ konstruiert man dann das zugehörige *Newtonsche Polygon.* Da vorausgesetzt wird, dass $\varphi(x) \pmod{p}$ in $f(x)$ aufgeht, so wird sicher ein Teil dieses Polygones oberhalb der X-achse liegen. Dieser Teil soll das *Hauptpolygon* $(p, \varphi(x))$ genannt werden, und seine Seiten seien mit

$$S_1, S_2, \ldots S_k$$

bezeichnet.

Weiter seien bzw.

$$l_1, l_2, \ldots l_k$$

und

$$h_1, h_2, \ldots h_k$$

die Projektionen dieser Seiten auf die X-achse und Y-achse. Die Neigung φ_r der Seite S_r gegen die X-achse ist dann durch

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{h_i}{l_i}$$

bestimmt. Der grösste gemeinsame Faktor der Zahlen l_i und h_i soll mit ε_i bezeichnet werden, folglich ist

$$\begin{aligned} l_i &= \varepsilon_i \,.\, \lambda_i, \\ h_i &= \varepsilon_i \,.\, \varkappa_i, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

wo λ_i zu $\varkappa_i$ relativ prim ist. Da die Seiten des Polygones ständig wachsende Neigungen besitzen, so ist auch

$$\frac{\varkappa_1}{\lambda_1} < \frac{\varkappa_2}{\lambda_2} < \cdots < \frac{\varkappa_k}{\lambda_k}. \tag{7}$$

Weiter ist in A der Faktor $f_i(x)$ der i^{ten} Seite S_i definiert worden als

$$f_i(x) = \varphi(x)^{\varepsilon_i \cdot \lambda_i} + S_1^{(i)}(x) \,.\, p^{\varkappa_i} \,.\, \varphi(x)^{(\varepsilon_i - 1)\lambda_i} + \cdots + S_{\varepsilon_i}^{(i)}(x) \,.\, p^{\varepsilon_i \varkappa_i}\,. \tag{8}$$

Diesen leitet man nach A Kap. 2, § 4 einfach aus der Summe der Glieder in (6) ab, für welche die entsprechenden Punkte auf S_i liegen. Den Faktor (8) der Seite S_i zerlegt man dann weiter in Primfaktoren für diese Seite, also

$$f_i(x) \equiv f_1^{(i)}(x) \,.\, f_2^{(i)}(x) \ldots f_{l_i}^{(i)}(x) \; (\operatorname{mod} S_i), \tag{9}$$

wo allgemein

$$f_j^{(i)}(x) = \varphi(x)^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \lambda_i} + S_{1,j}(x) \,.\, p^{\varkappa_i} \,.\, \varphi(x)^{(\varepsilon_j^{(i)} - 1)\lambda_i} + \cdots + S^{(i)}_{\varepsilon_j^{(i)}, j}(x) \,.\, p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \varkappa_i} \tag{10}$$

eine Primfunktion der i^{ten} Seite ist.

Setzt man

$$f_i(x, y) = y^{\varepsilon_i} + S_1^{(i)}(x) \,.\, y^{\varepsilon_i - 1} + \cdots + S_{\varepsilon_i}^{(i)}(x),$$

so bedeutet die Zerlegung (9), dass eine Kongruenz

$$f_i(x, y) \equiv f_1^{(i)}(x, y) \cdot f_2^{(i)}(x, y) \ldots f_{t_i}^{(i)}(x, y) \pmod{p, \varphi(x)}$$

besteht, wo allgemein

$$f_j^{(i)}(x, y) = y^{\varepsilon_j^{(i)}} + S_{1,j}^{(i)}(x)\, y^{\varepsilon_j^{(i)}-1} + \cdots + S_{\varepsilon_j^{(i)}, j}^{(i)}(x)$$

eine Primfunktion (modd p, $\varphi(x)$) bedeutet. Man sieht auch leicht ein, dass die Formeln

$$f_i\left(x, \frac{\varphi(x)^{\lambda_i}}{p^{\varkappa_i}}\right) = \frac{f_i(x)}{p^{h_i}}$$

und

$$f_j^{(i)}\left(x, \frac{\varphi(x)^{\lambda_i}}{p^{\varkappa_i}}\right) = \frac{f_j^{(i)}(x)}{p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \varkappa_i}}$$

bestehen.

In der Arbeit B habe ich nun die folgende Definition gegeben: Die Gleichung $f(x) = 0$ für eine ganze Zahl des Körpers wird *regulär in Bezug auf* p genannt, wenn erstens $f(x)$ irreduzibel und vom Grade n ist, und wenn zweitens, wenn $\varphi(x)$ eine Primfunktion (mod p) bedeutet, welche in $f(x)$ (mod p) aufgeht, die Primfaktoren in der Zerlegung (9) für jede Seite verschieden sind.

In B ist weiter gezeigt worden, dass es in jedem Körper und für jede Primzahl p unendlich viele reguläre Gleichungen gibt, und es ist daher keine Einschränkung der Allgemeinheit der Untersuchungen, wenn ich im Folgenden für die Untersuchung eines algebraischen Zahlkörpers eine reguläre Gleichung zu Grunde lege.

Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ im Folgenden als eine reguläre Gleichung in Bezug auf p angenommen wird, kann man nach A die Primidealzerlegung der Primzahl p einfach bestimmen.

Ein Idealteiler $\mathfrak{a} = (p, \varphi(\vartheta)^e)$ von p in der Zerlegung (5) hat nämlich dann die Primidealzerlegung

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{p}_1^{(1)} \cdot \mathfrak{p}_2^{(1)} \ldots \mathfrak{p}_t^{(1)})^{\lambda_1} \cdot (\mathfrak{p}_1^{(2)} \ldots \mathfrak{p}_{t_2}^{(2)})^{\lambda_2} \ldots (\mathfrak{p}_1^{(k)} \ldots \mathfrak{p}_t^{(k)})^{\lambda_k}, \tag{11}$$

wo das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ vom Grade $\varepsilon_j^{(i)} \cdot m$ ist, also

$$N(\mathfrak{p}_j^{(i)}) = p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot m}.$$

Aus (11) folgt dann durch Multiplikation der Ideale $\mathfrak{a}_t$ nach (5) die Primidealzerlegung von p.

In A, Kap. 4, § 4, habe ich auch eine Darstellung eines Primideals $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ als grössten gemeinsamen Faktor von gewissen Hauptidealen gegeben. In den folgenden Paragraphen werde ich mich mit diesen Untersuchungen über Primideale beschäftigen und zwar zeigen, wie man ihnen eine einfachere und für meine folgenden Untersuchungen bequemere Form geben kann.

§ 3.

Zerlegung einer regulären Gleichung für Primzahlpotenzmoduln.

Ich werde mich hier mit der Zerlegung des regulären Polynoms $f(x)$ für einen Primzahlpotenzmodul beschäftigen, und zwar zeigen, wie man diese Zerlegung einfach aus dem Polygone und den Primfaktoren der Seiten herleiten kann.

Aus der Darstellung (4) von $f(x) \pmod p$ folgt nach einem Satze von Schoenemann[1], dass auch für jeden Primzahlpotenzmodul p^M eine Zerlegung

$$f(x) \equiv F_1(x) \,.\, F_2(x) \ldots F_s(x) \pmod{p^M} \tag{12}$$

besteht, wo allgemein

$$F_i(x) \equiv \varphi_i(x)^{e_i} \pmod p\,. \tag{13}$$

Nach (12) kann man daher immer das Polynom $f(x)$ in der Form

$$f(x) = F_1(x) \,.\, F_2(x) \ldots F_s(x) + p^M \,.\, N(x) \tag{14}$$

schreiben, wo $N(x)$ ein Polynom von höchstens $(n-1)^{\text{tem}}$ Grade ist. Für die folgenden Untersuchungen denke ich mir in (14) den Exponenten M fest gewählt und zwar grösser als eine gewisse untere Grenze, die durch die folgenden Untersuchungen bestimmt wird.

Es sei $F(x)$ einer der Faktoren (12) von $f(x) \pmod{p^M}$ und nach (13)

$$F(x) \equiv \varphi(x)^e \pmod p\,. \tag{15}$$

Ich bilde nun das Polygon $(p, \varphi(x))$ von $F(x)$. Dieses Polygon S wird, wie man leicht wegen (15) sieht, ein Hauptpolygon.

[1] Schoenemann: Crelles Journ. 32. S. 98.

Wenn im Folgenden in (12) der Exponent M grösser als die Ordinate α_t des höchsten Punktes (t, α_t) in dem Polygone $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ gewählt wird, sieht man einfach nach A ein, dass das Polygon S von $F(x)(p, \varphi(x))$ gleich dem Hauptpolygone von $f(x)(p, \varphi(x))$ wird. Weiter bemerkt man auch, dass die Faktoren der Seiten gleich den entsprechenden Seitenfaktoren in dem Hauptpolygone von $f(x)(p, \varphi(x))$ sind, und folglich auch einfach aus der Entwicklung $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ bestimmt werden können. Für die praktische Anwendung ist diese Bemerkung insofern von Nutzen, dass man für die Bestimmung der Faktoren der Seiten die Zerlegung (12) nicht wirklich auszuführen braucht.

Die Faktoren der Seiten für $F(x)$ sollen also durch die Formel (8) gegeben sein, und die Zerlegung in Primfaktoren für die entsprechende Seite ist dann weiter durch (9) und (10) bestimmt, und da $f(x)$ regulär vorausgesetzt ist, sollen alle Primfunktionen (10) für dieselbe Seite verschieden sein.

Nach A, Satz 5, kann man daher auch schreiben,

$$F(x) \equiv f_1(x) \,.\, f_2(x) \ldots f_k(x) \pmod{S}$$

indem man unter dieser Kongruenz versteht, dass in der Differenz

$$F(x) - f_1(x) \,.\, f_2(x) \ldots f_k(x)$$

alle repräsentierenden Punkte oberhalb S liegen. Man kann dies auch so ausdrücken, dass für $F(x) \pmod{S}$ eine Zerlegung in Faktoren besteht und zwar derart, dass das Polygon eines Faktors gleich einer Seite S_i von S ist.

Daraus folgt aber nach A, Kap. 2, § 6, dass für alle Primzahlpotenzmoduln p^M eine Zerlegung

$$F(x) \equiv \Phi_1(x) \,.\, \Phi_2(x) \ldots \Phi_k(x) \pmod{p^M} \tag{16}$$

besteht, wo auch das Polynom $\Phi_i(x)$ das geradlinige Polygon S_i besitzt und ausserdem

$$\Phi_i(x) \equiv f_i(x) \pmod{S_i}.$$

Den Faktor $\Phi_i(x)$ kann man aber weiter in Faktoren $(\bmod\, p^M)$ zerlegen, da nach (9)

$$\Phi_i(x) \equiv f_1^{(i)}(x) \,.\, f_2^{(i)}(x) \ldots f_{t_i}^{(i)}(x) \pmod{S_i}.$$

Aus dieser Kongruenz folgt nämlich nach A, Kap. 2, § 6, dass auch immer die Zerlegung

$$\Phi_i(x) \equiv \Phi_1^{(i)}(x) \,.\, \Phi_2^{(i)}(x) \ldots \Phi_{t_i}^{(i)}(x) \pmod{p^M}$$

besteht. Hier ist das Polygon $S_j^{(i)}$ von $\Phi_j^{(i)}(x)$ gleich dem Polygone von $f_j^{(i)}(x)$, also geradlinig und von der Neigung $\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$. Ausserdem sind die beiden Polynome für diese Gerade $S_j^{(i)}$ kongruent, also

$$\Phi_j^{(i)}(x) \equiv f_j^{(i)}(x) \pmod{S_j^{(i)}}. \tag{17}$$

Man sieht leicht ein, dass dadurch auch eine Zerlegung von $\Phi_i(x)$ in irreduzible Faktoren (mod p^M) gefunden ist, wenn nur der Exponent M grösser als die früher angegebene Grenze ist. Denn nach dem Satze, dass das Polygon eines Produkts aus den Polygonen der Faktoren zusammengesetzt ist,[1] folgt, dass $\Phi_j^{(i)}(x)$ (mod p^M) irreduzibel sein muss. Wenn nämlich $\Phi_j^{(i)}(x)$ reduzibel wäre, müsste ein Faktor auch ein Polygon $(p, \varphi(x))$ mit der Neigung $\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$ besitzen, und daraus würde folgen, dass $\Phi_j^{(i)}(x)$ auch für das Polygon $S_j^{(i)}$ reduzibel wäre, was nach (17) nicht möglich ist, da nach der Voraussetzung $f_j^{(i)}(x)$ eine Primfunktion für die i^{te} Seite war.

Man hat folglich den interessanten Satz:

Satz. 1. Wenn $f(x)$ in Bezug auf die Primzahl p regulär ist, besteht für jeden Primzahlpotenzmodul p^M die Zerlegung

$$f(x) \equiv F_1(x) \,.\, F_2(x) \ldots F_s(x) \pmod{p^M},$$

wo weiter für einen Faktor $F_t(x)$

$$F(x) \equiv \Phi_1(x) \,.\, \Phi_2(x) \ldots \Phi_k(x) \pmod{p^M}.$$

Ein Faktor $\Phi_i(x)$ hat dann weiter die Zerlegung

$$\Phi_i(x) \equiv \Phi_1^{(i)}(x) \,.\, \Phi_2^{(i)}(x) \ldots \Phi_{t_i}^{(i)}(x) \pmod{p^M},$$

wo für einen Faktor $\Phi_j^{(i)}(x)$ die Kongruenz (17) besteht. Wenn der Exponent M genügend gross gewählt wird, so ist der Faktor $\Phi_j^{(i)}(x)$ (mod p^M) irreduzibel.

Wenn

$$h = h_1 + h_2 + \cdots + h_k$$

[1] Ore, Ö: Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien. Math. Zeitschr. Bd. 18. S. 285.

die Ordinate des höchsten Punktes in dem Polygone $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ ist und H die grösste der Zahlen h, so wird, wenn $M > H$ gewählt wird, die Zerlegung des Satzes I eine irreduzible.

Wie man leicht einsieht, ist die Zerlegung $(\bmod p^M)$ des Satzes I im allgemeinen nicht eindeutig für den Modul p^M. Eine genauere Untersuchung zeigt aber, dass es eine solche feste Zahl h gibt, dass diese Zerlegung $(\bmod p^M)$ für den Modul p^{M-h} eindeutig wird.

§ 4.

Hilfssätze.

Aus der Kongruenz (12) folgt nun, wenn $x = \vartheta$ gesetzt wird,

$$F_1(\vartheta) \,.\, F_2(\vartheta) \ldots F_s(\vartheta) \equiv 0 \pmod{p^M}, \tag{18}$$

und hier können zwei Zahlen $F_i(\vartheta)$ und $F_j(\vartheta)$ keinen gemeinsamen Primidealdivisor $\mathfrak{p}$ besitzen, der gleichzeitig in p aufgeht. Denn es ist ja nach (13)

$$F_i(x) \equiv \varphi_i(x)^{e_i}, \quad F_j(x) \equiv \varphi_j(x)^{e_j} \pmod{p},$$

und der gemeinsame Primidealfaktor $\mathfrak{p}$ muss daher auch in den Zahlen $\varphi_i(\vartheta)$ und $\varphi_j(\vartheta)$ aufgehen. Dies ist aber nicht möglich, weil man immer solche Polynome $A(x)$ und $B(x)$ bestimmen kann, dass

$$\varphi_i(x) \,.\, A(x) + \varphi_j(x) \,.\, B(x) \equiv 1 \pmod{p},$$

woraus für $x = \vartheta$ folgen würde, dass auch 1 durch $\mathfrak{p}$ teilbar wäre.

Es sollen nun die Primideale untersucht werden, welche gleichzeitig in p und $\varphi(\vartheta)$ aufgehen, wo $\varphi(x)$ eine Primfunktion $(\bmod p)$ bezeichnet, welche in $f(x)$ aufgeht. In A, Kap. 3, § 5 ist gezeigt worden, dass es immer solche gemeinsame Primideale $\mathfrak{p}$ gibt. Man erkennt ferner leicht, dass, wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, wofür

$$\varphi(\vartheta) \equiv p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

eine Zahl $h(\vartheta)$, wo $h(x)$ ein beliebiges Polynom in x bedeutet, nur dann durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein kann, wenn $h(x) \equiv 0$ (modd $p, \varphi(x)$).

Es sei jetzt

$$p = \mathfrak{p}^s \,.\, \mathfrak{p}_1$$

$$\varphi(\vartheta) = \mathfrak{p}^t \,.\, \mathfrak{p}_2$$

eine Idealzerlegung von p und $\varphi(\vartheta)$, wo die Ideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind. Nach A, Satz 16 folgt aber dann, dass die Relation

$$\frac{s}{t}=\frac{\lambda_i}{\varkappa_i} \tag{19}$$

besteht, wo i eine der Zahlen 1, 2, ... k bedeutet. Im Folgenden soll $\mathfrak{p}$ ein *Primideal der i^{ten} Seite* genannt werden, wenn für die Exponenten s und t die Gleichung (19) erfüllt ist. Da aber unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ regulär ist, die Primidealzerlegung von p durch (11) bestimmt ist, wird $s=\lambda_i$ und folglich $t=\varkappa_i$. Für ein Primideal der i^{ten} Seite ist daher p durch $\mathfrak{p}^{\lambda_i}$, $\varphi(\vartheta)$ durch $\mathfrak{p}^{\varkappa_i}$ genau teilbar.

Daraus folgt nach (11), dass man für $\varphi(\vartheta)$ die Primidealzerlegung

$$\varphi(\vartheta)=(\mathfrak{p}^{(1)},\ldots\mathfrak{p}^{(1)}_{t_1})^{\varkappa_1}\cdot(\mathfrak{p}^{(2)},\ldots\mathfrak{p}^{(2)}_{t_2})^{\varkappa_2}\ldots(\mathfrak{p}^{(k)},\ldots\mathfrak{p}^{(k)}_{t_k})^{\varkappa_k}\cdot\Phi \tag{20}$$

hat, wobei das Ideal Φ zu p relativ prim ist.

Aus (18) folgt nun, dass ein Primideal $\mathfrak{p}$, das gleichzeitig in p und $\varphi_i(\vartheta)$ aufgeht, auch in $F_i(\vartheta)$ in einer beliebig hohen Potenz aufgehen muss, wenn der Exponent M hinreichend gross wird.

Im Folgenden werden sehr oft Zahlen untersucht, welche von der Wahl der Exponenten M abhängen, z. B. $F_i(\vartheta)$, $\Phi_i(\vartheta)$, $\Phi^{(i)}_j(\vartheta)$ und daraus abgeleitete Grössen. *Der Kürze wegen werde ich dann sagen, dass ein Primideal $\mathfrak{p}$ in einer beliebig hohen Potenz in einer solchen Zahl A aufgeht, wenn man durch eine hinreichend grosse Wahl des Exponenten M erreichen kann, dass auch A durch eine beliebig grosse, vorgeschriebene Potenz des Primideals $\mathfrak{p}$ teilbar wird.*

In dieser Bezeichnung kann man also sagen, dass, wenn $\mathfrak{p}$ ein gemeinsames Primideal für p und $\varphi_i(\vartheta)$ ist, $F_i(\vartheta)$ durch eine beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Aus der Kongruenz (16) folgt aber weiter

$$F(\vartheta)\equiv\Phi_1(\vartheta)\cdot\Phi_2(\vartheta)\ldots\Phi_k(\vartheta)\pmod{p^M}, \tag{21}$$

und dies zeigt, dass auch mindestens eine der Zahlen $\Phi_i(\vartheta)$ durch das Primideal $\mathfrak{p}$ in einer beliebig hohen Potenz teilbar ist. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass allgemein die Zahl $\Phi_i(\vartheta)$ alle Primideale der i^{ten} Seite

$$\mathfrak{p}^{(i)}_j \qquad (j=1, 2, \ldots t_i)$$

in beliebig hohen Potenzen enthalten muss.

Wenn nun $\mathfrak{p}^{(i)}$ ein beliebiges Primideal der i^{ten} Seite ist, so geht also $\mathfrak{p}^{(i)}$ in p in der Potenz λ_i und in $\varphi(\vartheta)$ in der Potenz $\varkappa_i$ auf. Es soll nun untersucht werden, in welcher Potenz $\mathfrak{p}^{(i)}$ in einer Zahl $\Phi_j(\vartheta)$, $j \neq i$, aufgeht.

Da $\Phi_j(\vartheta)$ das geradlinige Polygon $S_j(p, \varphi(x))$ hat, so kann man annehmen, dass dieses Polynom die Gestalt (A. Kap. 2. § 5)

$$\Phi_j(x) = \varphi(x)^{l_j} + A_1^{(j)}(x) \,.\, p^{\left\lceil \frac{h_j}{l_j} \right\rceil} \,.\, \varphi(x)^{l_j - 1} + A_2^{(j)}(x) \,.\, p^{\left\lceil \frac{2h_j}{l_j} \right\rceil} + \cdots + A_{l_j}^{(j)}(x) \,.\, p^{h_j} \tag{22}$$

hat,[1] wo die Koeffizienten $A_t^{(j)}(x)$ Polynome von höchstens $(m-1)^{\text{tem}}$ Grade sind. Die Gliedersumme in $\Phi_j(x)$ für welche die repräsentierenden Punkte auf dem geradlinigen Polygone S_j für $\Phi_j(x)$ liegen, ist dann durch

$$\varphi(x)^{\varepsilon_j \cdot \lambda_j} + A_{\lambda_j}^{(j)}(x) \,.\, p^{\varkappa_j} \,.\, \varphi(x)^{(\varepsilon_j - 1)\lambda_j} + A_{2\lambda_j}^{(j)}(x) \,.\, p^{2\varkappa_j} \,.\, \varphi(x)^{(\varepsilon_j - 2)\lambda_j} + \cdots + A_{\varepsilon_j \cdot \lambda_j}^{(j)}(x) \,.\, p^{\varepsilon_j \cdot \varkappa_i}$$

gegeben, und da nach § 3 diese Summe kongruent $f_j(x)$ (mod S_j) ist, so kann man allgemein

$$A_{k \cdot \lambda_j}^{(j)}(x) \equiv S_k^{(j)}(x) \pmod{p, \varphi(x)}$$

annehmen. Dies zeigt speziell, dass

$$A_{l_j}^{(j)}(x) \equiv S_{\varepsilon_j}^{(j)}(x) \not\equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)}$$

sein muss.

Setzt man nun in (22) $x = \vartheta$, so wird ein Glied

$$A_t^{(j)}(\vartheta) \,.\, p^{\left\lceil \frac{t h_j}{l_j} \right\rceil} \,.\, \varphi(\vartheta)^{l_j - t}$$

durch

$$\mathfrak{p}^{(i)\, \lambda_i \cdot \left\lceil \frac{t h_j}{l_j} \right\rceil + \varkappa_i \cdot l_j - t \cdot \varkappa_i} \tag{23}$$

teilbar, und der Exponent in (23) ist grösser oder gleich

$$\lambda_i \cdot \frac{t h_j}{l_j} + \varkappa_i \cdot l_j - t \cdot \varkappa_i = \varkappa_i \, l_j - t \cdot \lambda_i \left(\frac{\varkappa_i}{\lambda_i} - \frac{\varkappa_j}{\lambda_j} \right).$$

[1] Wenn s eine reelle positive Zahl bedeutet, soll das Symbol $\lceil s \rceil$ die kleinste ganze rationale Zahl bezeichnen, welche grösser oder gleich s ist.

Wenn daher hier $i<j$ ist, so wird nach (7)

$$\frac{\varkappa_j}{\lambda_j} < \frac{\varkappa_i}{\lambda_i},$$

und folglich ist der Exponent in (23) für $t=0$ am kleinsten, und zwar gleich $\varkappa_i \,.\, l_j$. Da das Glied $\varphi(\vartheta)^{l_j}$ auch wirklich genau durch diese Potenz von $\mathfrak{p}^{(i)}$ teilbar ist, wird also $\Phi_j(\vartheta)$ genau durch ${\mathfrak{p}^{(i)}}^{\varkappa_i \cdot l_j}$ teilbar.

Wenn aber $i>j$ ist, wird

$$\frac{\varkappa_i}{\lambda_i} > \frac{\varkappa_j}{\lambda_j},$$

und der Exponent in (23) ist daher für $t=l_j$ am kleinsten und zwar gleich $h_j \,.\, \lambda_i$. Da auch das Glied

$$A_{l_i}^{(i)}(\vartheta) \,.\, p^{h_j}$$

genau durch diese Potenz von $\mathfrak{p}^{(i)}$ teilbar ist, wird in diesem Falle $\Phi_j(\vartheta)$ genau durch ${\mathfrak{p}^{(i)}}^{\lambda_j \cdot h_j}$ teilbar.

Es ist daher bewiesen:

Satz. 2. Wenn $\mathfrak{p}^{(i)}$ ein Primideal der i^{ten} Seite ist, so wird die Zahl $\Phi_j(\vartheta)$ durch $\mathfrak{p}^{(i)}$ genau in der Potenz ${\mathfrak{p}^{(i)}}^{\lambda_i \cdot h_j}$ teilbar, wenn $i>j$. Wenn $i<j$ ist, wird $\Phi_j(\vartheta)$ genau durch ${\mathfrak{p}^{(i)}}^{\varkappa_i \cdot l_j}$ teilbar.

Das Produkt der Zahlen

$$\Phi_1(\vartheta) \ldots \Phi_{i-1}(\vartheta) \,.\, \Phi_{i+1}(\vartheta) \ldots \Phi_k(\vartheta)$$

enthält daher $\mathfrak{p}^{(i)}$ genau in der Potenz

$${\mathfrak{p}^{(i)}}^{(h_1+h_2+\cdots+h_{i-1})\lambda_i + (l_{i+1}+l_{i+2}+\cdots+l_k)\varkappa_i}$$

und da der Exponent hier fest bestimmt ist, so folgt aus (21), dass man den Exponenten M so gross wählen kann, dass $\Phi_i(\vartheta)$ durch $\mathfrak{p}^{(i)}$ in einer beliebig vorgeschriebenen Potenz teilbar wird, d. h. $\Phi_i(\vartheta)$ ist durch alle Primideale der i^{ten} Seite in beliebig hohen Potenzen teilbar.

§ 5.

Bestimmung der Fundamentalsysteme für Primideale.

Zunächst werde ich hier einige Hilfsgrössen aufstellen, welche für die späteren Untersuchungen notwendig sind.

Bezeichnet man mit $\Pi(x)$ das Produkt aller Faktoren $F_i(x)$ in (12), welche nicht durch die Primfunktion $\varphi(x)$ (mod p) teilbar sind, so ist die Zahl $\Pi(\vartheta)$ ganz und durch eine beliebig hohe (von M abhängige) Potenz eines jeden Primidealfaktors $\mathfrak{p}$ von p teilbar, der nicht in dem Ideal $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht.

Daraus sieht man auch leicht ein, dass die Zahl

$$N_1 = \Pi(\vartheta) \cdot \frac{\Phi_1(\vartheta)}{p^{h_1}}$$

ganz ist. Um dies zu zeigen, braucht man nur nachzuweisen, dass ein Primideal $\mathfrak{p}$ immer in einer ebenso hohen Potenz im Zähler wie im Nenner p^{h_1} aufgeht. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ von p, das nicht in $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht, geht sicher in $\Pi(\vartheta)$ in einer höheren Potenz als in p^{h_1} auf. Ein Primideal, das in $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht, und zur ersten Seite gehört, geht nach § 4 in $\Phi_1(x)$ in einer beliebig hohen Potenz, im Nenner aber nur in der bestimmten Potenz $\lambda_1 . h_1$ auf. Wenn zuletzt $\mathfrak{p}^{(i)}$ ein Primideal der i^{ten} Seite ist, geht es nach Satz 2 in $\Phi_1(\vartheta)$ genau in der Potenz $\lambda_i . h_1$ auf, und da der Nenner auch genau durch diese Potenz teilbar ist, wird N_1 ganz, aber nicht durch $\mathfrak{p}^{(i)}$ teilbar.

Die Zahl N_1 ist also ganz, und wenn $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von p ist, der entweder nicht in $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht, oder in $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht und zur ersten Seite gehört, so ist N_1 durch eine beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar. Wenn aber $\mathfrak{p}$ in $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht und zu einer der Seiten $S_2, S_3, \ldots S_k$ gehört, so ist N_1 nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

Diese Bemerkungen sollen nun in der folgenden Weise verallgemeinert werden:

Satz 3. Die Zahlen

$$N_0 = \Pi(\vartheta), \quad N_i = \Pi(\vartheta) \frac{\Phi_1(\vartheta) . \Phi_2(\vartheta) \ldots \Phi_i(\vartheta)}{p^{h_1+h_2+\cdots+h_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{24}$$

sind alle ganz, und wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal von p ist, das entweder nicht in $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht, oder in $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht und zu einer der Seiten $S_1, S_2, \ldots S_i$ gehört, so ist N_i durch eine beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar. Wenn aber $\mathfrak{p}$ in $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht und zu einer der Seiten $S_{i+1}, \ldots S_k$ gehört, so ist N_i nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

Man beweist den Satz am einfachsten durch vollständige Induktion. Es ist nämlich

$$N_i = N_{i-1} \cdot \frac{\Phi_i(\vartheta)}{p^{h_i}}$$

und diese Zahl muss nun ganz sein. Denn alle Primidealteiler von p, welche nicht zu den Seiten $S_i, S_{i+1}, \ldots S_k$ gehören, gehen nach unserer Voraussetzung in N_{i-1} in einer beliebig hohen Potenz auf. Ein Ideal der i^{ten} Seite geht in $\Phi_i(\vartheta)$ nach § 4 in einer beliebig hohen Potenz auf. Ein Primideal der s^{ten} Seite, $s>i$, geht aber nicht in N_{i-1}, und in $\Phi_i(\vartheta)$ nach Satz 2 genau in der Potenz $\lambda_s \,.\, h_i$ auf, und da auch p^{h_i} genau durch dieselbe Potenz $\lambda_s \,.\, h_i$ des Primideals teilbar ist, wird N_i ganz und durch keine Ideale der s^{ten} Seite teilbar, wenn $s>i$, w. z. b. w.

Wenn man nun weiter

$$\theta_i(\vartheta) = \frac{\varphi(\vartheta)^{\lambda_i}}{p^{\varkappa_i}}$$

setzt, so sind alle Zahlen

$$N_{i-1} \,.\, \theta_i(\vartheta)^\varepsilon = N_{i-1} \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^{\varepsilon \,.\, \lambda_i}}{p^{\varepsilon \,.\, \varkappa_i}} \qquad (\varepsilon = 1, 2, \ldots \varepsilon_i) \qquad (25)$$

ganz und durch kein Primideal der i^{ten} Seite teilbar. Denn zunächst ist für ein Primideal von p, das nicht zu einer der Seiten $S_i, S_{i+1}, \ldots S_k$ gehört, N_{i-1} sicher durch eine höhere Potenz des Primideals als $p^{\varepsilon \cdot \varkappa_i}$ teilbar. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ der i^{ten} Seite ist $\varphi(\vartheta)^{\varepsilon \cdot \lambda_i}$ durch $\mathfrak{p}$ in der Potenz $\varepsilon \,.\, \varkappa_i \,.\, \lambda_i$ teilbar, während $p^{\varepsilon \cdot \varkappa_i}$ genau dieselbe Potenz enthält. Für ein Primideal der Seite S_s, $s>i$ ist $\varphi(\vartheta)^{\varepsilon \cdot \lambda_i}$ durch $\mathfrak{p}$ in der Potenz $\varepsilon \,.\, \lambda_i \,.\, \varkappa_s$ genau teilbar, während $p^{\varepsilon \cdot \varkappa_i}$ durch $\mathfrak{p}$ in der Potenz $\varepsilon \,.\, \varkappa_i \,.\, \lambda_s$ teilbar ist. Da aber

$$\varepsilon \,.\, \varkappa_s \,.\, \lambda_i - \varepsilon \,.\, \varkappa_i \,.\, \lambda_s = \varepsilon \,.\, \lambda_i \,.\, \lambda_s \left(\frac{\varkappa_s}{\lambda_s} - \frac{\varkappa_i}{\lambda_i}\right) > 0$$

ist, geht $\mathfrak{p}$ im Zähler in einer höheren Potenz als im Nenner auf.

Es sollen nun alle ganzen Zahlen von der Form

$$N_{i-1} \,.\, F(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = N_{i-1}\left(A_1(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^\varepsilon + A_2(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon-1} + \cdots + A_\varepsilon(\vartheta)\right) \qquad (26)$$

untersucht werden, wo die Koeffizienten $A(\vartheta)$ Polynome in ϑ sind, welche (modd $p, \varphi(x)$) reduziert sein sollen, folglich höchstens vom Grade $m-1$ in ϑ sind; weiter soll $\varepsilon < \varepsilon_i$ vorausgesetzt werden.

Ich werde nun bestimmen, unter welcher Bedingung eine Zahl von der Form (26) durch alle Primideale der i^{ten} Seite teilbar sein kann. Nach A, Satz 17 folgt, dass jedenfalls die Zahl

$$N_{i-1} \cdot \frac{f_i(\vartheta)}{p^{h_i}} = N_{i-1} f_i(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = N_{i-1} \left(\theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_i} + S_1^{(i)}(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_i - 1} + \cdots + S_{\varepsilon_i}^{(i)}(\vartheta)\right)$$

durch alle Primideale der i^{ten} Seite teilbar ist.

Wenn man nun, um die Teilbarkeit einer Zahl (26) durch Primideale der i^{ten} Seite zu untersuchen, die Methode anwendet, welche ich in A. Kap. 4 § 2 angegeben habe, so ergibt sich ohne Schwierigkeiten das folgende Kriterium:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Zahl $N_{i-1} \,.\, F(\vartheta, \theta_i(\vartheta))$ durch alle Primideale der i^{ten} Seite teilbar ist, wird dadurch ausgedrückt, dass $F(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) durch $f_i(x, y)$ teilbar sein soll.

Da nun in (26) der Exponent ε kleiner als ε_i vorausgesetzt ist, so folgt, dass $F(x, y)$ in diesem Falle nur dann durch $f_i(x, y)$ (modd $p, \varphi(x)$) teilbar sein kann, wenn

$$A_1(x) \equiv A_2(x) \equiv \cdots \equiv A_\varepsilon(x) \equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)}$$

ist, und da $A_i(x)$ (modd $p, \varphi(x)$) reduziert sein sollte, so müssen in diesen Polynomen alle Koeffizienten durch p teilbar sein.

Bezeichnet man nun mit P_i das Produkt

$$P_i = \mathfrak{p}_1^{(i)} \,.\, \mathfrak{p}_2^{(i)} \ldots \mathfrak{p}_{t_i}^{(i)} \tag{27}$$

der Primideale der i^{ten} Seite, so ist

$$N\, P_i = p^{\sum\limits_{j=1}^{t_i} \varepsilon_j^{(i)} \,.\, m} = p^{\varepsilon_i \,.\, m}.$$

Die Zahlen

$$N_{i-1}(A_1(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_i - 1} + A_2(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_i - 2} + \cdots + A_{\varepsilon_i}(\vartheta))$$

mit (modd $p, \varphi(x)$) reduzierten Koeffizienten $A(x)$ sind daher alle (mod P_i) inkongruent, und da ihre Anzahl, wie man leicht sieht, gleich $p^{\varepsilon_i \cdot m}$ ist, so bilden sie ein vollständiges Restsystem (mod P_i). Daher ist bewiesen:

Satz 4. Wenn P_i das Produkt der Primideale der i^{ten} Seite bedeutet, so bilden die $p^{\varepsilon_i \cdot m}$ Zahlen

$$N_{i-1}\,\theta_i(\vartheta)^t\,.\,\vartheta^r \qquad (t=0,\,1,\,\ldots\,\varepsilon_i-1,\; r=0,\,1,\,\ldots\,m-1) \qquad (28)$$

ein Fundamentalsystem für P_i.

Man kann auch sehr einfach ein Fundamentalsystem für das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ aufstellen. Die Zahl

$$N_{i-1}\cdot\frac{f_j^{(i)}(\vartheta)}{p^{\varepsilon_j^{(i)}\cdot\varkappa_i}} = N_{i-1}\cdot f_j^{(i)}(\vartheta,\,\theta_i(\vartheta))$$

$$= N_{i-1}\left(\theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)}} + S_{j,1}^{(i)}(\vartheta)\,.\,\theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)}-1} + \cdots + S_{j,\varepsilon_j^{(i)}}^{(i)}(\vartheta)\right)$$

ist nämlich ganz und sicher durch ein Primideal der i^{ten} Seite teilbar. Denn wäre dies nicht der Fall, würde schon die Zahl

$$N_{i-1}\cdot f_1^{(i)}(\vartheta,\,\theta_i(\vartheta))\ldots f_{j-1}^{(i)}(\vartheta,\,\theta_i(\vartheta))\,.\,f_{j+1}^{(i)}(\vartheta,\,\theta_i(\vartheta))\ldots f_{t_i}^{(i)}(\vartheta,\,\theta_i(\vartheta))$$

durch alle Primideale der i^{ten} Seite teilbar, was nach dem oben angegebenen Kriterium nicht möglich ist. Daher ist jede Zahl

$$N_{i-1}\cdot\frac{f_j^{(i)}(\vartheta)}{p^{\varepsilon_j^{(i)}\cdot\varkappa_i}} \qquad (j=1\,.\,2,\,\ldots\,t_i)$$

durch ein Primideal der i^{ten} Seite teilbar, und wie man aus A. Kap. 4 sieht, kann man die Numerierung so wählen, dass diese Zahl allgemein durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar ist.

Man kann nun einfach angeben, wann eine Zahl von der Form (26) durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar ist, denn man zeigt:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Zahl (26) durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar ist, wird dadurch ausgedrückt, dass $F(x,\,y)$ (modd $p,\,\varphi(x)$) durch $f_j^{(i)}(x,\,y)$ teilbar ist.

Es ist einleuchtend, dass diese Bedingung eine hinreichende ist. Dass sie aber auch notwendig ist, folgt daraus, dass, wenn $F(x,\,y)$ nicht durch $f_j^{(i)}(x,\,y)$ (modd $p,\,\varphi(x)$) teilbar ist, man solche Polynome $A(x,\,y)$ und $B(x,\,y)$ bestimmen kann, dass

$$F(x,\,y)\,.\,A(x,\,y)+f_j^{(i)}(x,\,y)\,.\,B(x,\,y)\equiv 1 \pmod{p,\,\varphi(x)}.$$

Wenn diese Kongruenz mit $N_{i-1}(x)^2$ multipliziert und $x=\vartheta$, $y=\theta_i(\vartheta)$ gesetzt wird, so folgt, dass ein gemeinsamer Primidealteiler der i^{ten} Seite für $N_{i-1}\,F(\vartheta,\,\theta_i(\vartheta))$

und $N_{i-1} f_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta))$ auch in N_{i-1} aufgehen muss, was jedoch nach Satz 3 unmöglich ist.

Daher sind die ganzen Zahlen

$$N_{i-1}\left(A_1(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)}-1} + A_2(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)}-2} + \cdots + A_{\varepsilon_j^{(i)}}(\vartheta)\right),$$

wo alle Koeffizienten (modd p, $\varphi(x)$) reduziert sind, sicher (mod $\mathfrak{p}_j^{(i)}$) inkongruent, und da ihre Anzahl eben $p^{\varepsilon_j^{(i)} . m} = N(\mathfrak{p}_j^{(i)})$ ist, bilden sie ein vollständiges Restsystem (mod $\mathfrak{p}_j^{(i)}$). Es ist folglich bewiesen:

Satz 5. Die $p^{\varepsilon_j^{(i)} . m}$ Zahlen

$$N_{i-1} \,.\, \theta_i(\vartheta)^t \,.\, \vartheta^r \qquad (t=0, 1, \ldots \varepsilon_j^{(i)}-1,\; r=0, 1, \ldots, m-1)$$

bilden ein Fundamentalsystem für das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$.

Man kann hier noch eine andere Bemerkung machen, welche von Interesse sein mag. Da nämlich eine Zahl

$$N_{i-1} \,.\, f_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta)) = N_{i-1} \,.\, \frac{f_j^{(i)}(\vartheta)}{p^{\varepsilon_j^{(i)} . \varkappa_i}}$$

nicht durch $\mathfrak{p}_{j_1}^{(i)}$ teilbar ist, wenn $j_1 \neq j$, so wird die Zahl $f_j^{(i)}(\vartheta)$ genau durch

$$\mathfrak{p}_j^{(i)\,\varepsilon_j^{(i)} . \varkappa_i . \lambda_i}$$

teilbar, und da

$$\Phi_j^{(i)}(x) \equiv f_j^{(i)}(x) \pmod{S_i}$$

und alle Glieder oberhalb des Polygones durch höhere Potenzen von $\mathfrak{p}_{j_1}^{(i)}$ als diejenigen Glieder, welche auf dem Polygone liegen, teilbar sind, so wird auch $\Phi_j^{(i)}(\vartheta)$ genau durch $\mathfrak{p}_{j_1}^{(i)}$ in der Potenz $\varepsilon_j^{(i)} . \varkappa_i . \lambda_i$ teilbar.

Da aber nach § 4 die Zahl $\Phi_i(\vartheta)$ alle Primideale der i^{ten} Seite in beliebig hohen Potenzen enthalten muss, und da wegen Satz 1

$$\Phi_i(\vartheta) \equiv \Phi_1^{(i)}(\vartheta) \,.\, \Phi_2^{(i)}(\vartheta) \ldots \Phi_{t_i}^{(i)}(\vartheta) \pmod{p^M}$$

ist, so folgt, dass, wenn ein Ideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ gegeben ist, dieses Ideal nur in der Zahl $\Phi_j^{(i)}(\vartheta)$ in einer beliebig hohen Potenz vorkommen kann, weil alle andere Faktoren $\Phi_{j_1}(\vartheta)$ nur fest bestimmte Potenzen dieses Ideals enthalten können.

Daraus folgt der Satz:

Satz 5. Wenn $f(x)$ regulär in Bezug auf p ist, und für den beliebig grossen Primzahlpotenzmodul p^M die Zerlegung des Satzes 1 besitzt, so gibt es einen und nur einen Primidealteiler $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ von p derart, dass $\Phi_j^{(i)}(\vartheta)$ durch eine beliebig hohe (von M abhängige) Potenz des Primideals teilbar wird. Alle andere Primidealteiler von p kommen in $\Phi_j^{(i)}(\vartheta)$ nur in fest bestimmten Potenzen vor.

§ 6.

Bestimmung eines Fundamentalsystems für die Primzahl p.

Nachdem in § 5 ein Fundamentalsystem für alle Primidealteiler von p bestimmt worden ist, leitet man ziemlich einfach daraus ein Fundamentalsystem für p selbst ab.

Durch Satz 4 ist ein Fundamentalsystem für das Produkt P_i der Primideale der i^{ten} Seite bestimmt worden. Da aber nach (11) p durch P_i in der Potenz λ_i teilbar ist, werde ich zunächst ein Fundamentalsystem für $P_i^{\lambda_i}$ bestimmen. Dies geschieht aber nach § 1 in der Weise, dass man eine Reihe von Zahlen

$$K_1, K_2, \ldots K_{\lambda_i - 1}$$

so bestimmt, dass, wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal der i^{ten} Seite ist, K_j durch $\mathfrak{p}$ genau in der Potenz j teilbar wird.

In der Darstellung (22) von $\Phi_i(x)$ kommen allgemein die Glieder

$$A_r^{(i)}(x) \, . \, p^{\left[\frac{(l_i - r)\varkappa_i}{\lambda_i}\right]} . \, \varphi(x)^r \quad (r = 0, 1, \ldots l_j)$$

vor, und ich untersuche nun, in welcher Potenz die Zahl

$$B_r = p^{\left[\frac{(l_i - r)\varkappa_i}{\lambda_i}\right]} . \, \varphi(\vartheta)^r$$

das Primideal $\mathfrak{p}$ der i^{ten} Seite enthält. Man sieht ein, da $\varphi(\vartheta)$ durch $\mathfrak{p}$ in der

Potenz $\varkappa_i$ und p durch $\mathfrak{p}$ in der Potenz λ_i genau teilbar ist, dass B_r das Primideal $\mathfrak{p}$ genau in der Potenz

$$\lambda_i \left\lceil \frac{(l_i - r)\,\varkappa_i}{\lambda_i} \right\rceil + r \,.\, \varkappa_i \tag{29}$$

enthalten muss. Es wird nun $0 < r < \lambda_i$ vorausgesetzt, und die Zahl ϱ eindeutig durch die Kongruenz

$$r \,.\, \varkappa_i \equiv \varrho \pmod{\lambda_i}$$

bestimmt, wenn man $0 < \varrho < \lambda_i$ annimmt. Dann ist[1]

$$\frac{(l_i - r)\,\varkappa_i}{\lambda_i} = \left[\frac{(l_i - r)\,\varkappa_i}{\lambda_i}\right] + \frac{\lambda_i - \varrho}{\lambda_i},$$

und da man für jede reelle, nicht ganze rationale Zahl i die Beziehung $\lceil i \rceil = [i] + 1$ hat, so ist, wie man leicht sieht,

$$\left\lceil \frac{(l_i - r)\,\varkappa_i}{\lambda_i} \right\rceil = \frac{(l_i - r)\,\varkappa_i}{\lambda_i} + \frac{\varrho}{\lambda_i}. \tag{30}$$

Folglich geht (29) in

$$\lambda_i \left(\frac{(l_i - r)\,\varkappa_i}{\lambda_i} + \frac{\varrho}{\lambda_i}\right) + r \,.\, \varkappa_i = h_i \,.\, \lambda_i + \varrho$$

über und die Zahl B_i ist daher durch $\mathfrak{p}$ in genau der Potenz $(h_i \,.\, \lambda_i + \varrho)$ teilbar.

Man zeigt nun leicht, dass die Zahl

$$N_{i-1} \cdot \frac{B_r}{p^{h_i}} = N_{i-1} \frac{\varphi(\vartheta)^r}{p^{h_i - \left\lceil \frac{(l_i - r)\,\varkappa_i}{\lambda_i} \right\rceil}} = N_{i-1} \,.\, T_r^{(i)} = N_{i-1} \,.\, S_\varrho^{(i)}$$

ganz und durch ein Primideal der i^{ten} Seite genau in der Potenz ϱ teilbar ist. Dabei ist

$$\frac{B_r}{p^{h_i}} = \frac{\varphi(\vartheta)^r}{p^{h_i - \left\lceil \frac{(l_i - r)\,\varkappa_i}{\lambda_i} \right\rceil}} = T_r^{(i)} = S_\varrho^{(i)}$$

gesetzt worden, und da man bemerkt, dass

[1] $[i]$ bezeichnet die grösste ganze rationale Zahl, welche in i enthalten ist.

$$h_i - \left\lfloor \frac{(l_i - r)\varkappa_i}{\lambda_i} \right\rfloor = \left[h_i - \frac{(l_i - r)\varkappa_i}{\lambda_i}\right] = \left[\frac{r\varkappa_i}{\lambda_i}\right]$$

ist, so wird also

$$N_{i-1} \cdot \frac{B_r}{p^{h_i}} = N_{i-1} \,.\, T_r^{(i)} = N_{i-1}\, S_\varrho^{(i)} = N_{i-1} \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^r}{p^{\left[\frac{r\varkappa_i}{\lambda_i}\right]}}. \tag{31}$$

Um nun nachzuweisen, dass die Zahl (31) ganz ist, zeigt man, dass ein jeder Primidealdivisor von p^{h_i} im Zähler $N_{i-1} \,.\, B_r$ in einer höheren Potenz aufgeht. Ein Primideal, das nicht zu den Seiten $S_i, S_{i+1}, \ldots S_k$ gehört, geht nach Satz 3 sicher in N_{i-1} in einer höheren Potenz als in p^{h_i} auf. Ein Primideal der i^{ten} Seite geht in B_r in der Potenz $h_i\,\lambda_i + \varrho$, in p^{h_i} in der Potenz $h_i \,.\, \lambda_i$ auf, folglich ist die Differenz der Exponenten gleich ϱ. Wenn zuletzt $\mathfrak{p}$ ein Primideal der s^{ten} Seite ist, so wird in dem letzten Ausdrucke (31) $\varphi(\vartheta)^r$ durch $\mathfrak{p}^{r \cdot \varkappa_s}$, der Nenner aber durch $\mathfrak{p}$ in der Potenz $\lambda_s \,.\, \left[\frac{r\varkappa_i}{\lambda_i}\right]$ teilbar, und die Differenz dieser Exponenten ist

$$r\varkappa_s - \lambda_s \,.\, \left[\frac{r\varkappa_i}{\lambda_i}\right] > r\varkappa_s - \lambda_s \cdot \frac{r\varkappa_i}{\lambda_i} - r\lambda_s\left(\frac{\varkappa_s}{\lambda_s} - \frac{\varkappa_i}{\lambda_i}\right) > 0,$$

wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Bestimmt man nun die Zahlen r_ϱ so, dass

$$r_\varrho \,.\, \varkappa_i \equiv \varrho \pmod{\lambda_i} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots \lambda_i - 1) \tag{32}$$

so bilden folglich die Zahlen

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &= N_{i-1} \,.\, T_{r_1}^{(i)} = N_{i-1} \,.\, S_1^{(i)} \\ K_2^{(i)} &= N_{i-1} \,.\, T_{r_2}^{(i)} = N_{i-1} \,.\, S_2^{(i)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_{\lambda_i - 1}^{(i)} &= N_{i-1} \,.\, T_{r_{\lambda_i - 1}}^{(i)} = N_{i-1} \,.\, S_{\lambda_i - 1}^{(i)} \end{aligned}$$

eine Reihe von Zahlen mit den gewünschten Eigenschaften, d. h. K_ϱ ist genau durch $\mathfrak{p}^\varrho$ teilbar, wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal der i^{ten} Seite ist. Setzt man nun speziell $K_0 = 1$, so folgt nach Satz 4 wie in § 1, dass die $m \,.\, \varepsilon_i \,.\, \lambda_i = m \,.\, l_i$ Zahlen

$$N_{i-1} \,.\, K_\varrho^{(i)} \,.\, \theta_i(\vartheta)^t \,.\, \vartheta^s \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots \lambda_i - 1,\ t = 0, 1, \ldots \varepsilon_i - 1,\ s = 0, 1 \ldots m - 1)$$

ein Fundamentalsystem für $P_i^{\lambda_i}$ bilden.

Man sieht aber ein, dass, wenn in (§ 2) ϱ ein vollständiges Restsystem $(\mathrm{mod}\ \lambda_i)$ durchläuft, dies auch mit den Zahlen r_ϱ der Fall ist. Da nun weiter die Ordnung der Zahlen eines Fundamentalsystems gleichgültig ist, so bilden folglich die Zahlen

$$N_{i-1} \,.\, T_r^{(i)} \,.\, \theta_i(\vartheta)^t \,.\, \vartheta^s \qquad (r=0, 1, \dots \lambda_i - 1,\ t=0, 1, \dots \varepsilon_i - 1,\ s=0, 1 \dots m-1) \tag{33}$$

dasselbe Fundamentalsystem für $P_i^{\lambda_i}$.

Wegen der späteren Anwendungen schreibe ich dieses System in der folgenden, symbolischen Weise vollständiger auf:

$$N_{i-1} \left\{ \left| \begin{array}{ll} & 1, \vartheta, \dots \vartheta^{m-1}, \theta_i, \theta_i \,.\, \vartheta, \dots \theta_i \vartheta^{m-1}, \dots, \theta_i^{\varepsilon_i - 1}, \theta_i^{\varepsilon_i - 1} \,.\, \vartheta, \dots \theta_i^{\varepsilon_i - 1} \,.\, \vartheta^{m-1} \\ T_1^{(i)} & (\text{————————————} \ » \ \text{————————————}) \\ T_2^{(i)} & (\text{————————————} \ » \ \text{————————————}) \\ \text{— —} & \text{— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —} \\ T_{\lambda_i - 1}^{(i)} & (\text{————————————} \ » \ \text{————————————}) \end{array} \right| \right\} \tag{34}$$

In den Parenthesen sollen dann dieselben Zahlen wie in der ersten Zeile stehen, und dann alle diese Zahlen mit $T_r^{(i)}$ $(r = 1, 2 \dots \lambda_i - 1)$ multipliziert werden. Die grosse Klammer links bedeutet dabei, dass alle so entstehende Zahlen mit N_{i-1} multipliziert werden sollen.

Man kann nun den wichtigen Satz beweisen:

Wenn man für alle Seiten S_i des Polygones $(p, \varphi(x))$ und zwar für alle Primfunktionteiler $\varphi(x)$ von $f(x)\,(\mathrm{mod}\ p)$ die Fundamentalsysteme (34) der Ideale $P_i^{\lambda_i}$ bestimmt, so bildet die Gesamtheit dieser Systeme ein Fundamentalsystem für die Primzahl p.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist nachgewiesen, wenn man zeigt, dass eine lineare Summe dieser Zahlen mit ganzen, rationalen Koeffizienten nicht durch p teilbar sein kann, ausser wenn alle Koeffizienten durch p teilbar sind. Wenn nun $\mathfrak{a} = (p, \varphi(\vartheta)^e)$ einer der Idealdivisoren (5) von p ist, so muss also unsere lineare Summe durch $\mathfrak{a}$ teilbar sein. Wenn man aber die entsprechenden Systeme (34) für andere Primfunktionen als $\varphi(x)$ bildet, so sind nach Satz 3 alle entsprechenden Zahlen N_i sicher durch $\mathfrak{a}$ teilbar, und man braucht daher nur zu untersuchen, wann eine lineare Verbindung der Zahlen (34) $(i = 1, 2, \dots k)$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar sein kann. Da $\mathfrak{a}$ nach (11) durch alle Ideale $P_i^{\lambda_i}$ teilbar sein muss, untersucht man erstens, wann diese lineare Summe durch $P_1^{\lambda_1}$ teilbar ist. Nach

Satz 3 sind aber die Zahlen $N_1, N_2, \ldots N_{k-1}$ alle durch eine beliebig hohe Potenz eines jeden Primideals der ersten Seite teilbar, also sicher auch durch $P_1^{\lambda_1}$ teilbar, so dass man also nur zu untersuchen hat, wann eine lineare Verbindung der Zahlen (34) für $i = 1$ durch $P_1^{\lambda_1}$ teilbar ist. Da aber die Zahlen (34) für $i = 1$ ein Fundamentalsystem für das Ideal $P_1^{\lambda_1}$ bilden, so kann eine lineare Summe dieser Zahlen mit ganz rationalen Koeffizienten nur dann durch $P_1^{\lambda_1}$ teilbar werden, wenn alle Koeffizienten durch p teilbar sind.

Weiter untersucht man nun, wann diese lineare Summe, die wir hier betrachtet haben, durch $P_2^{\lambda_2}$ teilbar ist. Da alle Zahlen $N_2, N_3, \ldots N_{k-1}$ eine beliebig hohe Potenz von $P_2^{\lambda_2}$ enthalten, und da weiter in dem Teile der Summe, welcher den Gliedern (34) für $i = 1$ entspricht, wie eben bewiesen worden ist, alle Koeffizienten durch p teilbar sind, so braucht man um die Teilbarkeit durch $P_2^{\lambda_2}$ zu untersuchen, nur das System von Addenden in der Summe zu untersuchen, welches aus den Gliedern (34) für $i = 2$ entspringt. Da aber dieses System ein Fundamentalsystem für $P_2^{\lambda_2}$ bildet, so kann eine lineare Summe aus diesen Gliedern nicht durch $P_2^{\lambda_2}$ teilbar sein, ausser wenn alle Koeffizienten durch p teilbar sind usw. In derselben Weise beweist man dann, dass alle anderen Koeffizienten durch p teilbar sein müssen, d. h. dass die Zahlen (34), für alle Seiten und für alle Primfunktionen gebildet, zusammen ein Fundamentalsystem für p sind. W. z. b. w.

Das System (34) stimmt nun mit den Zahlen (33) vollständig überein, und da in (33)

$$T_r^{(i)} \cdot \theta_i(\vartheta)^t = \frac{\varphi(\vartheta)^r}{p^{\left[\frac{r\,\varkappa_i}{\lambda_i}\right]}} \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^{t\cdot\lambda_i}}{p^{t\cdot\varkappa_i}} = \frac{\varphi(\vartheta)^{r+t\,\lambda_i}}{p^{\left[\frac{(r+t\,\lambda_i)\cdot\varkappa_i}{\lambda_i}\right]}} = T_{r+t\,\lambda_i}^{(i)}$$

ist, so stimmen die Zahlen (33) mit den Zahlen

$$N_{i-1} \cdot T_r^{(i)} \cdot \vartheta^s \qquad r = 0, 1, \ldots l_i - 1, (s = 0, 1, \ldots m-1)$$

vollständig überein. Daher ist bewiesen:

Satz 6. Wenn man für alle Seiten S_i des Polygones $(p, \varphi(x))$ und zwar für alle Primfunktionteiler $\varphi(x)$ von $f(x) \pmod p$ die Zahlen

$$N_{i-1} \cdot T_r^{(i)} \cdot \vartheta^s = N_{i-1} \frac{\varphi(\vartheta)^r}{p^{\left[\frac{r\,\varkappa_i}{\lambda_i}\right]}} \cdot \vartheta^s \qquad (r = 0, 1, 2 \ldots l_i - 1, s = 0, 1 \ldots m-1) \tag{35}$$

bestimmt, so bildet die Gesamtheit dieser Systeme ein Fundamentalsystem für die Primzahl p.

Dieser Satz gestattet also immer, wenn eine reguläre Gleichung vorliegt, ein Fundamentalsystem für die Primzahl p zu bestimmen.

§ 7.

Bestimmung des Primideals $\mathfrak{p}_j^{(i)}$.

Ich werde an dieser Stelle eine Darstellung des Primideals $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ geben, welche man leicht aus den vorgehenden Untersuchungen ableitet. In § 5 ist gezeigt worden, dass die Zahl

$$M_i = N_{i-1} \,.\, \theta_i(\vartheta) = N_{i-1} \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^{\lambda_i}}{p^{\varkappa_i}}$$

ganz ist und durch alle Primidealteiler von p teilbar, ausser solchen, welche zur i^{ten} Seite gehören. Weiter ist auch die Zahl

$$N_{i-1} \cdot \frac{f_j^{(i)}(\vartheta)}{p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot \varkappa_i}} = N_{i-1}\left(\theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)}} + S_{1,j}^{\varepsilon_j^{(i)}-1}(\vartheta) \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)}-1} + \cdots + S^{(i)}_{\varepsilon_j^{(i)},\, j}(\vartheta)\right)$$

ganz und durch das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$, aber durch keine anderen Primideale der i^{ten} Seite teilbar. Weiter sieht man auch ein, dass diese Zahl nicht durch ein Primideal $\mathfrak{p}^{(s)}$ der s^{ten} Seite teilbar sein kann, wenn $s > i$ ist, denn alle Zahlen

$$N_{i-1} \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)}},\; N_{i-1} \,.\, \theta_i(\vartheta)^{\varepsilon_j^{(i)}-1}, \ldots N_{i-1} \,.\, \theta_i(\vartheta)$$

sind nach § 5 durch $\mathfrak{p}^{(s)}$ teilbar, die Zahl $N_{i-1} \,.\, S^{(i)}_{\varepsilon_j^{(i)},\, j}(\vartheta)$ ist aber sicher nicht durch $\mathfrak{p}^{(s)}$ teilbar. Nach diesen Bemerkungen sieht man leicht ein, dass das Ideal

$$\mathfrak{b} = [p, \varphi(\vartheta), M_1, M_2, \ldots M_{i-1}, N_{i-1} \,.\, f_j^{(i)}(\vartheta, \theta_i(\vartheta))]$$

eine Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ ist. Denn $\mathfrak{b}$ kann zunächst nur durch Idealteiler von $(p, \varphi(\vartheta))$ teilbar sein, und wenn $\mathfrak{p}^{(s)}$ ein Primideal der s^{ten} Seite ist, $s < i$, so geht $\mathfrak{p}^{(s)}$ nicht in M_s auf, und wenn $s > i$ ist, geht $\mathfrak{p}^{(s)}$ nicht in $N_{i-1}\, S^{(i)}_{\varepsilon_j^{(i)},\, j}(\vartheta)$ auf. Das Ideal $\mathfrak{b}$ kann folglich nur durch Primideale der i^{ten} Seite teilbar sein, und da ausserdem das letzte Glied nur durch das Ideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ der i^{ten} Seite teilbar ist, muss $\mathfrak{b}$ eine Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ sein.

Um daher eine Darstellung für $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ zu gewinnen, braucht man nur eine ganze Zahl des Körpers zu bestimmen, welche nur durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar ist.

Dies leistet aber nach § 6 die Zahl

$$N_{i-1} \,.\, T_r^{(i)} = N_{i-1} \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^r}{p^{\left[\frac{r\varkappa_i}{\lambda_i}\right]}},$$

wenn $0 < r < \lambda_i$ so gewählt wird, dass $r\varkappa_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$ ist.

Man hat daher den Satz:

Satz 7. Das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ ist durch

$$\mathfrak{p}_j^{(i)} = [p, \varphi(\vartheta), M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}, . N_{i-1} \,.\, T_r^{(i)}, N_{i-1} \,.\, f_j^{(i)}(\vartheta, \theta, (\vartheta))]$$

bestimmt, wo

$$T_r^{(i)} = \frac{\varphi(\vartheta)^r}{p^{\left[\frac{r\varkappa_i}{\lambda_i}\right]}}$$

ist und $r < \lambda_i$ der Kongruenz $r\varkappa_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$ genügen soll.

Bei allen diesen Untersuchungen spielt der Exponent M, welcher durch die Kongruenzzerlegung des Satzes 1 von $f(x)$ eingeführt worden ist, eine wichtige Rolle. Man sieht aber leicht ein, dass es überall hinreichend ist, wenn man M grösser als alle Zahlen $h_1 + h_2 + \cdots + h_k$ wählt, welche durch die verschiedenen Polygone $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ definiert sind, also

$$M > \operatorname{Max}(h_1 + h_2 + \cdots + h_k).$$

Kap. 2. Bestimmung der Körperdiskriminante.

§ 1.

Hilfssätze über Diskriminanten.

Es sollen hier ein Paar Hilfssätze über Diskriminanten bewiesen werden, welche für die folgenden Untersuchungen notwendig sind.

Es sei wie in Kap. 1

$$f(x) \equiv F_1(x) \,.\, F_2(x) \ldots F_s(x) \pmod{p^M},$$

wo

$$F_i(x) \equiv \varphi_i(x)^{e_i} \pmod{p},$$

und man setzt zur Abkürzung

$$\Pi_i(x) = F_1(x) \ldots F_{i-1}(x) \,.\, F_{i+1}(x) \ldots F_s(x), \tag{36}$$

wo also

$$\Pi_i(x) = c_0^{(i)} + c_1^{(i)} \,.\, x + \cdots + c_{t_i-1}^{(i)} x^{t_i-1} + x^{t_i}$$

und

$$t_i = m_1 \,.\, e_1 + m_2 \,.\, e_2 + \cdots + m_{i-1} \,.\, e_{i-1} + m_{i+1} \,.\, e_{i+1} + \cdots + m_s \,.\, e_s$$

ist. Der Kürze wegen soll auch

$$k_i = m_i \,.\, e_i = n - t_i$$

gesetzt werden.

Weiter soll im Folgenden immer die Gleichungsdiskriminante der regulären Gleichung $f(x) = 0$ mit D bezeichnet werden.

Ich beweise dann:

Die beiden Diskriminanten

$$D = \Delta(1, \vartheta, \ldots \vartheta^{n-1})$$

und

$$D' = \Delta(\cdots \Pi_i(\vartheta), \Pi_i(\vartheta) \,.\, \vartheta, \ldots \Pi_i(\vartheta) \,.\, \vartheta^{k_i-1}, \ldots)$$

sind durch dieselbe Potenz der Primzahl p teilbar.

Die Diskriminante D' ist also die Diskriminante zu den n Zahlen

$$\Pi_i(\vartheta) \,.\, \vartheta^t \qquad (i = 1, 2 \ldots s, t = 0, 1, \ldots k_i - 1).$$

Nach einem bekannten Satze über Diskriminanten ist nun

$$D' = K^2 \,.\, D, \tag{37}$$

wo K die Determinante

$$K = \begin{vmatrix} c_0^{(1)}, & c_1^{(1)}, & \ldots & c_{t_1}^{(1)}, & & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & c_0^{(1)}, & \ldots & c_{t_1-1}^{(1)}, & c_{t_1}^{(1)}, & & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots & & & & & c_t^{(1)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_0^{(i)}, & c_1^{(i)}, & \ldots & c_{t_i}^{(i)}, & & 0 & \ldots & 0 \\ 0, & c_0^{(i)}, & \ldots & c_{t_i-1}^{(i)}, & c_{t_i}^{(i)}, & & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots & & & & & c_{t_i}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

bezeichnet, worin der Übersicht wegen überall $c_{l_i}^{(i)}$ an die Stelle des Koeffizienten 1 des höchsten Gliedes in $\Pi_i(x)$ gesetzt worden ist.

Um den Hilfssatz zu beweisen, braucht man daher nur zu zeigen, dass die Determinante K nicht durch p teilbar ist. Wenn aber nun K durch p teilbar wäre, so könnte man die n Zahlen

$$b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, \dots b_{k_i-1}^{(i)} \qquad (i = 1, 2 \dots s)$$

so bestimmen, dass sie nicht alle durch p teilbar sind und den Kongruenzen

$$\left.\begin{array}{lll} b_0^{(1)}.\, c_0^{(1)} + \cdots & + b_0^{(i)}.\, c_0^{(i)} + \cdots & \equiv 0 \\ b_0^{(1)}.\, c_1^{(1)} + b_1^{(1)}.\, c_0^{(1)} + \cdots & + b_0^{(i)}.\, c_1^{(i)} + b_1^{(i)}.\, c_0^{(i)} + \cdots & \equiv 0 \\ b_0^{(1)}.\, c_2^{(1)} + b_1^{(1)}.\, c_1^{(1)} + b_2^{(1)}.\, c_0^{(1)} + \cdots & + b_0^{(i)}.\, c_2^{(i)} + b_1^{(i)}.\, c_1^{(i)} + b_2^{(i)}.\, c_0^{(i)} + \cdots & \equiv 0 \\ \dots & \dots & \end{array}\right\} (\mathrm{mod}\ p)$$

genügen, indem nämlich die Determinante dieses Systems von linearen Kongruenzen gleich K ist. Multipliziert man aber die erste dieser Kongruenzen mit 1, die zweite mit x, die dritte mit x^2 usw., und summiert, so folgt auch die Kongruenz

$$\begin{aligned} & b_0^{(1)}.\, \Pi_1(x) + b_1^{(1)}.\, x.\, \Pi_1(x) + \cdots + b_{k_1-1}^{(1)}.\, x^{k_1-1}.\, \Pi_1(x) \\ + & \dots \\ + & b_0^{(i)}.\, \Pi_i(x) + b_1^{(i)}.\, x.\, \Pi_i(x) + \cdots + b_{k_i-1}^{(i)}.\, x^{k_i-1}.\, \Pi_i(x) \\ + & \dots \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Wird nun hier

$$b_i(x) = b_0^{(i)} + b_1^{(i)}.\, x + \cdots + b_{k_i-1}^{(i)}.\, x^{k_i-1} \qquad (i = 1, 2 \dots s)$$

gesetzt, so folgt also

$$b_1(x).\, \Pi_1(x) + b_2(x).\, \Pi_2(x) + \cdots + b_s(x).\, \Pi_s(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

wo die Polynome $b_i(x)$ nicht alle $(\mathrm{mod}\ p)$ verschwinden können. Das Bestehen einer solchen Kongruenz ist aber nicht möglich. Denn wenn z. B. $b_i(x)$ nicht $(\mathrm{mod}\ p)$ verschwindet, so folgt, da alle Polynome $\Pi_1(x), \dots \Pi_{i-1}(x); \Pi_{i+1}(x) \dots \Pi_s(x) \pmod{p}$ durch $\varphi_i(x)^{e_i}$ teilbar sind, dass auch das Polynom $b_i(x).\, \Pi_i(x) \pmod{p}$ durch $\varphi_i(x)^{e_i}$ teilbar sein muss. Da nun $\Pi_i(x)$ nicht durch $\varphi_i(x) \pmod{p}$ teilbar ist, so folgt, dass $b_i(x) \pmod{p}$ durch $\varphi_i(x)^{e_i}$ teilbar sein muss, was jedoch nicht möglich ist, da der Grad von $\varphi_i(x)^{e_i}$ grösser als der Grad von $b_i(x)$ ist. Daher kann also K nicht durch p teilbar sein.

Es soll nun weiter ein anderer einfacher Hilfssatz bewiesen werden:
Wenn

$$f_0(x) = 1$$
$$f_1(x) = x + a_1^{(1)}$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$f_{k_i-1}(x) = x^{k_i-1} + \cdots + a_{k_i-1}^{(k_i-1)}$$

ist, und wenn die Diskriminante der n Zahlen

$$\Pi_i(\vartheta)\,.\,f_t(\vartheta) \qquad (i = 1, 2 \ldots s, t = 0, 1, \ldots k_i - 1)$$

mit

$$D'' = \varDelta(\ldots, \Pi_i(\vartheta) f_0(\vartheta), \Pi_i(\vartheta)\,.\,f_1(\vartheta), \ldots \Pi_i(\vartheta)\,.\,f_{k_i-1}(\vartheta), \ldots)$$

bezeichnet wird, so ist

$$D' = D''. \tag{38}$$

Dies sieht man einfach ein, wenn man beachtet, dass man wegen der Determinantenform der Diskriminante in einer Diskriminante $\varDelta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ von einem Elemente α_r ein beliebiges Multiplum $k\,.\,\alpha_s$ eines anderen Elements subtrahieren darf, ohne den Wert der Diskriminante zu ändern.

Multipliziert man daher $\Pi_i(\vartheta)\,.\,f_0(\vartheta) = \Pi_i(\vartheta)$ mit $a_1^{(1)}$ und zieht diese Zahl von $\Pi_i(\vartheta)\,.\,f_1(\vartheta)$ ab, so erhält man die Zahl $\Pi_i(\vartheta)\,.\,\vartheta$. Multipliziert man weiter $\Pi_i(\vartheta)$ mit $a_2^{(2)}$ und $\Pi_i(\vartheta)\,.\,\vartheta$ mit $a_1^{(2)}$ und zieht diese Glieder von $\Pi_i(\vartheta)\,.\,f_2(\vartheta)$ ab, so ergibt sich $\Pi_i(\vartheta)\,.\,\vartheta^2$ usw. Man hat folglich

$$D'' = \varDelta(\ldots \Pi_i(\vartheta), \Pi_i(\vartheta)\,.\,\vartheta, \ldots \Pi_i(\vartheta)\,.\,\vartheta^{k_i-1}, \ldots) = D'.$$

§ 2.

Bestimmung des Index.

Bezeichnet man die Körperdiskriminante mit d, so besteht zwischen d und der Gleichungsdiskriminante D die Beziehung

$$D = k^2\,.\,d, \tag{39}$$

wo k der *Index* der Zahl ϑ heisst. Durch diese Gleichung soll nun die Körperdiskriminante d bestimmt werden, indem man erst die Zahlen D und k bestimmt. Zunächst soll hier die Zahl k untersucht werden, und es soll gezeigt werden,

wie man einen ganz einfachen Ausdruck für die Potenz bestimmen kann, in welcher die Primzahl p in k aufgeht.

Durch Satz 6 ist ein Fundamentalsystem (mod p) bestimmt worden, und nach Kap. 1, § 1 folgt, dass die Körperdiskriminante und die Diskriminante eines Fundamentalsystems für p durch dieselbe Potenz von p teilbar sind.

Die Diskriminante d' des Fundamentalsystems ist also die Diskriminante zu den Zahlen

$$N_{i-1} \cdot \frac{\varphi(\vartheta)^r}{p^{\left[\frac{r\varkappa_i}{\lambda_i}\right]}} \vartheta^s \qquad (r = 0, 1, \ldots l_i - 1, s = 0, 1, \ldots m - 1), \quad (40)$$

wenn diese für $i = 1, 2, \ldots k$ und für alle Primfunktionteiler $\varphi(x)$ von $f(x)$ (mod p) gebildet werden.

Die Zahlen (40) sind ganz algebraisch, aber, wie man sieht, nicht als Polynome in ϑ ausgedrückt, indem eine gewisse Potenz der Primzahl p als Nenner in (40) vorkommt. Es soll nun d' mit einer solchen Potenz von p multipliziert werden, dass alle Elemente (40) auch Polynome in ϑ werden. Man sieht ein, dass man um dies zu erreichen, mit einer Potenz von p multiplizieren muss, welche gleich dem Quadrate des Produktes von allen Nennern in (40) ist. Um diese Potenz von p zu bestimmen, muss man daher einen Ausdruck für das Produkt der Nenner der Zahlen (40) ableiten.

Nach Satz 3 kommt in N_{i-1} die Potenz

$$p^{h_1 + h_2 + \cdots + h_{i-1}}$$

als Nenner vor, und der Nenner einer Zahl (40) ist daher gleich

$$p^{h_1 + h_2 + \cdots + h_{i-1} + \left[\frac{r\varkappa_i}{\lambda_i}\right]}.$$

Nimmt man nun erstens die Zahl r in (40) fest an, und bildet das Produkt der Nenner, wenn s die Werte $0, 1, \ldots m-1$ durchläuft, so wird dieses Produkt

$$p^{m\left(h_1 + h_2 + \cdots + h_{i-1} + \left[\frac{r\varkappa_i}{\lambda_i}\right]\right)}. \quad (41)$$

Bildet man nun weiter das Produkt aller Zahlen (41) für $r = 0, 1, \ldots l_i - 1$, so ergibt sich eine Potenz von p, wo der Exponent den Wert

$$m\,l_i\,(h_1+h_2+\cdots+h_{i-1})$$
$$+m\left(\left[\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}\right]+\left[\frac{2\,\varkappa_i}{\lambda_i}\right]+\cdots+\left[\frac{(l_i-1)\,\varkappa_i}{\lambda_i}\right]\right) \tag{42}$$

hat. Der Summe

$$L_i=l_i\,(h_1+\cdots+h_{i-1})+\left[\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}\right]+\left[\frac{2\,\varkappa_i}{\lambda_i}\right]+\cdots+\left[\frac{(l_i-1)\,\varkappa_i}{\lambda_i}\right] \tag{43}$$

kann man auch eine ganz einfache geometrische Deutung geben. Es ist nämlich dies die Anzahl der Gitterpunkte, welche in dem Polygone $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ zwischen der Seite S_i und ihrer Projektion auf die X-achse liegen. Dabei werden alle Gitterpunkte mitgerechnet, welche auf der Seite S_i oder auf der Ordinate des Anfangspunktes der Seite liegen, aber keine solche, die auf der X-achse oder auf der Ordinate des Endpunktes von S_i liegen.

Man kann aber auch einen expliziten Ausdruck für die Summe

$$M_i=\left[\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}\right]+\left[\frac{2\,\varkappa_i}{\lambda_i}\right]+\cdots+\left[\frac{(l_i-1)\varkappa_i}{\lambda_i}\right]$$

bestimmen, welche in dem Ausdruck (43) für L_i vorkommt. Diese Summe bezeichnet nämlich die Hälfte der Anzahl der Gitterpunkte, welche innerhalb eines Rechtecks mit den Seiten l_i und h_i liegen, indem jedoch dabei die Anzahl der Gitterpunkte auf der einen Diagonale doppelt mitgerechnet werden. Da nun die Gesamtzahl der Gitterpunkte innerhalb des Rechtecks gleich $(h_i-1)(l_i-1)$ ist und die Anzahl der Gitterpunkte auf einer Diagonale (Endpunkte nicht mitgerechnet) gleich ε_i-1 ist, so wird

$$M_i=\frac{(h_i-1)\,(l_i-1)+\varepsilon_i-1}{2}=\frac{1}{2}\,(h_i\,l_i-l_i-h_i+\varepsilon_i),$$

und man hat daher für den Exponenten (42) den Ausdruck

$$m\,.\,L_i=m\left(l_i\,(h_1+\cdots+h_{i-1})+\frac{1}{2}\,(h_i\,l_i-h_i-l_i+\varepsilon_i)\right). \tag{44}$$

Bildet man nun die entsprechenden Produkte für alle Seiten und multipliziert man diese mit einander, so erhält man eine Potenz von p, wo der Exponent den Wert

$$m(L_1+L_2+\cdots+L_k)=m\Bigg(l_2 h_1+l_3(h_1+h_2)+\cdots+l_k(h_1+h_2+\cdots+h_{k-1})+ \\ +\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k} h_i l_i-\sum_{i=1}^{k}(l_i+h_i)+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\right)\Bigg) \tag{45}$$

hat. Setzt man hier

$$L=L_1+L_2+\cdots+L_k,$$

so folgt wegen der Bedeutung der Zahlen L_i, *dass L die Anzahl der Gitterpunkte angibt, welche zwischen dem Polygone und der X-achse liegen. Dabei sollen solche Gitterpunkte nicht mitgerechnet werden, welche auf der X-achse oder auf der Ordinate des Endpunktes des Polygons liegen, wohl aber solche, die auf dem Polygone selbst liegen (vom Anfangspunkte und Endpunkte abgesehen).*

Dies zeigt also, dass das Produkt aller Nenner der Zahlen (40), wenn diese für alle Primfunktiondivisoren $\varphi(x)$ von $f(x)$ (mod p) gebildet werden, gleich $p^{\Sigma m \cdot L}$ ist, wo die Summe über alle Primfunktionen $\varphi(x)$ erstreckt werden soll. Daraus folgt, dass man die Diskriminante d' des Fundamentalsystems mit $p^{2\Sigma m \cdot L}$ multiplizieren muss, damit alle Elemente (40) Polynome in ϑ werden. Wenn man nun d' mit dieser Potenz multipliziert, geht sie nach Satz 3 in die Diskriminante der Zahlen

$$\Pi(\vartheta) \,.\, \Phi_1(\vartheta) \,.\, \Phi_2(\vartheta)\cdots\Phi_{i-1}(\vartheta) \,.\, \varphi(\vartheta)^r \,.\, \vartheta^s \tag{46}$$
$$(i=1,\ 2,\cdots k,\ r=0,\ 1,\cdots l_i-1,\ s=0,\ 1,\cdots m-1)$$

über, wo also die Zahl $\Pi(\vartheta)$ durch (36) definiert ist. Man hat folglich

$$p^{2\,\Sigma m \,.\, L}\, d'=d'',$$

wo d'' die Diskriminante der Zahlen (46) bezeichnet. Wendet man aber nun den zweiten Hilfssatz des Kap. 2. § 1 auf die Diskriminante d'' der Zahlen (46) an, so folgt, dass diese gleich der Diskriminante der Zahlen

$$\Pi_j(\vartheta) \,.\, \vartheta^s \ (s=0,\ 1\cdots k_j)$$

ist, welche in Kap. 2. § 1 mit D' bezeichnet wurde.

Man hat folglich

$$p^{2\,.\,\Sigma m \,.\, L} \,.\, d'=D'.$$

Nach Kap. 2. § 1 ist weiter $D'=K^2 \,.\, D$, wo D die Gleichungsdiskriminante und K nicht durch p teilbar ist, folglich auch

$$D \cdot K^2 = p^{2 \cdot \Sigma m \cdot L} \cdot d'.$$

Da nun d' dieselbe Potenz der Primzahl p wie die Körperdiskriminante d enthält, so folgt der Satz:

Satz 8. Der Index einer Zahl ϑ, welche der in Bezug auf p regulären Gleichung $f(x)=0$ genügt, ist durch die Potenz

$$p^{\Sigma m \cdot L}$$

der Primzahl p genau teilbar. Dabei bedeutet m den Grad der Primfunktionteiler $\varphi(x)$ von $f(x)$ (mod p), und L bedeutet die Anzahl der Gitterpunkte, welche zwischen dem Hauptpolygone $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ und der X-achse liegen, indem diese Anzahl in der oben angegebenen Weise berechnet wird. Für diese Zahl L hat man auch den Ausdruck

$$L = l_2 h_1 + l_3 (h_1 + h_2) + \cdots + l_k (h_1 + \cdots + h_{k-1})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (h_i l_i - h_i - l_i + \varepsilon_i).$$

§ 3.

Bestimmung der Differente der Zahl ϑ.

Durch den Satz 8 ist der Index der Zahl ϑ vollständig bestimmt, und dadurch sind auch prinzipiell die Schwierigkeiten der Bestimmung der Körperdiskriminante überwunden, da man immer die Gleichungsdiskriminante aus den Koeffizienten berechnen kann.

Es soll aber hier auch gezeigt werden, wie es möglich ist, die Gleichungsdiskriminante mittels der hier entwickelten Theorie über Polygone zu bestimmen.

Da bekanntlich

$$D = \pm N(f'(\vartheta)) \tag{47}$$

ist, sollen erstens die Primidealteiler der *Differente* $f'(\vartheta)$ von ϑ bestimmt werden. Nach Satz 1 ist

$$f'(\vartheta) \equiv F_1'(\vartheta) \cdot F_2(\vartheta) \cdots F_s(\vartheta) + F_1(\vartheta) \cdot F_2'(\vartheta) \cdots F_s(\vartheta)$$

$$+ \cdots + F_1(\vartheta) \cdot \cdots F_{s-1}(\vartheta) \cdot F_s'(\vartheta) \qquad (\mathrm{mod}\ p^M),$$

und wenn $\mathfrak{p}_i$ ein Primidealteiler von $(p, \varphi_i(\vartheta))$ ist, so geht dieser in der Zahl $F_i(\vartheta)$ in einer beliebig hohen Potenz auf. Die Potenz von $\mathfrak{p}_i$, welche in $f'(\vartheta)$ aufgeht, wird daher gleich der Potenz, in welcher $\mathfrak{p}_i$ in der Zahl

$$F_1(\vartheta)\cdots F_{i-1}(\vartheta)\, F_i'(\vartheta)\,.\, F_{i+1}(\vartheta)\cdots F_s(\vartheta)$$

aufgeht. Setzt man daher wie früher

$$F(x)=F_i(x)$$
$$\Pi(x)=F_1(x)\cdots F_{i-1}(x)\,.\,F_{i+1}(x)\cdots F_s(x),$$

so soll man also die Zahl

$$\Pi(\vartheta)\,.\,F'(\vartheta)$$

untersuchen. Hier ist aber $\Pi(\vartheta)$ durch kein Primideal teilbar, das in $(p, \varphi(\vartheta))$ aufgeht, und man braucht daher nur den Faktor $F'(\vartheta)$ zu untersuchen.

Nach Satz 1 ist nun weiter

$$F'(\vartheta)\equiv\Phi'_1(\vartheta)\,.\,\Phi_2(\vartheta)\cdots\Phi_k(\vartheta)+\Phi_1(\vartheta)\,.\,\Phi'_2(\vartheta)\cdots\Phi_k(\vartheta)$$
$$+\cdots+\Phi_1(\vartheta)\cdots\Phi_{k-1}(\vartheta)\,.\,\Phi'_k(\vartheta) \qquad (\mathrm{mod}\ p^M),$$

und man soll untersuchen, in welcher Potenz $F'(\vartheta)$ durch ein Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ der i^{ten} Seite teilbar ist. Da aber die Zahl $\Phi_i(\vartheta)$ durch eine beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar ist, so wird durch das Glied

$$\Phi_1(\vartheta)\cdots\Phi_{i-1}(\vartheta)\,.\,\Phi'_i(\vartheta)\,\Phi_{i+1}\cdots\Phi_k(\vartheta)$$

bestimmt, in welcher Potenz $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in $F'(\vartheta)$ vorkommt. Nach Satz 2. § 4 folgt aber, dass die Zahl

$$\Phi_1(\vartheta)\cdots\Phi_{i-1}(\vartheta)\,\Phi_{i+1}(\vartheta)\cdots\Phi_k(\vartheta)$$

durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in der Potenz

$$(h_1+h_2+\cdots+h_{i-1})\,\lambda_i+(l_{i+1}+l_{i+2}+\cdots+l_k)\,\varkappa_i \tag{48}$$

teilbar ist.

Es bleibt daher nur übrig, die Zahl $\Phi'_i(\vartheta)$ zu untersuchen. Nach Satz 1 ist weiter

$$\Phi'_i(\vartheta)\equiv\Phi'^{(i)}_1(\vartheta)\,\Phi^{(i)}_2(\vartheta)\cdots\Phi_{t_i}(\vartheta)+\Phi^{(i)}_1(\vartheta)\,.\,\Phi'^{(i)}_2(\vartheta)\cdots\Phi_{t_i}(\vartheta)$$
$$+\cdots+\Phi^{(i)}_1(\vartheta)\cdots\Phi^{(i)}_{t_{i-1}}(\vartheta)\,.\,\Phi'^{(i)}_{t_i}(\vartheta) \qquad (\mathrm{mod}\ p^M),$$

und da hier $\Phi_i^{(j)}(\vartheta)$ immer durch eine beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar ist, so bestimmt die Zahl

$$\Phi_1^{(i)}(\vartheta)\cdots\Phi_{j-1}^{(i)}(\vartheta)\,\Phi'^{(i)}_j(\vartheta)\,\Phi_{j+1}^{(i)}(\vartheta)\cdots\Phi_{t_i}^{(i)}(\vartheta),$$

in welcher Potenz $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in $\Phi_j^{(i)}(\vartheta)$ vorkommt. Nach § 5. Kap. I ist aber die Zahl $\Phi_{j_1}^{(i)}(\vartheta)$ durch das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in genau der Potenz $\varepsilon_{j_1}^{(i)}\,.\,\lambda_i\,.\,\varkappa_i$ teilbar, und daher wird die Zahl

$$\Phi_1^{(i)}(\vartheta)\cdots\Phi_{j-1}^{(i)}(\vartheta)\,.\,\Phi_{j+1}^{(i)}(\vartheta)\cdots\Phi_{t_i}^{(i)}(\vartheta)$$

durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in genau der Potenz

$$\lambda_i\,.\,\varkappa_i\,(\varepsilon_1^{(i)}+\varepsilon_2^{(i)}+\cdots+\varepsilon_{j-1}^{(i)}+\varepsilon_{j+1}^{(i)}+\cdots+\varepsilon_{t_i}^{(i)})=\lambda_i\,.\,\varkappa_i\,(\varepsilon_i-\varepsilon_j^{(i)}) \tag{49}$$

teilbar.

Die Untersuchung der Zahl $f'(\vartheta)$ ist daher auf die Bestimmung der Potenz, in welcher $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in $\Phi'^{(i)}_j(\vartheta)$ aufgeht, vollständig zurückgeführt.

Um nun diesen Exponenten zu bestimmen, setzt man für den Augenblick $\varepsilon_j^{(i)}=\varepsilon$ und $\Phi_j^{(i)}(x)=\Phi(x)$. Da nun $\Phi(x)$ ein geradliniges Polygon mit der Neigungszahl $\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$ besitzt, so kann man $\Phi(x)$ in der Form

$$\Phi(x)=\varphi(x)^{\varepsilon\cdot\lambda_i}+A_1(x)\,.\,p^{\overline{\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}}}\,.\,\varphi(x)^{\varepsilon\cdot\lambda_i-1}+A_2(x)\,p^{\overline{\frac{2\varkappa_i}{\lambda_i}}}\,.\,\varphi(x)^{\varepsilon\cdot\lambda_i-2}$$
$$+\cdots+A_{\varepsilon\,.\,\lambda_i}(x)\,.\,p^{\varepsilon\cdot\varkappa_i} \tag{50}$$

annehmen, wo $A_{\varepsilon\,.\,\lambda_i}(x)\not\equiv 0 \pmod{p,\ \varphi(x)}$. Weiter hat man für das geradlinige Polygon S von $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)\equiv f_j^{(i)}(x)\equiv\varphi(x)^{\varepsilon\cdot\lambda_i}+A_{\lambda_i}\,.\,p^{\varkappa_i}\,.\,\varphi(x)^{(\varepsilon-1)\lambda_i}+\cdots+A_{\varepsilon\,.\,\lambda_i}(x)\,.\,p^{\varepsilon\cdot\varkappa_i}\pmod{S}.$$

Man bildet nun nach (50)

$$\Phi'(x)=\varepsilon\,.\,\lambda_i\,.\,\varphi'(x)\,.\,\varphi(x)^{\varepsilon\cdot\lambda_i-1}+(A'_1(x)\varphi,(x)+(\varepsilon\,.\,\lambda_i-1)\,A_1(x)\,.\,\varphi'(x))\,p^{\overline{\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}}}\,.\,\varphi(x)^{\varepsilon\cdot\lambda_i-2}$$
$$+\cdots+A_{\varepsilon\,.\,\lambda_i}(x)\,.\,p^{\varepsilon\cdot\varkappa_i}$$

oder auch

$$\varphi(x)\,.\,\Phi'(x)=\varepsilon\,.\,\lambda_i\,.\,\varphi'(x)\,.\,\varphi(x)^{\varepsilon\cdot\lambda_i}+B_1(x)\,.\,p^{\left[\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}\right]}\,.\,\varphi(x)^{\varepsilon\cdot\lambda_i-1}+B_2(x)\,.\,p^{\left[\frac{2\varkappa_i}{\lambda_i}\right]}\,.\,\varphi(x)^{\varepsilon\cdot\lambda_i-2}$$
$$+\cdots+B_{\varepsilon\,.\,\lambda_i}(x),$$

wo allgemein

$$B_t(x) = A'_t(x) \,.\, \varphi(x) + (\varepsilon\,\lambda_i - t)\, A_i(x)\, \varphi'(x)$$

gesetzt worden ist, wo also speziell

$$B_{\varepsilon\,.\,\lambda_i}(x) = A'_{\varepsilon\,.\,\lambda_i}(x) \,.\, \varphi(x)$$

ist. Das Polynom $\Phi'(x)\,\varphi(x)$ hat folglich auch das geradlinige Polygon S, und man sieht leicht ein, dass man für die Glieder, welche auf S liegen, die Kongruenz

$$K(x) \equiv \varphi(x) \,.\, \Phi'\,.\,(x) = \varepsilon\,.\,\lambda_i\,.\,\varphi'(x)\,\varphi(x)^{\varepsilon\,.\,\lambda_i} + (\varepsilon - 1)\,\lambda_i\,.\,\varphi'(x)\,.\,A_{\lambda_i}(x)\,.\,p^{\varkappa_i}\,.\,\varphi(x)^{(\varepsilon-1)\,\lambda_i}$$

$$+ \cdots + \lambda_i\,.\,\varphi'(x)\,.\,A_{(\varepsilon-1)\,\lambda_i}\,.\,p^{(\varepsilon-1)\,\varkappa_i}\,.\,\varphi(x)^{\lambda_i} \qquad (\mathrm{mod}\ S) \qquad (51)$$

hat. Setzt man nun $x = \vartheta$, so werden in $\varphi(\vartheta)\,.\,\Phi'(\vartheta)$ alle Glieder, welche auf S liegen, durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in der Potenz $\varepsilon\,.\,\varkappa_i\,.\,\lambda_i$ genau teilbar, während alle anderen Glieder durch höhere Potenzen von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar sind. Nach (51) ist aber die Summe der Glieder auf S gleich

$$\lambda_i\,\varphi'(\vartheta)\left(\varepsilon\,.\,\varphi(\vartheta)^{\varepsilon\,.\,\lambda_i} + (\varepsilon-1)\,A_{\lambda_i}(\vartheta)\,.\,p^{\varkappa_i}\,.\,\varphi(\vartheta)^{(\varepsilon-1)\,\lambda_i} + \cdots + A_{(\varepsilon-1)\,\lambda_i}\,.\,p^{(\varepsilon-1)\,\varkappa_i}\,.\,\varphi(\vartheta)^{\lambda_i}\right),$$

und wenn daher λ_i nicht durch p teilbar ist, wird diese Summe genau durch $\mathfrak{p}_j^{(i)\,\varepsilon\,.\,\lambda_i\,.\,\varkappa_i}$ teilbar. Denn wenn diese Summe durch eine höhere Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar sein soll, muss $K(x)$ nach Kap. 1. § 5 durch $f_j^{(i)}(x)$ (mod S) teilbar sein, was aber nach (51) nicht möglich ist. Es folgt daher, dass $\Phi'(\vartheta)$ in diesem Falle genau durch $\mathfrak{p}_j^{(i)\,\varepsilon\,.\,\varkappa_i\,\lambda_i - \varkappa_i}$ teilbar ist.

Wenn aber λ_i durch p teilbar ist, gibt es keine Glieder auf S, und folglich ist $\Phi'(\vartheta)\,.\,\varphi(\vartheta)$ durch $\mathfrak{p}_j^{(i)\,\varepsilon\,\varkappa_i\,\lambda_i + \varrho}$ teilbar, wo $\varrho > 0$ ist; dies zeigt, dass $\Phi'(\vartheta)$ durch $\mathfrak{p}_j^{(i)\,\varepsilon\,\varkappa_i\,\lambda_i - \varkappa_i + \varrho}$ teilbar ist.

Addiert man nun die Zahlen (48) und (49) und noch dazu $\varepsilon_j^{(i)}\,.\,\varkappa_i\,\lambda_i - \varkappa_i + \varrho_j^{(i)}$, so erhält man die Summe

$$(h_1 + h_2 + \cdots + h_{i-1})\,\lambda_i + (l_{i+1} + \cdots + l_k)\varkappa_i + h_i\,.\,\lambda_i - \varkappa_i + \varrho_j^{(i)},$$

und es ist bewiesen:

Satz 9. Die Differente $f'(\vartheta)$ der Zahl ϑ ist durch das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in einer Potenz mit dem Exponenten

$$(h_1 + h_2 + \cdots + h_i)\,\lambda_i + (l_{i+1} + \cdots + l_k)\,\varkappa_i - \varkappa_i + \varrho_j^{(i)}$$

genau teilbar, wobei $\varrho_j^{(i)}=0$ *ist, wenn* λ_i *nicht durch* p *teilbar ist, und* $\varrho_j^{(i)}>0$, *wenn* λ_i *durch* p *teilbar ist.*

Es mag nun von Interesse sein, zu untersuchen wie man die Zahl $\varrho=\varrho_j^{(i)}$ bestimmen kann, wenn also vorausgesetzt wird, dass λ_i durch p teilbar ist. Die Zahl ϱ war dadurch bestimmt, dass die Zahl $\Phi'(\vartheta)\,.\,\varphi(\vartheta)$ durch $\mathfrak{p}_j^{(i)\varepsilon\,.\,\varkappa_i\,.\,\lambda_i+\varrho}$ genau teilbar sein sollte.

Man dividiert nun das Polynom $\Phi'(x)\,.\,\varphi(x)$ durch $\Phi(x)$ und erhält

$$H(x)=\Phi'(x)\,.\,\varphi(x)-C(x)\,.\,\Phi(x), \tag{52}$$

wo $H(x)$ von der Form

$$H(x)=H_1(x)\,.\,p^{\alpha_1}\,.\,\varphi(x)^{\varepsilon\,.\,\lambda_1-1}+H_2(x)\,.\,p^{\alpha_2}\,.\,\varphi(x)^{\varepsilon\,.\,\lambda_2-2}+\cdots+H_{\varepsilon\,.\,\lambda_i}(x)\,.\,p^{\alpha_{\varepsilon\,.\,\lambda_i}}$$

ist, die Koeffizienten $H_t(x)$ höchstens vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade sind und die Exponenten α_t so gewählt sein sollen, dass $H_t(x)$ nicht durch p teilbar ist. Die Punkte (t, α_t) müssen alle oberhalb S liegen, wenn vorausgesetzt wird, dass λ_i durch p teilbar ist.

Da die Zahl $\Phi'(\vartheta)\,.\,\varphi(\vartheta)$ jedenfalls nur eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ enthalten kann, und man weiter die Zahl M so wählen kann, dass $\Phi(\vartheta)$ durch eine beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar ist, so müssen folglich die Zahlen $\Phi'(\vartheta)\,\varphi(\vartheta)$ und $H(\vartheta)$ nach (52) durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar sein.

Ein Glied

$$H_t(\vartheta)\,.\,p^{\alpha_t}\,.\,\varphi(\vartheta)^{\varepsilon\,.\,\lambda_i-t} \tag{53}$$

in $H(\vartheta)$ ist nun durch $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in genau der Potenz

$$\alpha_t\,.\,\lambda_i+(\varepsilon\,.\,\lambda_i-t)\,\varkappa_i=\varepsilon\,.\,\lambda_i\,.\,\varkappa_i+r \tag{54}$$

teilbar. Wenn zwei Glieder (53) durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ teilbar sind, so muss

$$\alpha_t\,.\,\lambda_i+(\varepsilon\,.\,\lambda_i-t)\,\varkappa_i=\alpha_{t'}\,.\,\lambda_i+(\varepsilon\,.\,\lambda_i-t')\,\varkappa_i$$

oder

$$(\alpha_{t'}-\alpha_t)\,\lambda_i=(t'-t)\,\varkappa_i$$

sein, woraus

$$\alpha_{t'}=\alpha_t+e\,.\,\varkappa_i$$

$$t'=t+e\,.\,\lambda_i$$

folgt, wobei e eine ganze rationale Zahl bedeutet. Diese Relationen zeigen, dass alle Punkte (t, α_t), wofür die Zahl r in (53) denselben Wert besitzt, auf einer zu S parallelen Geraden liegen müssen, und daraus folgt leicht, dass die Summe der Glieder in $H(\vartheta)$, welche durch $\mathfrak{p}_j^{(i)\varepsilon \cdot \lambda_i \cdot \varkappa_i + r}$ genau teilbar sind, die Form

$$\frac{p^\alpha}{\varphi(\vartheta)^t}\left(B_0(\vartheta) \cdot \varphi(\vartheta)^{\varepsilon \cdot \lambda_i} + B_1(\vartheta) \cdot p^{\varkappa_i} \cdot \varphi(\vartheta)^{(\varepsilon-1)\lambda_i} + \cdots + B_{\varepsilon-1}(\vartheta)\, p^{(\varepsilon-1)\varkappa_i} \cdot \varphi(\vartheta)^{\lambda_i}\right)$$

hat. Hier ist $t<\lambda_i$ und $\alpha\lambda_i - t \cdot \varkappa_i = r$ vorausgesetzt, und nicht alle Koeffizienten $B_i(x)$ sollen $\equiv 0$ (modd p, $\varphi(x)$) sein. Dann muss diese Summe durch $\mathfrak{p}_j^{(i)\varepsilon \cdot \lambda_i \cdot \varkappa_i + r}$ genau teilbar sein, weil das Polynom

$$B_0(x) \cdot \varphi(x)^{\varepsilon \cdot \lambda_i} + B_1(x) \cdot p^{\varkappa_i} \cdot \varphi(x)^{(\varepsilon-1)\lambda_i} + \cdots + B_{\varepsilon-1}(x) \cdot p^{(\varepsilon-1)\varkappa_i} \varphi(x)^{\lambda_i}$$

offenbar nicht durch $f_j^{(i)}(x)$ (mod S) teilbar sein kann. Ist daher ϱ die kleinste unter den Zahlen $r = \alpha_t \cdot \lambda_i - t \cdot \varkappa_i$ in der Darstellung von $H(x)$, so wird folglich $H(\vartheta)$ genau durch $\mathfrak{p}_j^{(i)\varepsilon \cdot \varkappa_i \cdot \lambda_i + \varrho}$ teilbar.

Die Zahl $\varrho_j^{(i)}$ *ist gleich der kleinsten unter den Zahlen*

$$\alpha_t \cdot \lambda_i - t \cdot \varkappa_i \;\; (t = 1, 2, \cdots \varepsilon).$$

§ 4.

Bestimmung der Gleichungsdiskriminante und der Körperdiskriminante.

Aus dem Satze 9 folgt nun leicht auch die Zusammenzetzung die Gleichungsdiskriminante, indem diese gleich der Norm der Differente ist. Da nun weiter $N\mathfrak{p}_j^{(i)} = p^{\varepsilon_j^{(i)} \cdot m}$ ist, so folgt nach dem erwähnten Satze, dass die Norm zu der Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$, in welcher dieses Primideal in $f'(\vartheta)$ aufgeht, gleich einer Potenz von p mit dem Exponenten

$$m \cdot \varepsilon_j^{(i)}\left[(h_1 + h_2 + \cdots + h_{i-1})\lambda_i + h_i \cdot \lambda_i + (l_{i+1} + \cdots + l_k)\varkappa_i - \varkappa_i + \varrho_j^{(i)}\right]$$

ist. Bildet man nun das Produkt aller entsprechenden Normen für die Primideale der i^{ten} Seite, so ist $\sum_{j=1}^{t_i} \varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_i$, und es ergibt sich eine Potenz von p, wo der Exponent gleich

$$m\left[l_i(h_1+\cdots+h_{i-1})+h_i\,.\,l_i+(l_{i+1}+\cdots+l_k)\,h_i-h_i+\sum_{j=1}^{t_i}\varrho_j^{(i)}\,.\,\varepsilon_j^{(i)}\right]$$

wird. Wenn man dann weiter diese Normen für alle Seiten multipliziert, so ergibt sich der Exponent

$$\left.\begin{aligned}&m\Big[l_2\,.\,h_1+l_3(h_1+h_2)+\cdots+l_k(h_1+\cdots+h_{k-1})\\&+h_1(l_2+\cdots+l_k)+h_2(l_3+\cdots+l_k)+\cdots+h_{k-1}\,.\,l_k\\&+\sum_{i=1}^{k}h_i\,.\,l_i-\sum_{i=1}^{k}h_i+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t_i}\varrho_j^{(i)}\,.\,\varepsilon_j^{(i)}\Big]\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

für p. Nun ist aber, wie man leicht sieht,

$$\begin{aligned}&l_2\,h_1+l_3(h_1+h_2)+\cdots+l_k(h_1+\cdots+h_{k-1})\\&=h_1(l_2+\cdots+l_k)+h_2(l_3+\cdots+l_k)+\cdots+h_{k-1}\,.\,l_k,\end{aligned}$$

und folglich geht (55) in

$$\left.\begin{aligned}&m\Big[2\,(l_2\,h_1+l_3(h_1+h_2)+\cdots+l_k(h_1+\cdots+h_{k-1}))\\&\qquad+\sum_{i=1}^{k}h_i\,l_i-\sum_{i=1}^{k}h_i+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t_i}\varrho_j^{(i)}\,.\,\varepsilon_j^{(i)}\Big]\end{aligned}\right\}\tag{56}$$

über. Führt man aber hier die Zahl L des Satzes 8 ein, so ergibt sich für (56) weiter der einfache Ausdruck

$$m\left[2\,L+\sum_{i=1}^{k}\left(l_i-\varepsilon_i+\sum_{j=1}^{t_i}\varepsilon_j^{(i)}\,.\,\varrho_j^{(i)}\right)\right].\tag{57}$$

Diesem Ausdruck kann man aber auch eine andere Form geben, indem man

$$\varepsilon_i=\sum_{j=1}^{t_i}\varepsilon_j^{(i)},\ l_i=\sum_{j=1}^{t_i}\varepsilon_j^{(i)}\,.\,\lambda_i$$

setzt, und (57) geht dann in

$$2\,m\,L+m\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t_i}(\lambda_i-1+\varrho_j^{(i)})\,\varepsilon_j^{(i)}$$

über, oder wenn man

$$\delta_j^{(i)} = \lambda_i - 1 + \varrho_j^{(i)}$$

setzt, in

$$2\,m\,L + m \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{t_i} \delta_j^{(i)} \,.\, \varepsilon_j^{(i)}.$$

Satz 10. Die Gleichungsdiskriminante D ist durch die Primzahl p in der Potenz mit dem Exponenten

$$\sum_m \left(2\,m\,L + m \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{t_i} \delta_j^{(i)} \,.\, \varepsilon_j^{(i)} \right)$$

genau teilbar. Dabei bedeutet $\delta_j^{(i)} = \lambda_i - 1 + \varrho_j^{(i)}$, wo $\varrho_j^{(i)} = 0$, wenn λ_i nicht durch p teilbar ist, und $\varrho_j^{(i)} > 0$, wenn λ_i durch p teilbar ist; in diesem letzten Falle kann die Zahl $\varrho_j^{(i)}$ immer wie in § 3 berechnet werden.

In diesem Satze bedeutet das äussere Summenzeichen natürlich, dass für alle verschiedenen Primfunktionteiler $\varphi(x)$ von $f(x)$ (mod p) die entsprechenden Exponenten gebildet werden sollen und darüber summiert werden soll.

Durch Satz 1 und Satz 8 ist nun auch die Körperdiskriminante vollständig bestimmt. Da nämlich nach Satz 8 der Index durch $p^{\Sigma\, m\, L}$ genau teilbar ist, so wird nach Satz 10, unter Anwendung der Relation $D = k^2 \,.\, d$, die Körperdiskriminante durch

$$p^{\sum_m m \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{t_i} \delta_j^{(i)} \,.\, \varepsilon_j^{(i)}}$$

genau teilbar. Beachtet man nun, dass $\varepsilon_j^{(i)} \,.\, m = f_j^{(i)}$ der Grad des Primideals $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ ist, so erhält man:

Satz 11. Die Körperdiskriminante ist durch die Primzahl p in der Potenz

$$p^{\Sigma f_j^{(i)} \left(\lambda_i - 1 + \varrho_j^{(i)}\right)}$$

genau teilbar. Hier ist $\varrho_j^{(i)} = 0$, wenn λ_i nicht durch p teilbar ist, und $\varrho_j^{(i)} > 0$, wenn λ_i durch p teilbar ist, und in jedem Falle einfach bestimmbar.

Man kann natürlich auch für diesen Satz einen etwas anderen Ausdruck angeben, wenn man annimmt, dass man für p eine Primidealzerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}, \; N\mathfrak{p}_i = p^{h_i}$$

hat. Dann wird die Körperdiskriminante durch

$$p^{\Sigma h_i(e_i - 1 + \varrho_i)}$$

genau teilbar, wo also $\varrho_i = 0$ ist, wenn e_i nicht durch p teilbar ist, und $\varrho_i > 0$, wenn e_i durch p teilbar ist. Um die Zahlen ϱ_i wirklich zu bestimmen, muss man eine reguläre Gleichung für die Primzahl p kennen.

Bei allen diesen Untersuchungen spielt die Zahl $M > H$, welche im Satze 1 vorkommt, eine wichtige Rolle. Man sieht ohne Schwierigkeiten ein, dass es immer genügen wird, wenn man $M > H + R$ wählt, wobei R die grösste der Zahlen ϱ bedeutet.

TABLE DES TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE HELGE VON KOCH.

1. Om den konforma afbildningen af en paraboloid på ett plan.
   Stockholm Öfversigt 46, pp. 181—198. (1889.)
2. Om upplösningen af ett system lineära likheter mellan ett oändligt antal obekanta.
   Stockholm Öfversigt 47, pp. 109—129. (1890.)
3. Bidrag till teorin för oändliga determinanter.
   Stockholm Öfversigt 47, pp. 411—431. (1890.)
4. Om användningen av oändliga determinanter inom teorin för lineära homogena differentialekvationer.
   Stockholm Öfversigt 47, pp. 225—236, 499—525. (1890.)
5. Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires.
   Acta Mathematica 15, pp. 53—63. (1891.)
6. Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires.
   Acta Mathematica 16, pp. 217—295. (1892.)
7. Sur la divisibilité des fonctions entières.
   Stockholm Öfversigt 50, pp. 449—453. (1893.)
8. Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée.
   C. R. 113, pp. 850—853. (1894.)
9. Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires.
   Acta Mathematica 18, pp. 337—419. (1894.)
10. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.
    C. R. 116, pp. 91—93. (1893.)
11. Sur les intégrales uniformes des équations linéaires.
    C. R. 116, pp. 179—181. (1893.)
12. Sur les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre.
    C. R. 116, pp. 179—181. (1893.)
13. Sur un théorème de la théorie des groupes continus de transformations.
    Stockholm Öfversigt 51, pp. 311—313. (1894.)

14. Sur la convergence des déterminants d'ordre infini et des fractions continus.
C. R. 120, pp. 144—147. (1895.)
15. Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues.
Bull. Math. 23, pp. 33—40. (1895.)
16. Quelques théorèmes concernant la théorie générale des fractions continues.
Stockholm Öfversigt 52, pp. 101—112. (1895.)
17. Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles.
C. R. 120, pp. 517—519. (1895.)
18. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.
Stockholm Öfversigt 52, pp. 721—728. (1895.)
19. Sur la convergence des déterminants d'ordre infini.
Stockholm Bihang 22. No. 4. 31 p. (1899.)
20. Sur les systèmes d'ordre infini d'équations différentielles.
Stockholm Öfversigt 56, pp. 395—411. (1899.)
21. Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées.
Bull. Math. 27, pp. 215—227. (1899.)
22. Föreläsningar öfver Teorin om Transformationsgrupper.
Stockholm, 189 p. (1900.)
23. Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis.
Acta Mathematica 24, pp. 89—122. (1900.)
24. Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations fonctionnelles.
Stockholm Bihang 25. No. 5. 24 p. (1900.)
25. Sur la distribution des nombres premiers.
C. R. 130, pp. 1243—1246. (1900.)
26. Sur la distribution des nombres premiers.
Acta Mathematica 24, pp. 159—182. (1900.)
27. Sur la transformation des formes bilinéaires.
Stockholm Öfversigt 57, pp. 335—351. (1900.)
28. Remarques sur les facteurs de Möbius.
Stockholm Öfversigt 57, pp. 659—668. (1900.)
29. Über die Riemannsche Primzahlfunktion.
Math. Ann. 55, pp. 441—464. (1902.)
30. Sur la distribution des nombres premiers.
Congrès international des Mathématiques, Paris 1900, pp. 195—198.
31. Sur une méthode de décider si un nombre entier donné est premier ou composé.
Stockholm Öfversigt 57, pp. 789—794. (1900.)
32. Sur la distribution des nombres premiers.
Stockholm Öfversigt 57, pp. 669—674. (1900.)

33. Quelques théorèmes sur les fonctions entières.
Stockholm Öfversigt 58, pp. 405—413. (1901.)

34. Applications nouvelles de la fonction exponentielle.
Stockholm Bihang 28, 16 p. (1902.)

35. Sur le prolongement analytique d'une série de Taylor.
Acta Mathematica 27, pp. 79—104. (1903.)

36. Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendantes.
Arkiv för Mat. 1, pp. 205—208. (1904.)

37. Sur un théorème concernant les nombres premiers.
Arkiv för Mat. 1, pp. 481—488. (1904.)

38. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire.
Arkiv för Mat. 1, pp. 681—702. (1904.)

39. Sur une propriété arithmétique du développement en série de Taylor d'une fonction algébrique.
Arkiv för Mat. 1, pp. 627—641. (1904.)

40. Sur une extension du théorème d'Eisenstein.
Arkiv för Mat. 1, pp. 643—650. (1904.)

41. Remarque sur une communication de M. Brodén.
Arkiv för Mat. 2, N:o 27, 2 p. (1906.)

42. Remarques sur quelques séries de polynomes.
Bull. Math. 34, pp. 269—274. (1906.)

43. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes.
Acta Mathematica 30, pp. 145—174. (1906.)

44. Sur la convergence des déterminants infinis.
Rendiconto del Circolo Matematico di Palermo 28, pp. 255—266. (1909.)

45. Contribution à la théorie des nombres premiers.
Acta Mathematica 33, pp. 293—320. (1910.)

46. Sur les systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.
Comptes Rendus, Congrès Stockholm 1909, pp. 92—100.

47. Sur un théorème de M. Hilbert.
Math. Ann. 69, pp. 266—283. (1910.)

48. Sur un nouveau critère de convergence pour les déterminants infinis.
Arkiv för Mat. 7, No. 4, 17 p. (1912.)

49. Sur certains systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.
Arkiv för Mat. 8, No. 9, 31 p. (1913.)

50. On regular and irregular solutions of some infinite systems of linear equations.
Proceedings of the 5. International Mathematical Congres. 1, pp. 352—365. (1912.)

51. Über das Nichtverschwinden einer Determinante nebst Bemerkungen über Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen.
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 22, pp. 285—291. (1913.)

52. Sur le prolongement d'une série de Taylor.
Arkiv för Mat. 12, No. 11, 32 p. (1917.)

53. Contributions à la théorie du prolongement d'une fonction analytique.
Arkiv för Mat. 12, No. 22, 48 p. (1917.)

54. Un théorème sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires et son application au problème de l'intégration.
Arkiv för Mat. 13, No. 15, 18 p. (1919.)

55. On a class of equations connected with Euler-Maclaurins sumformula.
Arkiv för Mat. 15, No. 26, 16 p. (1921.)

56. Sur les équations différentielles linéaires d'ordre infini.
Arkiv för Mat. 16, No. 6, 12 p. (1922.)

Abréviations.

Stockholm Öfversigt	= Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar.
Stockholm Bihang	= Bihang till Kongl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar.
Bull. Math.	= Bulletin de la Société Mathématique de France.
Arkiv för Mat.	= Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik.
C. R.	= Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris.
Math. Ann.	= Mathematische Annalen.

BIBLIOGRAPHIE.

Académie Royale de Belgique.

Bruxelles.

Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Catalogue onomastique des accroissements de la bibliothèque par F. LEURIDANT et J. PERRÉE. Sciences 1883—1914. — VII+422 pp. 8. 1919.

Johann Ambrosius Barth.

Leipzig.

SCHWEIKERT, G., Innere Ballistik. — 107 pp. 8. 1923.

Einleitung. Pyrostatik. Pyrodynamik.

WALDEN, PAUL, Elektrochemie wässeriger Lösungen. (Handbuch d. angewandten physikal. Chemie in Einzeldarstellungen. Hrsg. von G. Bredig. Bd 13.) — XI+515 pp. 8. 1924.

Nichtwässr. »indiffer.» Lösungsmittel. Leitfähigk. homogener Flüssigkeiten (Lösungsmittel). Leitfähigk. d. Lösungen. Übersicht d. in d. verschied. Lösungsmitteln ausgeführten Messungen. Leitfähigkeitswerte in nichtwässr. Lösungen. Änderungen d. Leitvermögens mit d. Temperatur, Viscosität d. Lösungsmittels u. ä. . . . . . . Löslichkeit d. Elektrolyte in nichtwässr. Lösungsmitteln.

Behrend & Co.

Berlin.

BORCHARDT, LUDWIG, Gegen die Zahlenmystik an der grossen Pyramide bei Gise. Vortrag gehalten in der Vorderasiatisch-ägyptischen Gesellschaft zu Berlin am 1. Febr. 1922. Mit 6 Abb. — 40 pp. 8. 1922.

Blackie & Son.

London.

Whittaker, E. T., & Robinson, G., The calculus of observations. A treatise on numerical mathematics. — XVI + 395 pp. 8. 1924.

Interpolation with equal intervals of the argument. Interpolation with unequal intervals of the argument. Central-difference formulae. Applic. of difference formulae. Determinants and linear equations. Numer. solution of algebr. and transcendental equations. Numer. integration and summation. Normal frequency distributions. The method of least squares. Pract. Fourier analysis. Graduation, or the smoothing of data. Correlation. The search for periodicities. Numer. solution of differ. equations. Some further problems.

Librairie scientif. Alb. Blanchard.

Paris.

Bouasse, H., La question préalable contre la théorie d'Einstein. — 28 pp. 8. 1923.

Bouny, François, Leçons de mécanique rationnelle professées à l'École des mines et de métallurgie, faculté technique du Hainaut à Mons. T. 1. Calcul vectoriel. Cinématique. Statique. Potentiel. — VIII + 600 pp. 8. 1924. Fr. 50: —.

1. Cinématique: Théorie élém. des vecteurs. Notions fondam. de cinématique. Composition des vitesses. Compos. des accélérations. Mouvement d'un solide.

2. Statique: Généralités. Équilibre du point et des systèmes. Statique des solides. Systèmes déformables. Compléments de calcul vectoriel. Travail. Méthode des vitesses virtuelles. Compléments divers.

Delmotte, G., Recherches sélénographiques et nouvelle théorie des cirques lunaires. — VIII + 93 pp. 8. 1923. Fr. 7: 50.

Observations lunaires. Systèmes directeurs Tychéens. L'hypothèse tripode des fractures, des exsudats et des refusions. Étude, classement et formation des div. accidents de l'écorce lunaire. Variations. Influences directrices sur le soleil et les planètes.

Petrovitch, M., Durées physiques indépendantes des dimensions spatiales. — 28 pp. 8. 1924. 4 fr.

Desclée, De Brouwer et Cie.

Apollonius, Les coniques d'Apollonius de Perge. Œuvres trad. pour la première fois du grec en français avec une introd. et des notes par P. Ver Eecke. — LII + 656 pp. 4. 1923.

Cambridge University Press.

Baker, H. F., Principles of geometry. Vol. 3. Solid geometry, quadrics, cubic curves in space, cubic surfaces. — XIX + 228 pp. 8. 1923.

Introd. to the theory of quadric surfaces. Relations with a fixed conic. Spheres, confocal surfaces; quadrics through the intersection of two gen. quadrics. Cubic curves in space. Intersection of two or more quadrics. The gen. cubic surface; introductory theorems.

Milne, R. M., Mensuration and elementary solid geometry for schools. — X + 206 pp. 8. 1923.

Geom. of similar figures. Areas of rectilin. figures. Areas of sim. figures. Approximate rules for areas. Geom. of the circle. Mensuration of circle. Orthogonal projection of lines. Lines and planes. Prisms. Pyramids. Orthog. projection of areas. Geom. of sphere. Mensuration of sphere. Gen. theorems. Rectangular axes in two dimensions. Rectangular axes in three dimensions. Plan and elevation. Descript. geometry. Regular solid figures. Appendix.

Clarendon Press.

Oxford.

Brewster, G. W., Commonsense of the calculus. — 62 pp. 8. 1923.

Introd. Related quantities. Differences. Speed. Distance. Time graphs. Gradient. Differentiation. Applications. Maxima & minima. Rate of change. Integration (or addition). Speed-time graph. Area expressed as an integral. Rules for finding an area. Algebr. integration. The definite integral. Other integrals. Differ. equations. Dynam. applications. Histor. note.

Coolidge, J. L., The geometry of the complex domain. — 242 pp. 8. 1924.

The representation of the binary domain. The geom. of the binary domain. Representation of points of a curve. Representation of points of a plane. The ternary domain, algebraic theory. Differential geometry of the plane. Three-dimensional complex space. The v. Staudt theory.

Librairie Armand Colin.

Paris.

Béghin, H., Statique et dynamique. (Collection Armand Colin (Section de mathématiques). N:o 9—10.) 1. VIII+200 pp. — 2. 208 pp. 8. 1921.

1. Géométrie et cinématique des masses.

Notion de masse. Centres d'inertie (ou de gravité). Moments d'inertie. Force vive. Énergie cinét. Quantités de mouvement. Forces d'inertie.

2. Lois de la mécanique.

Mécanique universelle. Actions de contact entre solides. Changement du système de référence. Lois de la mécanique terrestre. Exercices simples sur la mécanique terrestre. Travail. Puissance. Théorèmes gén. de la dynamique du point. Exerc. sur la mécanique du point. Généralités sur les mouvements oscillatoires.

3. Statique des systèmes.

Statique des solides invariables. Statique des corps déformables. Travail virtuel.

4. Dynamique des systèmes.

Théorèmes gén. Énergie. Machines. Dynamique des solides invariables. Chocs et percussions.

Borel, Émile, & Deltheil, Robert, Probabilités, erreurs. (Collection Armand Colin, section de mathématiques.) N:o 34. — VI+197 pp. 8. 1923.

1. Éléments de la théorie des probabilités.

Définitions et principes gén. Épreuves répétées et la loi des écarts. Probabilités continues. Probabilités des causes.

2. Applications de la théorie des probabilités.

Problèmes statist. et la biométrie. Théories moléculaires.

3. Erreurs d'observation.

La loi de Gauss. Méthode des moindres carrés.

Bricard, R., Cinématique et mécanismes. (Collection Armand Colin, section de mathématiques. N:o 3.) — II+212 pp. 8. 1921.

1. Cinématique théor.

Déplacements. Mouvement d'un point. Mouvement d'un corps solide. Composition des mouvements et mouvement relatif. Étude complém. du mouvement d'un solide.

2. Mécanismes.

Engrenages et courbes roulantes. Cames et excentriques. Systèmes articulés.

Librairie Delagrave.

Paris.

Bouasse, H., Dynamique générale. (Bibliothèque scientif. de l'ingénieur et du physicien.) — XXIII + 324 pp. 8. 1923.

Moments d'inertie. Principes et théorèmes gén. Dynamique du point. Accélération axipète. Balistique intér. Balistique extér. Corps tournant autour d'un axe. Équilibre dynamique des locomotives. Percussions. Questions div. à propos des percussions. Sur les forces d'inertie et la définition de la masse. Expér. sur la chute des corps. Emploi du courant alternatif.

Gustave Doin.

Paris.

Moreux, Th., La science mystérieuse des Pharaons. Avec fig. dans le texte et 8 planches hors texte. — 238 pp. 8. 1923.

Le secret du Sphinx. Révélations numér. de la grande pyramide. Révélations géodés. de la grande pyramide. Révélations astronom. de la grande pyramide. A trav. la science antique. L'optique des anciens. A la lueur des étoiles. Traditions philosoph. et histor. Science et cosmogonie.

Art. Institut Orell Füssli.

Zürich.

Benedicks, Carl, Raum und Zeit. Eines Experimentalphysikers Auffassung von diesen Begriffen und von deren Umänderung. — 52 pp. 8. 1923.

Gauthier-Villars.

Paris.

Appell, P., Éléments d'analyse mathématique à l'usage des candidats au certificat de mathématiques générales, des ingénieurs et des physiciens. Cours professé à l'École centrale des arts et manufactures. 4e éd., entièrement refondue. — X + 715 pp. 8. 1921.

Introd. Infiniment petits. Différentielles. Fonctions primit. Intégrales indéfinies. Intégr. définies simples. Applic. à la mesure des aires planes. Volume d'un solide à bases parallèles. Moments d'inertie et centres de gravité d'aires et de volumes homogènes. Rectification des courbes. Aires des sur-

faces de révol. et des surf. coniques. Développement d'une fonction en série de puissances entières et positives de la variable. Quelques méthodes d'intégration. Développement d'une fonction en série trigonométr. Intégrales définies dont l'élément différ. devient infini, ou dont une limite est infinie. Tangente à une courbe plane. Maximum et minimum d'une fonction d'une variable. Enveloppes. Courbure d'une courbe plane. Courbes gauches. Tangente. Plan osculateur. Courbure et torsion. Fonctions de deux variables. Plan tangent à une surface. Maxima et minima. Enveloppes. Courbure. Lignes particulières tracées sur une surface. Différentiation sous le signe $\int$. Intégration des différentielles totales. Intégrales prises le long d'une courbe. Intégrales doubles et triples. Applications. Formules fondam. de l'analyse vectorielle. Intégrales de volumes, de surfaces et de lignes. Définition gén. d'une intégrale définie. Équations différ. du premier ordre. Équations différ. du deuxième ordre et d'ordre supér. Équations différ. linéaires. Systèmes d'équations différ. simultanées à une variable indép. Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles. Équations du premier ordre. Valeur numér. d'une intégrale définie. Méthodes d'approximation. Intégrateurs et intégraphes.

Appell, P., Traité de mécanique rationnelle. (Cours de mécanique de la Faculté des sciences.) 4e éd., entièrement refondue. T. 1. Statique. Dynamique du point. — VIII + 619 pp. 8. 1919.

1. Notions prélim.

Théorie des vecteurs. Cinématique. Princ. de la mécan.: masses, forces. Travail; fonction de forces.

2. Statique.

Équilibre d'un point; équilibre d'un système. Équilibre d'un solide. Systèmes déformables. Principe des vitesses virtuelles. Notions sur le frottement.

3. Dynamique du point.

Généralités. Mouvement rectiligne. Mouvement des projectiles. Forces centr. Mouvement ellipt. des planètes. Mouvement d'un point sur une courbe fixe ou mobile. Mouvement d'un point sur une surface fixe ou mobile. Équations de Lagrange pour un point libre. Principe de d'Alembert; principe de la moindre action. Équations canon. Théorème de Jacobi. Applications.

—»—, Traité de mécanique rationnelle. 3e éd., entièrement refondue. T. 3. Équilibre et mouvement des milieux continus. (Cours de mécanique de la Faculté des sciences.) — VII + 660 pp. 8. 1921.

Intégrales de volumes, de surfaces et de lignes. Attraction et potentiel. Équilibre et mouvement intér. d'une masse continue. Hydrostatique. Déformation d'un milieu continu; propriétés géométr. Cinématique des milieux continus. Dynamique des fluides parfaits; théorèmes gén. Théorie des tourbillons. Mouve-

ments parallèles à un plan fixe. Fluides baroclines. Notions sur la théorie de l'élasticité. Équations du mouvement d'un fluide visqueux.

Appell, P., Traité de mécanique rationnelle. T. 4. Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation sous l'attraction Newtonienne de ses particules. Leçons publ. avec le concours de M. Veronnet. (Cours de mécanique de la Faculté des sciences.) — VI+297 pp. 8. 1921.

Problème. Indications histor. Attraction et potentiel. Ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi. Fonctions div. Calculs et résultats prélim. Fonctions sphér. Fonctions de Lamé. Figures d'équilibre voisines des ellipsoïdes. Étude de la stabilité des figures d'équilibre.

Appell, P., & Chappuis, J., Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de mathématiques *A* et *B*. Conformes aux programmes de 1905. Nouv. éd., entièrement refondue. — IX+416 pp. 8. 1923.

Notions géométr.; vecteurs; projections; moments. Cinématique. Dynamique et statique. Forces appliquées à un point matériel. Forces appliquées à un corps solide. Équilibre des corps solides non libres. Machines simples. Travail dans les machines.

Appell, P., & Dautheville, S., Precis de mécanique rationnelle. Introduction à l'étude de la physique et de la mécanique appliquée à l'usage des candidats aux certificats de licence et des élèves des écoles techniques supérieures. 3e éd., revue et augm. — [8]+741 pp. 8. 1924 [1923].

1. Notions prélim.

Vecteurs. Cinématique. Princ. de la mécan.: masse, force, travail.

2. Statique.

Équilibre d'un point; équilibre d'un système. Équilibre d'un corps solide. Systèmes déformables. Notions de statique graph. Notions de résistance des matériaux.

3. Dynamique.

Dynamique du point. Moments d'inertie. Dynamique des systèmes. Théorèmes gén. Les sept équations univ. du mouvement. Mouvement d'un corps solide. Notions sur le frottement. Percussions. Principe des travaux virtuels. Principe de d'Alembert. Équations de Lagrange. Percussions. Théorème de Carnot. Attraction. Potentiel. Équilibre et mouvement intér. d'un fluide parfait. Mouvement des fluides parfaits. Hydrodynamique. Exercices.

Appell, P., & Lacour, E., Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. 2e éd., revue et augm. Avec le concours de R. Garnier. — XIV+503 pp. 8. 1922.

Notions prélim. Généralités sur les fonctions ellipt. Étude des valeurs réelles de $\wp u$ lorsque ω est réel et ω' purement imaginaire. Applications. Étude spéc. des notations de Jacobi. Étude des valeurs réelles de $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$, quand K et K' sont réels. Applications. Fonction $\wp$ à périodes imaginaires conjuguées. Discriminant négatif. Intégrales ellipt. Réduction à la forme normale de Legendre et de Jacobi. Inversion. Réduction à la forme normale de Weierstrass. Inversion. Applications div. traitées avec la notation de Weierstrass. Transformation de Landen. Fonctions à multiplicateurs constants ou fonctions doublement périod. de seconde espèce. Fonctions à multiplicateurs exponentiels ou fonctions doublement périod. de troisième espèce. Notions sur les fonctions modulaires. Notes.

Arrhenius, S., Conférences sur quelques problèmes actuels de la chimie physique et cosmique faites à l'Université de Paris en avril et mai 1922. — VI + 121 pp. 8. 1923.

Le troisième principe. La dissociation des électrolytes forts. Les théories de Bjerrum et de Ghosh. Sources mondiales de l'énergie. Développement des corps célestes.

Julia, Gaston, Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé professées au Collège de France. Réd. par P. Flamant. (Collection de monogr. sur la théorie des fonctions publ. sous la dir. de Émile Borel.) — VII + 149 pp. 8. 1924.

Préliminaires. Théorèmes de M. Picard et généralisations, obtenus par application directe de la fonction modulaire. Familles norm. de fonctions. Allure d'une fonction autour d'un point singulier essentiel isolé. Approximation continue régulière du point singulier essentiel. Approximation discontinue régulière du point singulier essentiel. Approximation discontinue irrégulière du point singulier essentiel.

Lefschetz, S., L'analysis situs et la géométrie algébrique. (Coll. de monogr. sur la théorie des fonctions publ. sous la dir. de É. Borel.) — VI + 154 pp. 8. 1924.

Propriétés gén. des variétés analyt. Surfaces algébr. Étude approfondie des cycles d'une courbe variable dans un faisceau linéaire. Topologie des surf. algébr. L'analysis situs et les systèmes de courbes d'une surface algébr. Variétés algébr. à plus de deux dimensions. L'analysis situs et les fonctions abéliennes. Intégrales doubles de 2^e^ espèce et intégrales simples de 3^e^ espèce des surfaces algébr.

NIELSEN, NIELS, Traité des nombres de Bernoulli. — X + 398 pp. 8. 1923.

Théorèmes et formules auxiliaires. Du calcul aux différences finies. Suites harmoniques. Fonctions de Bernoulli et d'Euler. Polynomes symétr. Suites régulières. Fonctions $B_n(px)$ et $E_n(px)$. Methode de J. Bernoulli. Formules incompl. de première espèce. Formules incompl. de seconde espèce. D'autres formules incompl. Expressions explicites. Nature des nombres de Bernoulli. Congruences de Kummer. Applications de polynomes symétr. Sommes des puissances. Coefficients de factorielle. Formules récursives des B_n. Quotients de Fermat. Résidus quadratiques.

OCAGNE, M. DE, Notions sommaires de géométrie projective à l'usage des candidats à l'École Polytechnique. — 25 pp. 8. 1924.

Ponctuelles et faisceaux homographiques. Application à l'étude des coniques et quadriques.

VERRIEST, GUSTAVE, Cours de mathématiques générales à l'usage des étudiants en sciences naturelles. P. 1. Calcul différentiel. Géométrie analytique à deux dimensions. — [4] + 337 pp. 8. 1923.

Limites. Logarithmes. Fonctions. Princ. de géom. analyt. Prem. notions de calcul diff. Dérivée et différentielle des fonctions explicites d'une seule variable. Applic. des dérivées. Nouv. interprétations de la dérivée et de la différentielle. Propriétés de la dérivée. Dérivées et différentielles successives. Formule de Taylor. Formule de Maclaurin. Vraie valeur des expressions indéterminées. Maxima et minima d'une fonction. Étude des fonctions et construction des courbes. Fonctions de plusieurs variables. Fonctions composées d'une seule variable. La différentielle totale. Dérivées partielles successives. Fonctions d'un nombre quelconque de variables. Différentiation des équations. Différentiation des fonctions implicites. Utilité de la différentielle. Applic. géométr. du calcul différ. Sections coniques. Coordonnées polaires.

Hugo Gebers Förlag.

Stockholm.

Vetenskapen och livet. — 1923. Årg. VIII. Pris Kr. 1,50. No. 9. Sept.

V. L., Håller solen på att slockna? V. L., Vetenskapens klassiker: Otto v. Guericke. O. V. GUERICKE, Om tomrummet.

No. 10. Okt.

E. BELOT, Utan solen skulle jorden snart gå under. J. BOYER, Ett nytt spektroskop för att bestämma färger.

No. 11. Nov.

Bourgeois, A., Praktisk användning av luftelektriciteten. Beauvais, A., Kvicksilverbågen likriktar växelström.

No. 12. Dec.

E. Thall, Vulkanutbrott och stora jordskalv. H. Egnér, Från Nobelpristagarnas arbetsfält.

1924. Årg. IX. No. 1. Jan.

R. Brocard, Avståndsverkan och vågformig energiöverföring. V. L., En god mottagare för att åhöra de större europeiska radiostationerna. V. L., Vid sidan av vetenskapen. (Uppfinningar och upptäckter.)

No. 2. Febr.

Fournier, L., Radiokinematografiens problem är teoretiskt löst. — V. L., Man uppmäter havsbottnen m. ultraljudvågor. — Brocard, R., Avståndsverkan o. vågformig energiöverföring. — V. L., Är åskan farlig för radioantennerna?

Jul. Gjellerups Forlag.

Köbenhavn.

Crone, C., Matematisk Forening gennem 50 Aar. Udg. i Anledning af Matematisk Forenings 50 Aars Jubilæum. — 91 pp. 8. 1923.

Jensen, H., & Smith, O. A., Mekanik for Realskoler og Seminarier. — 61 pp. 8. 1924.

W. de Gruyter.

Berlin & Leipzig.

A. L. Crelle's Rechentafeln welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausg. besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. — VII + [501] pp. Fol. 1923.

Doehlemann, K., Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. 2. Polar- und Brennpunkts-Eigenschaften der Kegelschnitte. Imaginäre Elemente. Die Regelflächen 2. Ordn. 5. Aufl. Mit 55 Fig. (Samml. Göschen. 876.) — 138 pp. 8. 1924.

Die Kegelschnitte, ihre Formen; Polarentheorie. Die Involution auf d. Kegelschnitt. Imaginäre Elemente. Brennpunkte u. Brennpunktseigenschaften d. Kegelschnitte. Die Schnittpunkte u. gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte. Das Kegelschnittbüschel u. d. Kegelschnittschar. Kegel- u. Regelflächen 2. Ordn. als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde.

Foerster, Emil, Politische Arithmetik (Zinseszinsen-, Renten- und Anleiherechnung. Mit 7 Fig. (Samml. Göschen. 879.) — 155 pp. 8. 1924.

Einfacher Zins. Zinseszins. Einzelkapitalien. Renten. Vorschüssige Zinsen. Schuldtilgung. Kurs u. Rentabilitättabellen.

Freyberger, H., Zentral-Perspektive. Neubearb. von J. Vonderlinn. 2., verb. Aufl. Mit 132 Fig. (Samml. Göschen. 57.) — 148 pp. 8. 1923.

Gesch. u. Zweck d. Perspektive. Zeichnen nach d. Natur. Perspektiv. Konstruktionen mit Benutzung v. Grund- u. Aufriss. Freie Perspektive. Vermischte Aufgaben. Perspektiv. Konstruktionen ganz allgem. Art. Schattenperspektive. Spiegelperspektive. Luftperspektive.

Knopf, O., Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1—2. (Samml. Göschen. 508, 871.) — 112, 112 pp. 8. 1923.

1. Grundlagen. Anwend. d. Formeln d. Komplexionslehre auf Berechn. d. Wahrscheinlichk. Wahrsch. eines Ereignisses, abgel. aus d. Warsch. v. Einzelereign. Anwend. d. Sätze v. d. vollständ. u. d. zusammengesetzten Warsch. Anwend. d. Differenzenrechn. auf Warsch.-Berechn. Anwend. d. Erzeugenden Funktion auf Warsch.-Berechn.

2. Geometr. Warsch. Warsch. bei weit ausgedehnter Versuchsreihe. Warsch. einer Ursache auf Grund d. Erfahrung. Mathemat. Erwartung. Moral. Wert u. moral. Erwartung. Warsch. auf Grund statist. Erhebungen.

Knopp, K., Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. T. 1. Aufgaben z. elementaren Funktionentheorie. (Samml. Göschen. 877.) — 135 pp. 8. 1923.

Grundlegende Begriffe. Zahlenfolgen u. unendl. Reihen. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Integralsätze. Reihenentwicklungen. Konforme Abbildungen.

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Bd. 5. 2., verb. u. sehr verm. Aufl. — [4] + 185 pp. 8. 1923.

1. Ebene Trigonometrie. 2. Sphärik u. sphärische Trigonometrie.

Geschichte der Mathematik. Neue Bearb. von H. Wieleitner. 2. Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrh. (Samml. Göschen. 875.) — 154 pp. 8. 1923.

1. 18. Jahrh. — 2. Erste Hälfte d. 19. Jahrh.

Gyldendalske bokhandel.

Kristiania.

Störmer, C., Fra verdensrummets dybder til atomernes indre. — 152 s. 8. 1923.

Kjæmpeteleskoperne paa Mount Wilson. Maaling av kjæmpestjerner. Opmaaling av en umaadelig fjern stjerneverden. Naturkræfterne i verdensrummet. Kathodestraalerne fra solen og nordlyset. Birkelands eksperimenter. Lösningen av nordlysproblemet. Fotograf. bestemmelse av nordlysets höide ov. jorden. Molekyler og atomer. Röntgenstraalerne. Vidunderstoffet radium. Hvor gammel er jorden? Atomernes indre. Eftersvingningerne. Avslutning.

A. Heflich i St. Michalski.

Warszawa.

Poradnik dla samouków. T. 4. Krystalografja wskazówski metodyczne dla studjujących.

1. Kreutz, S., Krystalografja. — 2. Zaremba, S., Rola przekształaceń punktowych przestrzeni w krystalografji.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Hannover.

Müller, C. H., & Prange, G., Allgemeine Mechanik. Grundlegende Ansätze und elementare Methoden der Mechanik des Punktes und der Punktsysteme. Eine Einführung für Studierende der Natur- und Ingenieur-Wissenschaften. — X+551 pp. 8. 1923.

Einleitung. Kinemat. Grundbegriffe. Die Newtonschen Axiome u. d. Grundgleichungen f. d. Bewegung eines Massenpunktes. Die geführte Bewegung eines Massenpunktes u. d. Relativbewegung. Grundlagen f. d. Mechanik d. Massenpunktsysteme. Ansatz d. Bewegungsgleichungen u. Durchführung v. Beispielen. Integration d. Bewegungsgleichungen v. Massenpunktsystemen. Das Vielkörperproblem u. d. starre Körper. Die Differentialprinzipien d. Mechanik.

Hendersons.

London.

Soddy, F., The inversion of science and a scheme of scientific reformation. — 50 pp. 8. 1924.

Librairie scient. J. Hermann.

Paris.

Borel, É., Éléments de la théorie des probabilités. (Cours de la Faculté des sciences de Paris.) 3e éd., revue et augm. — VII+226 pp. 8. 1924.

1. Probabilités discontinues.

Le jeu de pile ou face. Quelques définitions et quelques théorèmes. Formules d'approximation. Étude approfondie du jeu de pile ou face. Lois des grands nombres et loi des écarts.

2. Probabilités continues.

Définition de la probabilité géométr. Quelques probl. de probabilités géométr. Introd. des fonctions arbitr. Erreurs d'observation. Loi de Gauss.

3. Probabilités des causes.

Cas des probabilités discontinues. Problèmes statist. Cas des probabilités continues. Détermination des causes.

Aug. Hirschwald.

Berlin.

Rubens, Heinr., Die Entwicklung der Atomistik. Festrede gehalten am Stiftungstage der Kaiser Wilhelms-Akademie für das militärärztliche Bildungswesen, 2. Dezember 1912. — 40 pp. 8. 1913.

S. Hirzel.

Leipzig.

Lenard, P., Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation. 3. Aufl. mit einem Zusatz, betreffend die Nauheimer Diskussion. — 44 pp. 8. 1921.

Kegan Paul, Trench, Trubner & Co.

London.

Hopkins, M., Chance and error. The theory of evolution. — VII+223 pp. 8. 1923.

Propositions. Games whose expectation is 0. Direct observations. Indirect observations. Statistics. Target practice. Errors in three dimensions. Monte Carlo. Variable chances. Sorts. Miscellaneous.

M. Lecat.

Louvain.

Lecat, M., Bibliographie des déterminants à plus de deux dimensions. (Bibliogr. de la relativité. Appendice, Note 1.) — 16 pp. 8. 1924.

University Press.

Liverpool.

The Rhind mathematical papyrus, British museum 10057 and 10058. Introd., transcription, transl. and commentary by T. Eric Peet. — [4] + 136 pp., Plate A—Y. 1923. Fol.

Macmillan & Co.

London.

Bryan, G. H., Mathematical tables. — 27 pp. 8. 1922.

Loney, S. L., The elements of coordinate geometry. P. 2. Trilinear coordinates, etc. — 228 pp. 8. 1923.

Cross-ratios. Trilinear coordinates. Equations of the second degree. Miscell. theorems. Tangential coordinates. Recipr. polars. Projection. Invariants.

Muir, Thomas, The theory of determinants in the historical order of development. Vol. 4. The period 1880 to 1900. — XXXI + 508 pp. 8. 1923.

Determinants in general, 1880—1900. Text-books 1880—1900. Determinants and linear equations, 1880—98. Axisymmetric determinants, 1880—97. Symmetric determinants that are not axisymmetric, 1884—97. Alternants, 1880—99. Compound determinants, 1880—1900. Recurrents, 1880—98. Wronskians, 1880—99. Jacobians, 1880—99. Skew determinants and Pfaffians, 1880—99. Orthogonants and latent roots, 1880—99. Persymmetric determinants, 1881—99. Bigradients, 1877—99. Hessians, 1880—97. Circulants, 1880—99. Continuants, 1881—99. Multilineants, 1883—95. *N*-dimensional determinants, 1880—1900. Bordered determinants, up to 1900. Determinants having invariant factors, 1851—1900. The less common special forms, 1880—99.

NERNST, W., Theoretical chemistry from the standpoint of Avogadro's rule and thermodynamics. Rev. in accordance with the 8th—10th German ed. by L. W. CODD. — XX + 922 pp. 8. 1923.

Introd. to some fundamental principles of modern investigation. Gen. properties of matter. Atom and molecule. Transformation of matter (the doctrine of affinity, 1). Transformation of energy (the doctrine of affinity, 2).

SOUTHALL, J. P. C., Mirrors, prisms and linses. A text-book of geometrical optics. Enlarged and rev. ed. — XIX + 657 pp. 8. 1923.

Lights and shadows. Reflection of light. Plane mirrors. Refraction of light. Refraction at a plane surface and also through a plate with plane parallel faces. Refraction through a prism. Reflection and refraction of paraxial rays at a spher. surface. Refraction of paraxial rays through an infinitely thin lens. Change of curvature of the wave-front in reflection and refraction. Dioptry system. Astigmatic lenses. Geometr. theory of the symmetr. optical instrument. Compound systems. Thick lenses and combinations of lenses and mirrors. Aperture and field of optical system. Optical system of the eye. Magnifying power of opt. instruments. Dispersion and achromatism. Rays of finite slope. Spher. aberration, astigmatism of oblique bundles, etc. Appendix: Miscellaneous notes and additions.

Mathematical association of America, inc.

The reorganization of mathematics in secondary education. A report by the national committee on mathematical requirements under the auspices of the Mathematical association of America, inc. — XI + 652 pp., 6 appendices. 8. 1923.

P. 1. General principles and recommendations. P. 2. Investigations conducted for the committee.

Verlag des mathemat. Seminars der Hamburgischen Universität.

Hamburg.

HJELMSLEV, J., Die natürliche Geometrie. (Hamburger mathemat. Einzelschriften. H. 1.) — 36 pp. 8. 1923.

Metzlersche Buchhandlung.

Stuttgart.

Hammer, E., Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Gebrauch beim Selbstunterricht und in Schulen, besonders als Vorbereitung auf Geodäsie und sphärische Astronomie. 5., durchges. u. erweit. Aufl. — XIX + 679 pp. 8. 1923.

Goniometrie nebst Teilen der ebenen Trigonometrie. Trigonometrie u. Polygonometrie d. Ebene. Sphär. Trigonometrie.

Milford, Oxford University Press.

London.

Hadamard, J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. — X + 316 pp. 8. 1923. 15 sh.

Gen. properties of Cauchy's problem. The fundamental formula and the elementary solution. Equations with an odd number of indep. variables. Equations with an even number of indep. variables and the method of descent.

Natur och Kultur.

Stockholm.

Rendahl, C., & Söderborg, B., Populär astronomi. 2:a uppl. (Natur o. Kultur. 2.) — 150 pp. 8. 1923. Inb. 3: —.

Himlakropparnas skenb. lägen o. rör. Den histor. utveckl. av kunsk. om himmelsföreteelserna. Tideräkn. Jorden. Månen. Solen. Mån- o. solförmörkelser. Planeterna. Kometer o. meteorer. Fixstjärnor o. nebulosor.

Starck, G., Materiens struktur. Några kapitel ur en ny vetenskap. Atomfysiken. — 168 pp. 8. 1921.

Tallqvist, Hj., Energi och entropi. (Natur o. Kultur. 21.) — 160 pp. 8. 1923. Inb. 3: —.

P. Noordhoff.

Groningen.

Weitzenböck, Roland, Invariantentheorie. [87] + 408 pp. 8. 1923.

Allgemeines. Binäre u. ternäre Formen. Quaternäre Formen, Komplexe. Fundamentalsätze. Reihenentwicklung. Endlichkeitssätze. Der Invarianten-

körper. Äquivalenz. Diff.-Gleichungen f. Invarianten. Affine Invarianten. Orthogonale Invarianten. Vektor- u. Tensoralgebra. Bewegungsinvarianten. Invarianten v. Differentialformen. Integralinvarianten v. Differentialformen.

University of North Carolina Press.

Henderson, A., Relativity. A romance of science. (Univ. of N. Carolina extension bulletin. Vol. 2. No. 11.) — 65 pp. 8 1923.

Introd. The world we live in. The special theory. The gen. theory.

R. Oldenburg.

Berlin & München.

Lorenz, Hans, Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik. Für den Schulgebrauch und zum Selbstunterricht. Mit 126 Abbild. 2., verb. Aufl. — V + 176 pp. 8. 1923.

Analyt. Geometrie. Differ.- u. Integralrechnung. Elemente d. Mechanik.

Holger Schildt.

Hälsingfors.

Heckscher, E. F., Nyordningen av Finlands penningväsende. — 118 pp. 8. 1923.

Nyordningens grundvalar. Nyordningens genomförande. Efterskrift.

O. Haering.

Berlin.

Archimedes' Werke. Mit modernen Bezeichnungen hrsg. und mit einer Einleitung versehen von Sir Thomas L. Heath. Deutsch von F. Kliem. XII + 477 pp. 8. 1914.

Biographisches. Handschriften. Beziehung zu seinen Vorgängern. Arithmetik bei Archimedes. Über die als *νευσεις* bekannten Problems. Kubische Gleichungen. Antizipationen d. Integralrechnung. Archimedes Werke.

3—2454. *Acta mathematica.* 45. Imprimé le 4 août 1924.

Julius Springer.

Berlin.

Ahrens, W., Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik. Mit 51 Textfig. — IV + 206 pp. 8. 1918.

Ein Anordnungsproblem. Die numerierten 9 Kugel. Einige Teilungsaufgaben. Verschied. Möglichk., ein Geldstück zu wechseln. Ein chines.-japan. Ratspiel. Das Erraten gedachter Zahlen. Erraten d. Verteilung v. mehr. Gegenständen unter eine entsprech. Anzahl v. Personen. Mathemat. Scherze, Paradoxa, Curiosa etc. etc.

Auerbach, F., Entwicklungsgeschichte der modernen Physik. Zugleich eine Übersicht ihrer Tatsachen, Gesetze und Theorien. — VIII + 344 pp. 8. 1923.

Allgem. Teil. Allgem. u. Historisches. Methode u. Gegenstand d. Physik. Raum u. Zeit, Stoff, Kraft u. Energie. Thermodynamik. Konstitution d. Materie. Bewegung, insbes. Schwingungsbewegung. Wellenbewegung. Fernwirkung u. Feldtheorie. Leitung. Strahlung. Strahlungsgesetze. Spektrum u. Materie. Zustandslehre. Relativitätstheorie.

Spez. Teil. Starre Körper. Elastisch-feste Körper. Flüssigkeiten u. Gase. Schall. Wärme. Elektrizität u. Magnetismus. Licht.

Schlussbetrachtung. Auswahl wicht. Fortschritte, ihrer Urheber u. ihrer Jahreszahlen. Auswahl hervorragender verstorbener Physiker mit Geburts- u. Todesjahr.

Beck, Hans, Koordinatengeometrie. Bd 1. Die Ebene. Mit 47 Textabb. — X + 432 pp. 8. 1919.

Berger, Alfred, Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik. T. 1. Die Versicherung der normalen Risiken. — VII + 244 pp. 8. 1923.

Einleitung. Grundlegendes aus d. Versicherungsmathematik. Berechn. d. Tarifprämien. Berechn. d. Deckungskapitals. Ermittl. u. Verteilung d. Gewinnes. Berechn. d. Versicherungswerte bei vorzeitiger Vertragslösung.

Born, M., Der Aufbau der Materie. Drei Aufsätze über moderne Atomistik u. Elektronentheorie. 2., verb. Aufl. Mit 37 Textabb. — VI + 86 pp. 8. 1922.

Das Atom. Vom mechan. Äther zur elektr. Materie. Die Brücke zwischen Chemie u. Physik.

Bortkiewicz, L. v., Die Iterationen. Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie. — X + 206 pp. 8. 1917.

Syntagmatik. Grundsätzliches aus d. Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Stochastik d. Iterationen. Komplikationen. Beispiele. Kritik.

Bortkiewicz, L. v., Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen. 5 Textfig. — 85+2 pp. 8. 1913.

Clerke, A. M., Geschichte der Astronomie während des neunzehnten Jahrhunderts. Autorisierte deutsche Ausg. von H. Maser. XV+540 pp. 8. 1889.

Egerer, Heinz, Ingenieur-Mathematik. Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Bd 1. Mit 320 Textabb. und 575 vollst. gelösten Beispielen und Aufgaben. — VIII+503 pp. 8. 1913, Manuldruck 1923.

Niedere Algebra u. Analysis. Lineare Gebilde d. Ebene u. d. Raumes in analyt. u. vektorieller Behandl. Kugelschnitte.

—»—, Bd 2. Mit 477 Textabb. u. über 1000 vollst. gelösten Beispielen u. Aufgaben. — X+713 pp. 8. 1922.

Differ. u. Integralrechnung. Reihen u. Gleichungen. Kurvendiskussion. Elemente d. Diff.-Gleichungen. Elemente d. Theorie d. Flächen u. Raumkurven. Maxima u. Minima.

Einstein, A., Äther und Relativitätstheorie. Rede gehalten am 5. Mai 1920 an der Reichsuniversität zu Leiden. — 15 pp. 8. 1920.

—»—, Geometrie und Erfahrung. Erweit. Fassung des Festvortrages gehalten an der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Januar 1921. Mit 2 Textabb. — 20 pp. 8. 1921.

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Herausg. von der Schriftleitung der »Naturwissenschaften». Bd. 1. 35 Abbildungen. 403 pp. 8. 1922.

R. Prager: Astronomie. — H. Thirring: Relativitätstheorie. — P. Hertz: Statistische Mechanik. — R. Grammel: Kritische Zustände rasch umlaufender Wellen. — A. Eucken: Der Nernstsche Wärmesatz. — F. Henning: Wärmestrahlung. — A. Coehn: Kontaktpotential. — M. Bodenstein: Chem. Kinetik. — M. Bodenstein: Photochemie. — F. Auerbach: Elektrolyt. Dissoziation. — M. v. Laue: Röntgenstrahlenspektroskopie. — A. Johnsen: Kristallstruktur. — G. Wentzel: Atom- und Spektraltheorie. — A. Kratzer: Bandenspektren. — P. Pringsheim: Lichtelektr. Wirkung u. Photolumineszenz. — F. Paneth: Period. System d. chem. Elemente.

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Hrsg. von der Schriftleitung der »Naturwissenschaften». Bd. 2. — 252 pp. 8. 1923.

J. Hopmann: Beweg. d. Fixsterne. — G. Schnauder: Entw. u. Stand d. Parallaxenforschung. — A. Kopff: Das Milchstrassensystem. — B. Wanach: Die Polhöhenschwankungen. — F. Henning: Erzeugung u. Messung tiefer Tem-

peraturen. — J. FRANCK: Neuere Erfahr. üb. quantenhaften Energieaustausch bei Zusammenstössen v. Atomen u. Molekülen. — W. GERLACH: Magnetismus u. Atombau. — A. LANDÉ: Fortschritte bei Zeemaneffekt. — F. PANETH: Üb. d. Element 72 (Hafnium). — G. MASING & M. POLANYI: Kaltreckung u. Verfestigung.

EWALD, P. P., Kristalle und Röntgenstrahlen. Mit 189 Abb. (Naturwissenschaftl. Monogr. u. Lehrbücher. Bd 6.) — IX + 327 pp. 8. 1923.

Von d. Atomtheorie. Kristallograph. Grundbegriffe. Kristallograph. Strukturtheorie. Interferenz. Röntgenstrahlen. Übersicht üb. d. experim. Verfahren. Braggsches Verfahren; Spektroskopie. Interferenz in Gittern mit Basis; Strukturermittl. aus Braggschen Aufnahmen. Die Lauemethode u. d. Bezifferung d. Lauebilder. Entsteh. d. Lauebilder u. d. Strukturkontrolle mit ihnen. Das Debye-Scherrer-Verfahren. Vollständ. Diagramme, Faserstruktur, Metallbau. Darstellung d. erforschten Strukturen. Gittergeometrie. Ionengitter; Isomorphie; Mischkristalle. Chem. Gesichtspunkte z. Deutung d. Kristallstrukturen. Gitterkräfte u. stoffl. Eigenschaften. Noten.

FREUNDLICH, E., Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. Mit einem Vorwort von Alb. Einstein. 4., erweit. u. verb. Aufl. — 96 pp. 8. 1920.

Einl. Die spez. Rel.-Theorie als Vorstufe zu d. allgem. Rel.-Theorie. Zwei Forderungen prinzip. Natur bei d. mathemat. Formulierung d. Naturgesetze. Zur Erfüllung d. beiden Forderungen. Prinzip. Schwierigk. d. klass. Mechanik. Die Einsteinsche Gravitationstheorie. Prüfung d. neuen Theorie durch d. Erfahrung.

FUNK, P., Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Mit 24 Textabb. — VII + 84 pp. 8. 1920.

Rechnerische Behandl. d. Diff.-Gleichungen. Graph. Behandl. d. Diff.-Gleichungen. Herleitung v. Diff.-Gleichungen in d. Baumechanik.

GAUSS, C. F., Untersuchungen über höhere Arithmetik. Deutsch von H. MASER. 1889. XIII + 695 pp.

Übersetzung von Gauss' Disquisitiones arithmeticae und einiger daran anschliessender Abhandlungen und Nachlasstücke von Gauss.

—»—, Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\gamma(\gamma+1)\gamma+2)}x^3+\text{u. s. w.}$$

Mit Einschluss der nachgelassenen Forts. aus dem Lateinischen übers. von H. SIMON. — VII + 86 pp. 8. 1888.

Einl. Bezieh. zwischen benachb. Functionen. Kettenbrüche. Von d. Summe d. Reihe, wenn man das vierte Element=1 setzt, wobei zugleich einige and. transcendente Functionen abgehandelt werden. Bestimmung unserer Reihe durch eine Diff.-Gleichung 2. Ordn.

Grammel, R., Die mechanischen Beweise für die Bewegung der Erde. Mit 25 Textabb. — [4]+71 pp. 8. 1922.

Einleitung. Versuche auf Grund d. Schwerpunktsatzes. Versuche auf Grund des Flächensatzes. Versuche auf Grund des Schwungsatzes. Schlussbemerkungen.

Grimsehl, E., Die elektrische Glühlampe im Dienste des physikalischen Unterrichts. (Abhandl. z. Didaktik u. Philos. d. Naturwiss. Bd 1. H. 1.) — 60 pp. 4. 1904.

—»—, Experimentelle Einführung der elektromagnetischen Einheiten. (Abhandl. z. Didaktik u. Philos. d. Naturwiss. Bd 2. H. 2.) — 41 pp. 4. 1907.

Helmholtz, Herm. v., Schriften zur Erkenntnistheorie. Herausg. u. erl. von Paul Hertz und Mor. Schlick. — X+175 pp. 8. 1921.

Urspr. u. Bedeut. d. geometr. Axiome. Üb. d. Tatsachen, die d. Geometrie zugrunde liegen. Zählen u. Messen. Die Tatsachen in d. Wahrnehmung.

Hurwitz, A., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Herausg. und ergänzt durch einen Abschnitt über geometrische Funktionentheorie von R. Courant. (Die Grundlehren d. mathemat. Wissenschaften. Herausg. von R. Courant. Bd 3.) — XI+399 pp. 8. 1922.

Allgem. Theorie d. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Ellipt. Funktionen. Geometr. Funktionentheorie.

Höfler, A., Zur gegenwärtigen Naturphilosophie. (Abhandl. z. Didaktik und Philos. d. Naturwiss. Bd 1. H. 2.) — 136 pp. 4. 1904.

Horvath, C. v., Raum und Zeit im Lichte der speziellen Relativitätstheorie. Versuch eines synthetischen Aufbaus der speziellen Relativitätstheorie. Mit 8 Textabb. und einem Bildnis. — 58 pp. 8. 1921.

Jacobsthal, W., Mondphasen, Osterrechnung und Ewiger Kalender. — VIII+116 pp. 8. 1917.

Kongruenzen u. Reste. Berechn. d. Wochentages f. ein belieb. gegeb. Datum. Epakten f. d. 20 Jahrh. Epaktenrechn. f. alle Jahrhunderte. Zykl. u. mittl. Mond. Fehlerabschätzung. »Mittl.» Epakte. Ableitung einer Osterformel. Ausnahmefälle. Umkehrung d. Aufgabe: in welchen Jahren eines Jahrh. fällt Ostern auf ein gegeb. Datum? Ostertabelle.

Johannesson, P., Physikalische Mechanik. Mit 37 Fig. auf 2 lithogr. Tafeln. — 58 pp. 8. 1900.

Keferstein, H., Strahlengang u. Vergrösserung in optischen Instrumenten. Eine Einführung in die neueren optischen Theorien. (Abhandl. z. Didaktik u. Philos. d. Naturwiss. Bd 1. H. 5.) — 42 pp. 4. 1905.

Kerékjártó, B. v., Vorlesungen über Topologie. 1. Flächentopologie. Mit 60 Textfig. (Die Grundlehren d. mathemat. Wiss. Hrsg. v. R. Courant. Bd 8.) — VIII + 270 pp. 8. 1923.

Topologie d. Ebene: Punktmengen. Kurven. Gebiete.

Topologie d. Flächen: Polyederflächen. Offene Flächen. Abbild. v. Flächen. Kurvenscharen auf Flächen.

Klein, Felix, Gesammelte mathematische Abhandlungen.

Bd. 1. Liniengeometrie, Grundlegung d. Geometrie, Zum Erlanger Programm. Hrsg. von R. Fricke u. A. Ostrowski. — XII + 612 pp. 8. 1921.
Bd. 2. Anschauliche Geometrie. Substitutionsgruppen u. Gleichungstheorie. Zur mathemat. Physik. Hrsg. von R. Fricke u. H. Vermeil. — VI + 713 pp. 8. 1922.
Bd 3. Ellipt. Funktionen, insbes. Modulfunktionen, hyperellipt. u. Abelsche Funktionen, Riemannsche Funktionentheorie u. automorphe Funktionen. Hrsg. von R. Fricke, H. Vermeil u. E. Bessel-Hagen. — IX + 774 + 36 pp. 8. 1923.

Kossel, W., Valenzkräfte und Röntgenspektren. Zwei Aufsätze über das Elektronengebäude des Atoms. Mit 11 Abb. — [4] + 70 pp. 8. 1921.

Physikal. Natur d. Valenzkräfte. Bedeut. d. Röntgenstrahlung f. d. Erforschung d. Atombaus.

Lämmel, R., Die Grundlagen der Relativitätstheorie. Populärwissenschaftlich dargest. 32 Textfig. — 158 pp. 8. 1921.

Absolut u. relativ. Ein Stein fällt zur Erde. Der Weltäther. Drei Tatsachen — drei Widersprüche. Eine Frage an d. Natur. Raum u. Zeit i. neuen Licht. Kraft u. Stoff d. Welt. Das allgem. Rel.-Prinzip.

Landau, E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Mit 11 Textfig. — 110 pp. 8. 1916.

Beschränkte Potenzreihen. Summabilität höherer Ordn. Umkehrungen d. Abelschen Stetigkeitssatzes. Einige Merkwürdigk. d. Verhaltens v. Potenzreihen auf d. Rande. Bezieh. d. Koefficienten einer Potenzreihe zu Singularitäten der Funktion auf d. Rande. Maximum u. Mittelwert d. absoluten Betrages einer analyt. Funktion auf Kreisen. Der Picardsche Ideenkreis.

LIPPMANN, EDMUND O. VON, Entstehung und Ausbreitung der Alchemie. Mit einem Anhange: Zur älteren Geschichte der Metalle. Ein Beitrag zur Kulturgeschichte. — XVI + 742 pp. 8. 1919.

Die Überreste d. alchemist. Literatur. Die Quellen d. alchemist. Lehren. Chemie u. Alchemie. Die Alchemie i. Orient. Die Alchemie i. Occident. Zur älteren Gesch. d. Metalle.

— »—, Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. Mit 2 Abb. im Text. — VIII + 314 pp. 8. 1923.

Aufsätze z. Gesch. d. Chemie.

LÜDTKE, H., Beiträge zur Behandlung der elektromagnetischen Lichttheorie und der Lehre von den elektrischen Schwingungen. Nebst einem Anhang über die Geschwindigkeit der Elektrizität. (Abhandl. z. Didaktik und Philos. d. Naturwiss. Bd 2. H. 5.) — 120 pp. 4. 1911.

LUDWIG, W., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. T. 1—2. Das rechtwinkl. Zweitafelsystem. 50, 58 Textfig. — VI + 135, V + 134 pp. 8. 1919—22.

Rechtwinkl. Projektion auf mehrere Risstafeln. Die Ellipse als affines Bild d. Kreises. Kegelschnitte. Raumkurven.

MADELUNG, E., Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. (Die Grundlehren d. mathemat. Wissenschaften. Hrsg. von R. Courant. Bd 4.) — XII + 247 pp. 8. 1922.

Algebra. Funktionen. Reihen. Diff.- u. Integr.-Rechnung. Diff.-Gleichungen. Lineare Integralgleichungen. Variationsrechnung. Transformationen. Vektoranalysis. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mechanik. Elektrizitätslehre. Relativitätstheorie. Thermodynamik.

MANSION, PAUL, Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Vom Verfasser durchgeseh. und verm. deutsche Ausg. Hrsg. von H. MASER. — XXI + 489 pp. 8. 1892.

Vorbemerkungen des Verfassers. Entstehung d. partiellen Differentialgleichungen. Methode von Lagrange u. Pfaff. Methode von Jakobi. Methode von Cauchy u. Lie. Anhänge.

NÖLKE, FRIEDR., Das Problem der Entwicklung unseres Planetensystems. Eine kritische Studie. 2., völlig umgearb. Aufl. Mit einem Geleitwort von H. JUNG. Mit 16 Textfig. — XIV + 387 pp. 8. 1919.

Einleitung. Analyt. Teil. Synthet. Teil.

PASCHEN, F. & GÖTZE, R., Seriengesetze der Linienspektren. — 154 pp. 8. 1922.

Einleitung. Serienspektren.

Planck, Max, Das Wesen des Lichts. Vortrag gehalten in der Hauptversammlung der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft am 28. Okt. 1919. 2., unveränd. Aufl. — 22 pp. 8. 1920.

Poincaré, H., Mathematische Theorie des Lichtes. Red. von J. Blondin. Autor. deutsche Ausg. von E. Gumlich und W. Jaeger. 30 in d. Text gedr. Fig. — X + 292 pp. 8. 1894.

Kleine Beweg. in einem elast. Medium. — Fortpflanzung einer ebenen Welle. — Interferenz. — Prinzip v. Huygens. — Beugung. — Drehung d. Polarisationsebene. — Dispersion. — Doppelbrechung. — Reflexion. — Astronom. Aberration.

—»—, Elektricität und Optik. Deutsch von W. Jaeger und E. Gumlich. Bd 1. Die Theorien von Maxwell und die elektromagnetische Lichttheorie. 39 Textfig. VIII + 248 pp. 8. 1891. — Bd 2. Die Theorien von Ampère und Weber. Die Theorie von Helmholtz und die Versuche von Hertz. 15 Textfig. VII + 222 pp. 8. 1892.

Prey, A., Mainka, C. & Tams, E., Einführung in die Geophysik. (Naturwissenschaftl. Monographien u. Lehrbücher. Bd 4.) — VIII + 340 pp. 8. 1922.

Anwendung d. Methoden d. Erdmessung auf geophys. Probleme. Von A. Prey. — Erdbebenwellen. Von C. Mainka. — Endogendynam. Vorgänge d. Erde. Von E. Tams.

Poske, Friedr., Die Zentrifugalkraft. Ein Beitrag zur Revision der Newtonschen Bewegungsgesetze. (Abhandl. z. Didaktik u. Philos. d. Naturwiss. Bd 2. H. 3.) — 80 pp. 4. 1909.

Pringsheim, P., Fluorescenz und Phosphorescenz im Lichte der neueren Atomtheorie. 2., verb. Aufl. 33 Abb. — VIII + 228 pp. 8. 1923.

Einl. Resonanzstrahlung. Resonanzspektra. Bandenfluorescenz v. Dämpfen u. Gasen. Leuchtdauer u. Polarisation d. Fluorescenzstrahlung v. Gasen u. d. Einfluss magnet. Felder. Fluor. u. Phosph. fester u. flüss. Lösungen. Die Gruppe d. Erdalkaliphosphore. Linienfluorescenz v. Kristallen. Fluorescenz organ. Verbindungen.

Reichenbach, H., Relativitätstheorie und Erkenntnis apriori. — [5] + 110 pp. 8. 1920.

Einl. Die v. d. spez. Rel.-Theorie behaupteten Widersprüche. Die v. d. allg. Rel.-Theorie behaupteten Widersprüche. Erkenntnis als Zuordnung. Zwei Bedeut. d. Apriori u. d. implizite Voraussetzung Kants. Widerlegung d. Kantischen Voraussetzung durch d. Rel.-Theorie. Beantw. d. krit. Frage durch d. wissenschaftsanalyt. Methode. Der Erkenntnisbegriff d. Rel.-Theorie als Beispiel d. Entw. d. Gegenstandsbegriffes.

RIEMANN, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Neu hrsg. u. erl. von H. WEYL. 3. Aufl. — VI+48 pp. 8. 1923.

ROTH, W. A., & SCHEEL, K., Konstanten der Atomphysik. Unter besonderer Mitwirkung von E. REGENER. (Sonderdruck aus Landolt-Börnstein-Roth-Scheel, Physikalisch-chem. Tabellen. 5. Aufl.) — 114 pp. 4. 1923.

SCHEFFERS, G., Lehrbuch der darstellenden Geometrie in zwei Bänden. Bd 1. 2., durchgeseh. Aufl. (Manuldruck). Mit 404 Textfig. — X+423 pp. 8. 1922.

Senkrechte Projektion auf eine Tafel. Parallelprojektion auf eine Tafel. Senkrechte Projektion auf mehrere Tafeln.

—»—, Bd 2. Mit 396 Fig. im Text. — VIII+439 pp. 8. 1920.

Zentralprojektion od. Perspektive. Anwendungen u. Ergänzungen.

SCHLICK, M., Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Zur Einführung in das Verständis der Relativitäts- und Gravitationstheorie. 4., verm. u. verb. Aufl. — V+107 pp. 8. 1922.

Von Newton zu Einstein. Das spez. Rel.-Prinzip. Die geometr. Relativität d. Raumes. Die mathemat. Formulierung d. räuml. Relativität. Untrennbark. v. Geometrie u. Physik in d. Erfahrung. Die Relativität d. Beweg. u. ihr Verh. z. Trägheit u. Gravitation. Das allgem. Rel.-Postulat u. d. Massbestimm. d. Raum-Zeit-Kontinuums. Aufstellung u. Bedeut. d. Grundgesetzes d. neuen Theorie. Endlichk. d. Welt. Bezieh. z. Philos.

SCHWARZ, H. A., Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd 1. Mit 67 Textfig. und Figurentafeln. VII+338 pp. 8. 1890. — Bd 2. Mit 26 Textfig. VIII+370 pp. 8. 1890.

Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern. Mit dem Bildnis von H. A. Schwarz und 53 Fig. im Text. 1914. VIII+451 pp. 8. 1914.

SIEMENS, WERNER, Wissenschaftliche und technische Arbeiten. 2. Aufl. Bd 1. VIII+422 pp. — Bd 2. X+601 pp. 8. 1889—91.

SPEISER, A., Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie.

(Die Grundlehren der mathemat. Wissenschaften. Herausg. von R. Courant. Bd 5.) — VIII + 194 pp. 8. 1923.

Grundlagen. Normalteiler u. Faktorgruppen. Abelsche Gruppen. Konjugierte Untergruppen. Sylowgruppen u. p-Gruppen. Kristallograph. Gruppen. Permutationsgruppen. Automorphismen. Monomiale Gruppen. Darstell. d. Gruppen durch lineare homogene Substitutionen. Gruppencharaktere. Anwendungen d. Theorie d. Gruppencharaktere. Arithmet. Untersuch. üb. Substitutionsgruppen. Gruppen v. gegebenem Grade. Gleichungstheorie.

Strömgren, Elis, Astronomische Miniaturen. Aus dem Schwedischen übers. von K. F. Bottlinger. Mit 14 Abb. — 87 pp. 8. 1922.

Stellung d. Menschen i. Weltall. Die Kometen. Die Sonne. Ein Kalenderproblem. Grundbegriffe d. modernen Stellarastronomie. Michelsons Methode z. Messung kleiner Winkelabstände am Himmel. Scylla u. Charybdis.

Thirring, Hans, Die Idee der Relativitätstheorie. 2., durchges. u. verb. Aufl. 8 Textabb. — 172 pp. 8. 1922.

Spez. Rel.-Theorie. Allgem. Rel.-Theorie.

Weber, Wilhelm, Werke. Herausg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd 1—6.

1. Akustik, Mechanik, Optik u. Wärmelehre. Besorgt durch W. Voigt. — VII + 600 pp., XIII Taf. 1892.

2. Magnetismus. Besorgt durch E. Riecke. — VIII + 380 pp., X Taf. 1892.

3—4. Galvanismus u. Elektrodynamik. Besorgt durch Heinr. Weber. Th. 1. XII + 676 pp., I Taf. 1893. — Th. 2. XIV + 638 pp., IV Taf. 1894.

5. Wellenlehre. Besorgt durch E. Riecke. — XXX + 433 pp., XVIII Taf. 1893.

6. Mechanik d. menschl. Gehwerkzeuge. Besorgt durch F. Merkel u. Otto Fischer. — XXIV + 326 pp., XVII Taf. 1894.

Weierstrass, K., Formeln u. Lehrsätze zum Gebrauche der ellipt. Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. W. bearb. u. herausg. von H. A. Schwarz. 2. Ausg. Abth. 1. — XII + 96 pp. 4. 1893.

Weinstein, B., Handbuch der physikalischen Maassbestimmungen.

Bd 1. Die Beobachtungsfehler, ihre rechnerische Ausgleichung u. Untersuchung. — XX + 524 pp. 8. 1886.

Bd 2. Einheiten u. Dimensionen, Messungen f. Längen, Massen, Volumina u. Dichtigkeiten. — XII + 552 pp. 8. 1888.

Werkmeister, P., Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomographie). Mit 164 Textabb. — VIII + 194 pp. 8. 1923.

Tafeln f. Funktionen v. einer Veränderlichen od. f. Gleichungen mit zwei Veränderlichen. Tafeln f. Funktionen v. zwei Veränderlichen od. f. Gleichungen mit drei Veränderlichen. Tafeln f. Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen.

Weyl, Hermann, Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. 5., umgearb. Aufl. Mit 23 Textfig. — VIII + 338 pp. 8. 1923.

Der euklid. Raum. Das metr. Kontinuum. Relativität von Raum u. Zeit. Allgem. Relativitätstheorie.

—»—, Mathematische Analyse des Raumproblems. Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid. Mit 8 Abb. — VII + 117 pp. 8. 1923.

Einl. Infinitesimalgeom. Gruppentheoret. Analyse d. Raumproblems. Zusätze.

B. G. Teubner.

Leipzig & Berlin.

Euler, L., Opera omnia. Sub auspiciis Societatis scientiarum naturalium Helveticae edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, A. Speiser, L. G. Du Pasquier. Ser. 1. Opera mathematica. Vol. 7. Commentationes algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes. Ed. L. G. Du Pasquier. — LVIII + 580 pp. 4. 1923. — Schw. Fr. 25:—.

Salmon—Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. Unter Mitw. von A. Brill neu hrsg. von K. Kommerell. T. 1. Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiter Ordnung. Mit 48 + 23 Fig. 5 Aufl. — X + 612 pp. 8. 1922—23. Kr. 11: 10.

Das Koordinatensystem. Ebene u. Gerade. Plückersche Ebenkoordinaten. Dualitätsprinzip. Der unendlich ferne Kugelkreis. Erzeugung d. Flächen. Übersicht üb. d. verschied. Formen v. Flächen 2. Ordn. Allgem. Eigensch. d. Flächen 2. Ordn. Quadrat. Formen. Invarianten. Klassif. d. Flächen 2. Ordn. Ableitung v. Eigensch. d. Flächen 2. Ordn. aus besond. Formen ihrer Gleichungen. Tetraederkoordinaten. Projektive Verwandtschaft. Linienkoordinaten. Verwandtschaft d. Flächen 2. Ordn. Raumkurven 3. Ordn. Das Flächenbüschel 2. Ordn. Kegel 2. Ordn. u. sphär. Kegelschnitte. Die Theorie d. Elementarteiler. Invarianten u. Kovarianten d. Flächen 2. Ordn. Projektive Massbestimmung i. Raume.

Weber, Heinr., Arithmetik, Algebra und Analysis. Mit 26 Fig. im Text. 4. Aufl., neubearb. von Paul Epstein. (Weber-Wellstein, Enzyklopädie

der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende.) — XVI+568 pp. 8. 1922.

1. Arithmetik: Elementare Mengenlehre. Natürl. Zahlen. Addition, Multipl., Subtr. Die ganzen Zahlen. Division. Rationale Zahlen. Irrationale Zahlen. Messbare Grössen. Verhältn. u. Proportionen. Potenzen u. Logarithmen. Komplexe Zahlen. Kombinatorik. Binom. u. polynom. Lehrsatz. Arithmet. Reihen. Zahlenkongruenzen. Potenzreste. Quadrat. Reste. Quadrat. Formen. Quadrat. Irrationalzahlen. Period. Kettenbrüche.

2. Algebra: Gleichungen 1. Grades. Determinanten. Quadrat., kubische u. biquadrat. Gleich. Ganze Funktionen. Symmetr. Funktionen. Invarianten v. Permutationsgruppen. Auflösung numer. Gleichungen durch Näherung. Kreisteilung. Unmöglichkeitsbeweise.

3. Analysis: Unendl. Reihen. Potenzreihen. Die Binomialreihe. Die Exponentialfunktion u. d. trigonometr. Funktionen. Der natürl. Logarithmus u. d. zyklometr. Funktionen. Trigonometr. Reihen. Produktdarst. für π. Die Potenzsummen $\zeta\ (2\,n)$. Die Eulersche Konstante. Transzendenz v. e u. π.

Theosoph. Verlagshaus.

Leipzig.

Sebottendorf, Rud. v., Sterntafeln (Ephemeriden) von 1838 bis 1922 und Häusertabellen 2° bis 40°. Perioden- und Berechnungstafeln für jede gegebene Zeit. Tafeln für Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse. (Astrologische Bibliothek. 16.) — 334 pp. 8. Brosch. Mk. 6:—

—»—, Praktischer Lehrgang zur Horoskopie nebst Deklinationen der Wandelsterne von 1851—1923. — 246 pp. 8. Brosch. Mk. 6:—.

Univ.-boktrykkeriet.

Köbenhavn.

Strömgren, E., Tre Aartier celest Mekanik paa Köbenhavns Observatorium. (Universitetets Festskrift, Nov. 1923.) — 71 pp. 4. 1923.

Librairie Vuibert.

Paris.

Gandillot, M., L'illusion d'Einstein. — 17 pp. 8. 1923.

Granville, W. A., Éléments de calcul différentiel et intégral. (Édition revue.) En collaboration pour l'édition avec Percey F. Smith. Trad. de l'anglais par A. A. M. Sallin. — VII+548 pp. 8. 1924.

Calcul différentiel: Recueil de formules. Variables et fonctions. Théorie des limites. Différentiation. Règles pour différentier les formes élémentaires class. Applic. simples de la dérivée. Différentiation successive. Maxima et minima. Points d'inflexion. Tracé des courbes. Différentielles. Le temps considéré comme nouv. variable. Changement de variable. Courbure. Rayon de courbure. Théorème de la moyenne. Formes indéterminées. Cercle de courbure. Centre de courbure. Différentiation partielle. Enveloppes. Séries. Développement des fonctions. Asymptotes. Points singuliers. Applications à la géométrie dans l'espace. Courbes de référence.

Calcul intégral: Intégration. Règles pour intégrer les formes élémentaires class. Constante d'intégration. L'intégrale définie. Intégration des fractions rationnelles. Intégration par substitution d'une nouv. variable. Rationalisation. Intégration par parties. Formules de réduction. L'intégration définie comme opération de sommation. Intégration successive et partielle. Équations différentielles ordinaires. Intégraphe. Intégration approchée. Table d'intégrales.

Nicola Zanichelli.

Bologna.

Bortolotti, E., Lezioni di geometria analitica. Vol. 1. XXXIX + 382 pp. — Vol. 2. 229 pp. 8. 1923.

1. Punti, rette e piani.

Coordinate nelle forme di prima specie. Punti e rette nel piano. Punti piani e rette nello spazio.

2. Le coniche.

Tangenti e polari. Proprietà diametr. Studio delle proprietà delle coniche sulle loro equazioni norm. Proprietà focali delle coniche. Fasci e schiere di coniche. Appendice. Proiettività fra forme di 2ª e di 3ª specie.

Omografie. Correlazioni.

3. Le quadriche.

Superficie e linee dello spazio. Equazione gen. delle quadriche. Polarità definita da una quadrica. Proprietà diametr. delle quadriche. Studio delle quadriche sulle loro equazioni norm.

4. Elementi della teoria gen. delle curve e delle superficie.

Curve piane. Curve nello spazio. Superficie.

Divers.

Descharmes, R., Bibliographie des travaux scientifiques (sciences mathematiques, physiques et naturelles) publ. par les sociétés savantes de la France dressée sous les auspices du Ministère de l'instruction publique. — VII + 235 pp. 4. 1922.

BIBLIOGRAPHIE.

Akademische Verlagsgesellschaft.

Leipzig.

Hecke, Erich, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. — VIII + 264 pp. 8. 1923.

Elemente d. rationalen Zahlentheorie. Abelsche Gruppen. Abelsche Gruppen in d. rationalen Zahlentheorie. Algebra d. Zahlkörper. Allgem. Arithm. d. Zahlkörper. Einführung transzendenter Hilfsmittel in d. Arithm. d. Zahlkörper. Der quadrat. Zahlkörper. D. quadrat. Reziprozitätsgesetz in belieb. algebr. Zahlkörpern.

Felix Alcan.

Paris.

Jarre, V., Dualité de la matière. Essai sur le mécanisme du renouvellement des mondes. — 304 pp. 8. 1923. 10 fr.

Anc. théories de la matière. Théorie électr. de la mat. Mat. non compensée. Mat. compensée. Mat. associée. Propriétés physico-chim. des corps. Propr. électro-magn. Énergies. Soleils et systèmes solaires. Rotation de la terre sur son axe. Voie centrifuge. Formation des planètes. Constit. des planètes. Le mouvement et la vie sur les planètes. Variations météorol. La vie, l'espèce et la race. La race. Durée des planètes. Fin des planètes.

Painlevé, P., Borel, É. & Maurain, Ch., L'aviation. (Nouv. coll. scientif.) — VIII + 308 pp. 8. 1923. 10 fr.

Historique de l'aviation. Le vol des oiseaux. Les orthoptères et les hélicoptères. Aéroplanes sans moteur: cerfs-volants et planeurs. L'aéroplane. La manœuvre de l'aéropl. Le rôle de l'angle d'attaque. L'avenir de l'aéropl. Records et concours. Les recherches aérotechn. Théor. de l'aéropl. Quelqnes principes élém. de mécanique.

Aschehoug & Co.

Kristiania.

Guldberg, Alf, Sandsynlighets-regningens og forsikrings-matematikkens elementer. Forelæsninger for statsøkonomiske studerende. 2. utg. — 188 pp. 8. 1922.

Sandsynl.-regningens elem. Rente. Dødeligh. Forsikr. paa ett liv. Aarl. premier for de vigtigste forsikr. paa ett liv. Forsikr. paa to liv. Bruttopræmie og tilbakebetaling. Præmiereserve. Aarsopgjør og gevinst. Histor. bemerkn. Tabeller.

Lie, S., Gesammelte Abhandlungen ... — Samlede avhandlinger. Ved bevilgning fra statens forskningsfond av 1919 og med understöttelse av Videnskapsselskapet i Kristiania og Videnskapernes akademi i Leipzig utg. av Norsk matematisk forening ved F. Engel, P. Heegaard. Bd. 5. Abhandl. üb. d. Theorie d. Transformationsgruppen. Abt. 1. Herausg. von F. Engel. — X + 776 pp. 8. 1924.

J. A. Barth.

Leipzig.

Dingler, Hugo, Die Grundgedanken der Machschen Philosophie mit Erstveröffentlichungen aus seinen wissenschaftlichen Tagebüchern. — 106 pp. 8. 1924. G. M. 3.—.

Einfluss äusserer Umstände auf Entwickl. d. Machschen Denkens. Machs allgem. Einstellung zu seinen Problemen. Machs Verhältnis z. Apriori. Machs Sensualismus u. Empirismus. Ernst Mach u. d. Relativität. Aus Machs wissenschaftl. Tagebüchern.

Mach, E., Populär-wissenschaftliche Vorlesungen. 5., verm. und durchgeseh. Aufl. Mit 77 Abb. im Text und 7 Taf. — X + 628 pp. 8. 1923.

Gestalten d. Flüssigk. Die Corti'schen Fasern d. Ohres. Erklär. d. Harmonie. Zur Gesch. d. Akustik. Geschwindigk. d. Lichtes. Wozu hat die Mensch zwei Augen? Die Symmetrie. Bemerk. z. Lehre v. räuml. Sehen. Wissenschaftl. Anwend. d. Photogr. u. Stereoskopie. Grundbegriffe d. Elektrostatik. Prinzip d. Erhaltung d. Energie. Ökonom. Natur d. physikal. Forschung. Umbildung u. Anpassung im naturwiss. Denken. Prinzip d. Vergleichung in d. Physik. Einfluss zufälliger Umstände auf d. Entwickl. v. Erfindungen u. Entdeck. etc. etc.

E. Birscher Aktiengesellschaft.

Bern und Leipzig.

Strasser, H., Die Transformationsformeln von Lorentz und die »Transformationsformeln» der Einsteinschen speziellen Relativitätstheorie. — 31 pp. 8. 1924.

A. Blanchard.

Paris.

Forestier, A., L'énergie rayonnante. Tableaux synoptiques de l'échelle des longueurs d'onde et des principales caractéristiques du rayonnement électromagnétique avec un résumé des théories actuelles. Préf. de Marcel Boll. — 58 pp. 8. 1923. 14 fr.

Reymond, Arnold, Histoire des sciences exactes et naturelles dans l'antiquité gréco-romaine. Exposé sommaire des écoles et des principes. Avec une préf. de M. L. Brunschvicg. — VIII + 238 pp. 8. 1924. 12 fr.

Introd.: L'Egypte et la Chaldée. La science grecque et romaine: Aperçu histor. et sources. Les principes et les méthodes: Les sciences math. Astronomie. La mécanique. Sciences chim. et naturelles.

Fratelli Bocca.

Torino.

Natucci, Alpinolo, Il concetto di numero e le sue estensioni. Studî storico-critici intorno ai fondamenti dell' aritmetica generale con oltre 700 indicazioni bibliografiche. — VIII + 474 pp. 8. 1923.

Introd. storica. Teorie sintetiche. Teorie analitiche. Teorie logico-formali. Critica e metodologia.

Vidoni, G., Valore e limiti dell' indocrinologia nello studio del delinquente. Con pref. di N. Pende. — VIII + 125 pp. 8. 1923.

Gebrüder Borntraeger.

Berlin.

Schoenflies, A., Theorie der Kristallstruktur. Ein Lehrbuch. Mit 257 in d. Text gedr. Fig. — XII + 555 pp. 8. 1923.

Beweg. u. Umlegungen. Rechnen mit Operationen. Die einfachsten Typen d. Operationen. Hilfssätze üb. Operationen 1 u. 2. Art. Der Gruppenbegriff u. d. Kristallklassen mit blosser Achsensymmetrie. Die Gruppen u. Kristallklassen 2. Art. Koordinaten d. gleichwert. Punkte. Punktreihen, Punktnetze, Punktgitter. Symmetr. Punktnetze u. Punktgitter. Strukturtheorien u. d. mathemat. Problemstellung. Nachweis d. kristallograph. Grundgesetze. Allgem. Sätze üb. Raumgruppen. Raumgruppen v. triklinen u. monoklinen Typus. Raumgruppen v. rhombischen Typus. Raumgruppen v. rhomboedrischen Typus.

Raumgruppen v. tetragonalen Typus. Raumgruppen v. hexagonalen Typus. Raumgruppen v. kubischen Typus. Raumteilung u. Kugelpackung. Anwend. u. Beispiele.

G. Braun.

Karlsruhe.

Driesch, Hans, Relativitätstheorie und Philosophie. (Wissen u. Wirken. Bd. 14.) — 52 pp. 8. 1924.

University of Calcutta.

Bhattacharyya, Durgaprasanna, Vector calculus. Griffith prize thesis, 1918. (University studies series.) — (4) + 90 pp. 8. 1920.

1. Continuity: differentiation of a vector function of a scalar variable. Integrals. The gradient of a scalar function. The linear vector function. Differ. calculus of vector functions. Integration theorems.

2. Steady motion of a solid under no forces in liquid extending to infinity.

Ray, Prafulla Chandra, Organic thio-compounds with special reference to tautomeric changes and the formation of polysulphonium derivatives. P. 1. — V + 70 pp. 8. 1919.

Cambridge University Press.

Campbell,, Norman Robert, Modern electrical theory. Supplementary chapters. Chapter XVII. The structure of the atom. — VI + 161 pp. 8. 1923. 10/-.

Introd. The nucleus. The extra-nuclear electrons. Combinations of atoms.

Hardy, G. H., Orders of infinity. The »Infinitärcalcül« of Paul du Bois-Reymond. 2d ed. (Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. No. 12.) — 77 pp. 8. 1924. 6 sh.

Introd. Scales of infinity in gen. Logarithmico-exponential scales: the fundamental theorems. Spec. problems connected with logarithmico-exponential scales. Differentiation and integration. Applications.

Hobson, E. W., The domain of natural science. The Gifford lectures delivered in the University of Aberdeen in 1921 and 1922. — XVI + 510 pp. 8. 1923.

Introduction. Scientific laws and theories. Natural science in relation to philosophy. Causation and deterministic systems. Number and its develop-

ments. Time and space. Corpuscular theories of matter. Dynamics. Conservation of matter and energy. Mechan. theories and thermodynamics. Electricity, magnetism, and light. Constitution of matter. Cosmical theories. Einstein's theory of relativity. Biolog. science. The living organism. Heredity. Evolution of species. Natural science and gen. thought. Natural science and theism. Index.

King, Louis V., On the direct numerical calculation of elliptic functions and integrals. — VIII + 42 pp. 8. 1924. 3/6.

Histor. note on Landen's transformation & the various scales of moduli & amplitudes. On the scale of arithmetico-geometr. means. Landen's scale of increasing amplitudes. The hyperbolic scale of increasing amplitudes. Gauss' scale of increasing amplitudes. Landen's scale of decreasing amplitudes. The hyperbolic scale of decreasing amplitudes. On the numer. computation of the third elliptic integral. Note on the calculation of the third elliptic integral in terms of the complementary A. G. M. scale.

Lamb, Horace, Hydrodynamics. 5th ed. XVI + 687 pp. 8. 1924. 45/-.

The equations of motion. Integration of the equations in special cases. Irrotational motion. Motion of a liquid in two dimensions. Irrotational motion of a liquid: problems in three dimensions. On the motion of solids through a liquid: dynam. theory. Vortex motion. Tidal waves. Surface waves. Wawes of expansion. Viscosity. Rotating masses of liquid.

Ward, James, A study of Kant. — VII + 206 pp. 8. 1922. 12/6.

The man: his nature & nurture. Early interest in phys. probl. First philosoph. work. Short treatises with an empir. trend. The inaugural diss. Transition from the Diss. to the Critique. »Kritik d. reinen Vernunft.» Kant as the Copernicus of epistemology. Fundam. principles of the pure understanding. The Copernican standpoint not sustained. What remains. Kant's system a philosoph. anthropomorphism. The Critique of the judgment. The æsthet. judgment. The teleolog judgment. Teleology and theology. Summary. The doctrine of inner sense. Kant's treatment of the resulting problem. The idea of freedom. Dualism of theoret. & pract. reason. The concrete individual. Religion within the bounds of mere reason. Man's native capacities. Human nature as radically bad.

Whetham, William Cecil Dampier, The theory of experimental electricity. 3d ed. — XI + 349 pp. 8. 1923. 12/6.

Gen. principles of electrostatics. Some theorems of electrostatics. The dielectric medium. Magnetism. The electric current. Thermo-electricity. Electromagnetic induction. Electr. units. Electromagn. waves. Electrolysis. Conduction of electricity through gases. Radio-activity.

Carnegie Institution of Washington.

Dickson, L. E., History of the theory of numbers. Vol. 3. Quadratic and higher forms. With a chapter on the class number by G. H. Cresse. (Carn. Inst. of Wash. Publ. No. 256.) — IV + 313 pp. 8. 1923.

Reduction and equivalence of binary quadratic forms, representation of integers. Composition of binary quadratic forms. Orders and genera; their composition. Number of classes of binary quadratic forms with integral coefficients. Quadratic forms in n variables. Binary cubic forms. Cubic forms in three or more variables. Forms of degre $n \geqq 4$. Congruencial theory of forms.

»Cartea Românească» S. A.

Bucarest.

Muica, I., Théorème de Fermat. 4e éd. 8 pp. 8. 1924.

Circolo matematico di Catania.

Picone, M., Lezioni di analisi infinitesimale. Vol. 1: P. 1—2. La derivazione e l'integrazione. (Pubblicazioni del Circolo matematico di Catania.) — XI + 742 pp. 8. 1923.

Insiemi ordinati di operazioni. Limiti per una variabile. Insiemi di punti. Funzioni. Derivate e differenziali per le funzioni di una variabile reale. Derivate e differenziali per le funzioni di due o più variabili reali. Calcolo della funzioni. Funzioni implicite. Cambiamento delle variabili. Massimi e minimi. Estensione degli insiemi di punti. Integrali delle funzioni. Sulle funzioni di dominio. Integrali definiti e indefiniti. Calcolo numerico degli integrali definiti. Integrali curvilinei. Calcolo degli integrali nel piano. Integrali superficiali. Sul calcolo degli integrali nello spazio.

Librairie ancienne Honoré Champion.

Paris.

Recueil d'études égyptologiques dédiées à la mémoire de Jean François Champollion à l'occasion du centenaire de la lettre à M. Dacier relative à l'alphabet des hiéroglyphes phonétiques lue à l'Academie des inscriptions et belles-lettres le 27 septembre 1822. Ouvrage illustré de 16 planches hors texte. (Bibliothèque de l'École des hautes études ... Sciences historiques et philologiques. Fasc. 234.) — III + 788 pp. 8. 1922.

Pp. 467—482: G. Jéquier: Le système numérique en égyptien.

Chapman & Hall, Ltd.

London.

Forsyth, C. H., An introduction to the mathematical analysis of statistics. — VIII + 241 pp. 8. 1924. 11/6.

Errors & numer. computation. Finite differences. Interpolation. Gamma & Beta functions. Probability. Averages & aids in their computation. Moments. The normal curve. The binomial $(p+q)^n$. Statist. series. Correlation theory.

Putnam, T. M., Mathematical theory of finance. — VII + 117 pp. 8. 1923. 8/6.

Interest. Annuities. Amortization-sinking funds. Bonds. Probability. Life annuities. Elementary principles of life insurance.

Clarendon Press.

Oxford.

Coolidge. Julian Lowell, The geometry of the complex domain. — 242 pp. 8. 1924.

Representation of the binary domain. Geometry of the binary domain. Repres. of points of a curve. Repres. of points of a plane. The ternary domain, algebraic theory. Differential geometry of the plane. Three-dimensional complex space. The von Staudt theory.

Armand Colin.

Paris.

Jolibois, Pierre, Les méthodes actuelles de la chimie. (Collection Armand Colin (Section de chimie). N:o 37.) — VI + 198 pp. 8. 1923. 6 fr.

Principaux facteurs des réactions. Le fractionnement. L'élément. Le corps pur. Phénomènes de solubilité. La réaction chim. La synthèse chim.

Picart, Luc, Astronomie générale. (Collection Armand Colin (Section de mathématiques). N:o 50.) — VI + 188 pp. 8. 1924. 6 fr.

Le ciel étoilé. Astronomie sphér. Déterm. des distances angul. Instruments, procédés d'observ. Corrections des observ. Astron. stellaire. Mouvem. du soleil. Temps. Mouvement des planètes. Gravitation. Orbites. La lune. Éclipses. Parallaxe du soleil. Origine du monde solaire.

Rouch, J., L'atmosphère et la prévision du temps. (Collection Armand Colin (Section de physique). N:o 36.) — 204 pp. 8. 1923. 6 fr.

Les procédés d'observation. Les résultats. Les applications.

Deighton, Bell & Co.

Cambridge.

Valiron, Georges, Lectures on the general theory of integral functions. Transl. by E. F. Collingwood. — XI+208 pp. 8. 1923. 7/6.

Prelim. notions. The funct. $M(r)$ and the coeff. in the expansion of $f(z)$. The zeros of funct. of finite order and Borel's theorem. On the values assumed by an integral funct. in the neighbourhood of points of maximum modulus. Asymptotic values and paths of determination. Generalisations of Picard's theorem.

Società Ed. Dante Alighieri.

Roma.

Castelnuovo, Guido, Lezioni di geometria analitica. Geometria analitica del plano e dello spazio. I concetti fondamentali della geometria proiettiva. Curve e superficie di secondo ordine. 5ª ed. — VIII+605 pp. 1922. L. 35.

1. *Geom. analit. del piano.* Relazioni di posizione fra punti e rette. Trasform. delle coord. Punti e rette immagin. Rappres. anal. delle curve plane. Il cerchio ed altre curve particolari.

2. *Geom. anal. dello spazio.* Relaz. di posiz. tra punti, rette e piani. Distanze, angoli, aree, volumi. Trasform. delle coordinate. Rappres. anal. delle superficie e delle linee nello spazio.

3. *I concetti fondam. della geom. proiett.* Elem. impropri. Coord. omogenee di punti, rette e piani. Il birapporto di quattro elementi. Proiettività tra due forme di prima specie. Involuzione sopra una forma di prima specie. Proiettività tra forme di seconda specie. Proiettività fra due spazi.

4. *Curve di secondo ord.* Polarità defin. dalla curva. Costr. di coniche. Teoremi di Bascal, Brianchon, Desargues. Propr. diam. Forme ridotte delle equaz. delle coniche. Propr. focali delle coniche. Trasform. di una conica mediante una collineazione.

5. *Superficie di secondo ord.* Polarità defin. dalla superficie. Rette di una quadr. Generaz. delle quadr. rigate. Fasci e schiere di quadriche. Proprietà diam. Equaz. ridotte delle quadr. Sezioni circolari. Quadr. confocali. App. Sui probl. geom. Raccolta di alcune formole di geom. anal.

Franz Deuticke.

Leipzig und Wien.

Herz, Norbert, Allgemeine Theorie zentrierter Linzensysteme. — IV + 67 pp. 8. 1924.

Gaston Doin.

Paris.

Yermoloff, Nicolas, Y a-t-il continuité dans le monde physique? — X + 48 pp. 8. 1923. 3 fr. 50.

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung.

Stracke, G., Genäherte Störungs-Rechnung und Bahnverbesserung. (Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts zu Berlin. N:o 44.) — 31 pp. 8. 1924.

J. Engelhorns Nachf.

Stuttgart.

Graetz, L., Die Äther und die Relativitätstheorie. 6 Vorträge. Mit 19 Abb. — 80 pp. 8. 1923.

Der Äther in d. Physik als Vermittler d. Lichts u. d. scheinbaren Fernkräfte. Die Quanten d. Energie. Bewegung d. Körper i. Äther. Die spez. Relativitätstheorie. Folgerungen aus d. spez. Relativitätstheorie. Trägheit d. Energie. Trägheit u. Gravitation. Verallgemeinerte Relativitätstheorie.

Librairie de l'enseignement techn. L. Eyrolles, éditeur.

Paris.

Vessiot, E., & Montel, P., Cours de mathématiques générales professé à la Faculté des sciences de Paris en 1919—20. P. 1. Éléments d'algébre, de calcul différentiel et de géométrie analytique par E. Vessiot. 2e éd., revue et augm. — XV + 504 pp. 8. 1924. P. 2. Éléments de calcul intégral, par E. Vessiot. Éléments de mécanique, par P. Montel. 582 pp. 8. 1921.

P. 1. Généralités sur les fonctions et les limites. La notion de continuité. La notion de puissance. Les fonctions x^m, a^x, $\log_a x$. Séries. Dérivées. Fonctions trigonométr. inverses et fonctions hyberbol. Prem. applic. des dérivées. Comparaison des infiniment petits et des infiniment grands. Formules de Mac-

Laurin et de Taylor. Représentation des fonctions par des séries entières. Étude de la variation des fonctions. Dérivées partielles. Différentielles. Fonctions de plusieurs variables. Notions de géométrie analyt. plane. Applic. du calcul différ. Notions de géométrie analyt. à trois dimensions. Suite des applic. du calcul différ. Nombres complexes.

P. 2. Éléments de calcul intégral: Intégrales indéfinies. Équations différ. du premier ordre; du second ordre. Systèmes d'équations différ. Intégrales définies. Intégrales multiples. Intégrales définies fonctions d'un paramètre. Équations aux dérivées partielles. Probabilités des erreurs.

Éléments de mécanique: Cinématique. Dynamique du point. Statique. Dynamique des systèmes.

Feuer-Verlag.

Leipzig.

Mathé, Franz, Karl Friedrich Gauss. (Die Sammlung Meister, Bd. 12.) — 32 pp. 8.

Benno Filser.

Augsburg.

Geiger, Moritz, Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie. — XXIII + 271 pp. 8. 1924.

1. Das Problem u. d. Methode.

Wesensaxiomatik. Die systemat. Axiomatik.

2. Durchführung d. systemat. Axiomatik.

Axiome d. Elementensetzung. Axiome d. Ineinanderliegens. Die ausschliessenden Axiome d. Ineinanderliegens. Deduktion d. Axiome d. J-Relation. Axiome d. Anordnung. Axiome d. Massbeziehung.

Kepler, J., Mysterium cosmographicum. Das Weltgeheimnis. Übers. und eingel. von Max Caspar. — XXXI + 150 pp. 8. 1923.

Gads Forlag.

København.

Steffensen, J. F., Matematisk Iagttagelseslære. — 268 pp. 8. 1923.

Fejllove. Udjævning. Sandsynlighedsregning. Tillæg.

Gauthier-Villars & Cie.

Paris.

Cartan, E., Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. P. 1. (Annales scientif. de l'École normale supér.) S. 325—412, 1—25. 4. 1923—24.

Chatelet, A., & Kampé de Fériet, J., Calcul vectoriel. Théorie. Applications géométriques et cinématiques. Destiné aux élèves des classes de mathématiques spéciales et aux étudiants en sciences mathématiques et physiques. — IX+425 pp. 8. 1924.

Opérations élém. sur les vecteurs. Notions de géometrie analyt. Fonctions vectorielles d'une variable scalaire. Fonctions vectorielles de deux variables. Vecteurs glissants et systèmes de vecteurs. Cinématique du point et du corps solide. Coordonnées obliques et curvilignes. Champs de scalaires et de vecteurs. Invariants différentiels. Mouvement d'un plan sur un plan.

Borel, Émile, Traité du calcul des probabilités et de ses applications. Avec la collaboration de L. Blaringhem, C. V. L. Charlier, R. Deltheil, H. Galbrun, J. Haag, R. Lagrange, F. Perrin, P. Traynard. T. 3. Les applications de la théorie des probabilités aux sciences économiques et biologiques. Fasc. 1. Assurances sur la vie. Calcul des primes, par H. Galbrun. 310 pp. 8. 1924. 35 fr.

Note de l'auteur. Loi des grands nombres dans les opérations financières. Des tables de mortalité. Interpolation et sommation. Formule de Lubbock. Formule d'Euler. Capital différé et annuité viagère sur une tête. Assurance au décès sur une tête. La théorie des groupes de têtes. Assurances et rentes de survie. Chargement des primes. Les principales combinaisons d'assurances sur la vie. Quelques remarques sur les probabilités de décès et la loi des erreurs.

Halphen, G. H., Œuvres. Publ. par des soins de C. Jordan, H. Poincaré, É. Picard avec la collaboration de E. Vessiot. T. 4. — XV+657 pp. 8. 1924.

Lamouche, A., La méthode générale des sciences pures et appliquées. — XII+298 pp. 8. 1924.

Introd.

1. La science et sa méthode: Définition et caractères distinctifs de la science. La méthode de la science.

2. La théorie et la pratique: Le point de vue spéculatif et le point de vue utilitaire. Les sciences mathémat. Les sciences expérim. et appliquées.

3. Généralisation de la méthode: Les limites de la science et sa relativité. Science et philosophie. L'élite de demain.

VOLTERRA, V., & PÉRÈS, J., Leçons sur la composition et les fonctions permutables. Préface de V. VOLTERRA. (Collection de monogr. sur la théorie des fonctions. Publ. sous la dir. de É. Borel.) — VIII+183 pp. 8. 1924.

La notion de compos. et les fonctions permutables. Fonctions permutables et équations intégr. Recherche des fonctions permutables avec une fonction donnée. Transformations qui conservent la composition. Puissances positives de composition. Fractions de composition et puissances négatives de composition. Complément à la théorie précédente. Applications. La théorie des logarithmes de composition. Les équations intégr. à noyaux logarithm. et leur application à la théorie des logarithmes de composition. Fonctions de composition. Dérivées et intégrales de composition. Fonctions permutables et sommation des séries divergentes.

Hugo Gebers Förlag.

Stockholm.

Vetenskapen och livet. — 1924. Årg. IX. Kr. 1: 50.

No. 3. Mars.

Jordens inre värme. Radiotelefonering till och från tågen. Avståndsverkan o. vågformig energiöverföring.

No. 4. April.

Hydrauliska explosionsturbiner. Man kan erhålla högspänd likström medels vacuumrör. För att mäta tiden på en tusendels sekund. Ljus, färg o. form.

No. 5. Maj.

No. 6. Juni.

Sommarhimlens moln.

No. 7. Sept.

Einsteins teori bekräftad med hjälp av en topas.

No. 8. Okt.

Är Jupiter fast?

No. 9. Nov.

Väderleksförutsägelser. Stjärnornas fysiska tillstånd och avsvalning.

Mathematisches Seminar.

Giessen.

Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Giessen. Herausg. von den Direktoren des Seminars. F. Engel und L. Schlesinger. Bd. 1. 8.

1. H. Fuhr, Zur Transformationstheorie d. Fuchsschen Funktionen. 2. Magda Kleberger, Üb. eine v. Weierstrass gegebene Definition d. analyt. Funktion. 3. H. Gilbert, Die Reziprozität in d. Ebene als Folge eines Polarsystems und einer harmon. Spiegelung an einem Punkt u. einer Geraden. 4. J. Möll, Über eine Klasse gewöhnl. Diff.-Gleich. höherer Ordn. 5. L. Monville, Analyt. Beitr. zu Lies Abbildung d. Imaginären d. ebenen Geom. 6. J. Fuhrich, Zur natürl. Geom. ebener Transformationsgruppen. 7. H. Lotz, Zur Geom. d. dreifach ausgedehnten Mannigfaltigk. v. konstantem Krümmungsmass. 8. H. Axel, Die ellipt. Funktionen als automorphe Funktionen, die zu einer aus drei Drehungen d. Euklidischen Ebene um 180° komponierten Gruppe gehören. 9. F. Kämmerer, Zur Flächentheorie im n-fach ausgedehnten Raume. 10. A. Plessner, Zur Theorie der konjugierten trigonometr. Reihen.

Ginn & Co.

Boston.

Longley, William Raymond, & Wilson, Wallace Alvin, An introduction to the calculus. With the editorial cooperation of Percey F. Smith. — XV + 452 pp. 8. 1924. $ 2: 40.

Cartesian coördinates. The straight line. Equations of curves. Slope & derivative. Differentiation of alg. functions. Functions — maximum & min. values. Rates & differentials. The circle, parabola, ellipse, hyperbola. Curve-tracing. Indef. integrales. Constant of integration. Defin. integrals. Defin. integral as the limit of a sum. Applic. of the fundamental theorem. The exponential & logarithmic functions. Trigonom. functions.

Siceloff, L. P., & Smith, D. E., College algebra (Wentwort-Smith mathemat. series). — V + 258 pp. 8. 1924.

Review of elementary algebra. College algebr. Optional special topics.

Smith, David Eugene, History of mathematics. Vol. 1. General survey of the history of elementary mathematics. — XXII + 596 pp. 8. 1923. $ 4: 00.

Bibliography. Prehistoric mathematics. Historic period down to 1000 B. C. The per. from 1000 B. C. to 300 B. C. The per. from 300 B. C. to 500 A. C. The per. from 500 to 1000. Occident from 1000 to 1500. Orient from 1000 to 1500. Sixteenth century. Seventeenth century. Eighteenth century and after.

SMITH, DAVID EUGENE, The progress of arithmetic in the last quarter of a century. — VI+93 pp. 8. $ 0: 72.

Progress in purpose and in topics. Progress in the teaching art.

Charles Griffin & Co., Ltd.

London.

FELDMAN, W. M., Biomathematics being the principles of mathematics for students of biological science. — XIX+398 pp. 8. 1923. 21/-.

Simplified methods in arithm. A few points in algebra. A few points in elem. trigonometry. A few points in elem. mensuration. Series. Simple & compound interest laws in nature. Funct., variables & constants. Differentials & diff. coefficients. Maxima & Minima. Successive differentiations. Integral calculus. Biochemical applications of integration. Thermodynamic consider. and their biolog. applic. Use of integral calculus in animal mechanics. Use of integral calculus for determining areas, lengths, volumes & moments of inertia. Spec. methods of integration. Fourier's theorem. Differ. equations. Mathem. analysis applied to co-ordination of exper. results. Biometrics.

W. de Gruyter.

Berlin & Leipzig.

SCHLESINGER, L., Automorphe Funktionen. Mit 53 Fig. (Göschens Lehrbücherei. 1. Gruppe. Reine Mathematik. Bd 5.) — X+205 pp. 8. 1924.

Einleitendes. Beispiele. Ellipt. Funktionen. Die geometr. Grundlagen d. Lehre v. d. automorphen Funktionen. Analyt. Theorie d. automorphen Funktionen. Lösung d. Fundamentalproblems. Uniformisierung.

TROPFKE, JOHANNES, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Bd. 6. Analysis. Analytische Geometrie. 2., verbess. u. sehr verm. Aufl. — IV+169 pp. 8. 1924.

A. Analysis.

Reihen. Zinseszinsrechnung. Kombinatorik u. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kettenbrüche. Maxima u. Minima.

B. Die analyt. Geometrie.

Geschichtl. Überblick. Fachausdrücke. Der Punkt, d. Gerade, d. Kreis. Kegelschnitte. Koordinatentransformation u. Reduktion d. allg. Gleichung 2. Grades.

Gyldendalske Boghandel.

København.

Holst, Helge, & Kramers, H. A., Bohrs Atomteori almenfatteligt fremstillet. — 32 Fig. og 2 farvetr. Tavler. — 134 pp. 8. 1922.

Atomer og Molekyler. Lysbölgerne og Spektret. Ioner og Elektroner. Kerneatomet. Bohrs Teori for Brintspektret. Forskell. Anvend. af Bohrs Teori. Atombygn. og Stoffernes kem. Egenskaber. Bohrs Institut. Nogle Betegn. og fys. Konstanter m. m.

Hahnsche Buchhandlung.

Hannover.

Opus Palatinum. Sinus- und Cosinus-Tafeln von 10″ zu 10″. Herausg. von W. Jordan. 3. Aufl. — VII + 270 pp. 1923.

Georges G. Harrap & Co.

London.

Griffin, Frank Loxley, An introduction to mathematical analysis. — VIII + 512 pp. 8. 7/6.

Functions & graphs. Some basic ideas analysed. Differentiation. Integration. Trigonom. functions. Logarithms. Log. & expon. functions. Rectangular coördinates. Solution of equations. Polar. coörd. & trigonom. functions. Trigonom. analysis. Defin. integrals. Progressions & series. Permutations, combinations & probability. Complex number system. Retrospect & prospect.

Harrison & Sons.

London.

International research council. Second assembly held at Brussels, July 25th to July 29th, 1922. Report of proceedings ed. by Arthur Schuster, general secretary. — 145 pp. 8. 1923.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Hannover.

Jung, Heinrich W. E., Algebraische Flächen. — XVI + 410 pp. 8. 1924. Mk. 18.

Kurven auf einer algebr. Fläche u. d. Zahl ihrer Schnittpunkte. Differentialinvarianten. Ebene Schnitte u. Berührungskegel. Üb. d. Inflexions-

Tangenten. Üb. d. besond. Kurven d. Fläche. Die Zeuthen-Segresche Invariante u. d. arithmet. Geschlecht. Salmonsche Gleichungen.

Otto Hillmann, Verlag.

Leipzig.

Rawitz, B., Raum, Zeit und Gott. Eine kritisch-erkenntnistheoretische Untersuchung auf der Grundlage der physikalischen Relativitätstheorie. 2., unveränd. Aufl. — 80 pp. 8. 1923.

Schröder, Friedr., Neue Entdeckungen. Naturphysikalische Grundsätze; die Einzelkräfte der Materie und des Raumes; der Weltaufbau; das Naturkräfte-Diagramm der Erde usw. Naturphysik. — 80 pp. 8. 1923.

Die dreiteilige Bewegung. Drei unzertrennl. Natureinricht. (Das Naturgesetz, das Naturkräfte-Diagramm u. d. absolute Zeit.) Raumkraft, Formkraft u. d. Schwerkraft. (Die drei Einzelkräfte d. Materie.) Die einfachen u. losen Drehkörper. Die Sonne u. ihre Planeten. Anhang (der Weltaufbau).

Weinmann, R., Anti-Einstein. — 20 pp. 8. 1923.

S. Hirzel.

Leipzig.

Lichtenstein, L., Astronomie und Mathemtik in ihrer Wechselwirkung. Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper. — VII + 97 pp. 8. 1923.

Bewegung d. Himmelskörper. Gestalt u. Entwickl. d. Himmelskörper. Mathemat. Probleme in d. Theorie d. Figur d. Himmelskörper.

Francis Hodgson.

London.

Cunningham, A. J. C., Binomial factorisations, giving extensive congruence-tables and factorisation-tables. Vol. 1. — XCVI + 288 pp. 8. 1923.

Gen. introd. Linear and qudratic forms. Congruence-tables. Factorisation of binomials. Chains. Aurifeullians. Dimorphs, &c. Product-forms. Squares. Diophantine process.

GALLATLY, W., The modern geometry of the triangle. 2d ed. — VII + 126 pp. 8.

Direction angles. Medial and tripolar coordinates. Poristic triangles. Simson lines. Pedal triangles. The orthopole. Antipedal triangles. Orthogonal projection of a triangle. Counter points. Lemoine geom. Lemoine-Brocard geom. Pivot points. Tucker circles.

Alfred Kröner Verlag.

Leipzig.

KNOLL, C., Taschenbuch zum Abstecken der Kurven an Strassen und Eisenbahnen. 4. Aufl. Neu bearb. von W. WEITBRECHT u. M. KNOBLICH. — Bd. 1. VIII + 202 pp. 8. 1924.

Anleit. z. Abstecken v. Kreisbögen u. Übergangskurven. Aufstell. d. z. rechner. Ermittlung d. Absteckungsgrössen nötigen Gleichungen. Absteckung eines Kreisbogens v. bestimmten Halbmesser r, welcher zwei auf d. Gelände gegeb. Gerade L_1 u. L_2 berührt. Absteck. v. Kreis-Bögen mit bestimmtem Halbmesser r, welche durch gegeb. Punkte gehen. Absteck. v. Kreisbögen mit unbekanntem Halbmesser. Absteck. v. Tangenten an gegeb. Kreise. Korbbögen. Verbindungsstück bei wechselndem Achsabstand mehrgleisiger Bahnen. Schienenüberhöhung, Übergangskurven, Spurerweiterung, Ausrundung d. Neigungswechsel, Achsversicherung. Weichen. Bei d. Gleisberechn., Absteckung, Legung u. Unterhaltung auftretende Nebenaufgaben.

—»—, Bd. 2. IV + 203 pp. 8. 1924.

Macmillan.

London.

CAJORI, FLORIAN, A history of mathematics. 2d ed., rev. and enlarged. — VIII + 516 pp. 8. 1922.

The Babylonians. The Egyptians. The Greeks. The Romans. The Maya. The Chinese. The Japanese. The Hindus. The Arabs. Europe dur. the Middle Ages. Europe dur. the 16th, 17th & 18th centuries. The 19th & 20th centuries: synthetic geometry, analytic geom., algebra, analysis, theory of functions, theory of numbers, applied mathematics.

CARSLAW, H. S., Introduction to the theory of Fourier's series and integrals. 2d ed., completely revised. — XI + 323 pp. 8. 1921. 30/—.

Rational & irrational numbers. Infinite sequences and series. Functions of a single variable. Limits and continuity. The definite integral. The theory

of infinite series whose terms are functions of a single variable. Definite integrals containing an arbitrary parameter. Fourier's series. The nature of the convergence of Fourier's series. The approximation curves and Gibbs's phenomenon in Fourier's series. Fourier's integrals.

Duncan, J., & Starling, S. G., A text book of physics for the use of students of science and engineering. — XXIII + 1093 pp. 8. 1922. 18/—.

1. *Dynamics.* Introductory, fundam. units, mathem. formulae. Simple measurements & measuring appliances. Displacement, velocity. Compos. & resolution of velocities & acceler. Angular velocity & acceler. Inertia, Newton's law of motion. Static forces acting at a point. Moments of forces. Centre of parallel forces. Couples. Graph. methods of solution of probl. of uniplanar forces. Stress, strain, elasticity. Work, energy, power, friction. Motion of rotation. Centrifugal force. Impact, laws of collision. Hydrostatics. Pressure of the atmosphere. Floating bodies, principle of Archimedes. Liquids in motion. Bernoulli's theorem. Surface tension.

2. *Heat.* Temperature. Expansion of solids. Expans. of vessels. Calorimetry. Nature of heat. Transference of heat. Properties of gases. Kinetic theory of gases. Change of state. Properties of vapours. Atmospheric conditions. Heat engines. Steam engines & boilers. Internal combustion engines.

3. *Light.* Propagation of light, shadows. Illumin. & photometry. Reflection. Spher. mirrors. Refraction. Lenses. Opt. instruments. Prisms. Colour. Polarimetry & saccharimetry. Velocity of light.

4. *Sound.* Sounding bodies. Pitch, loudness. Wave motion. Sound waves. Interference. Intervals. Strings. Vibration of air in pipes. The ear.

5. *Magnetism and electricity.* Magnetisation. Magnetic fields. Terrestrial magnetism. Magn. properties of materials. The electric current. Potential difference. Electr. circuits. Galvanometers. Measurement of electromotive force & resistance. Electrolysis. Static electricity. The electrometer. Electr. influence machines. Electromagnetics. The dynamo & motor. The telegraph, the telephone, the carbon microphone, electric lamps. Thermo-electricity. Current in gases, X-rays, radio-activity. Wireless telegraphy.

Edwards, Joseph, A treatise on the integral calculus with applications, examples and problems. Vol. I. XX + 907 pp. 8. 1921. 50/—.

Nature of the problem. Preliminary considerations. Standard forms. Change of the independent variable. Integration by parts. Powers of sines and cosines. Rational algebraic fractional forms. Integrals of form

$$\int \frac{dx}{(a+b \cos x + c \sin x)^n}, \text{ etc.}$$

Further reduction formulae.

Form $\int F(x, \sqrt{R})\,dx$, where R is quadratic. Gen. theorems. Differentiation of a definite integral with regard to a parameter. Prelimin. to integration of $M/N\sqrt{Q}$, where Q is a quartic. Definitions of elliptic functions. Quadrature: Plane surfaces, Cartesians and polars, miscell. theorems. Rectification: Applic. of elliptic functions, miscell. theorems. Moving curves. Rectif. of twisted curves. Volumes of revolution, etc. Surfaces and volumes in general.

Edwards, Joseph, Vol. 2. XV + 980 pp. 8. 1922. 50/—.

Change of the variables in a multiple integral. Eulerian integrals, Gauss' Π function. Lejeune-Dirichlet integrals, Liouville integrals. Definite integrals. Logarithmic and exponential functions involved. The complex variable. Vectors. Conformal representation. Integration. Contour integration. Taylor's theorem. Elliptic integrals and functions. Elliptic integrals. The Weierstrassian forms. Elliptic functions. Reduction to standard forms. Calculus of variations. Double integrals. Culverwell's method of discrimination. Formulae of Lagrange and Fourier. Dirichlet's investigation. Mean values. Chance. Uncertainties of observation. Theories of Stokes and Green. Harmonic analysis. Supplem. notes.

Fisher, Arne, The mathematical theory of probabilities and its application to frequency curves and statistical methods. Transl. from the Danish by Charlotte Dickson and William Bonynge. With introductory notes by M. C. Rorty and F. W. Frankland. Vol. 1. 2d ed., greatly enlarged. — XXIX + 289 pp. 8. 1923.

1. Mathemat. probabilities and homograde statistics. Introd.: gen. principles and philosoph. aspects. Histor. and bibliograph. notes. The mathemat. theory of probabilities. The addition and multiplication theorems in probabilities. Mathemat. expectation. Probability a posteriori. The law of large numbers. Introductory formulas fr. the infinitesimal calculus. Law of large numbers. Mathemat. deduction. The theory of dispersion and the criterions of Lexis and Charlier. Applic. to games of chance and statist. problems. Contin. of the applic. of the theory of probabilities to homograde statist. series.

2. Frequency curves and heterograde statistics. The theory of errors and frequency curves and its applic. to statist. series. Gen. remarks. The mathemat. theory of frequency curves.

3. Pract. applications of the theory. The numer. determination of the parameters. Logarithmically transformed frequency functions. Frequency curves and their relation to the Bernoullian series. Poisson—Charlier frequency curves for integral variates.

Gray, Andrew, Absolute measurements in electricity and magnetism. 2d ed. — XIX + 837 pp. 8. 1921. 42/—.

Units and dimensions of phys. quantities. Magnets. Magnetic potential. Potential energy of a magnet. Magn. induction. Vector potential. Magn. energy. Applic. of gen. theory. Magn. shells. Lamellar distrib. Uniformly magnetized ellipsoid. Induced magnetization. Definit. of unit current. Determin. of the horizontal component of the earth's magn. field-intensity. Currents in derived circuits and in a network of linear conductors. Theory of electromagn. action. Magn. fields due to currents. Magn. action of coils. Calculation of constants of coils & coefficients of induction. Magn. action of circuits & coils. Dynam. theory of mutually influencing circuits. Distrib. of alternating currents in parallel conductors. Measurement of activity in electr. circuits. Comparison of resistances. Galvanometry and measurement of currents. Calculation of inductances. Measurement of inductances. Absol. measurement of resistance. Comparison of units. Electrostatic measurements. Effect of inductivity of the medium on electr. phenomena. Measurements of specific inductive capacity. Appendix I—VII.

Hall, H. S., & Stevens, F. H., A shorter geometry for schools. P. 1. — X + 164 + IV pp. 8. 1924.

—»—, A shorter school geometry. P. 2. — VIII + 304 + VIII pp. 8. 1924. 2 s. 6d.

The circle. Squares & rectangles. Proportion & similar figures.

Tipografia editrice Cav. F. Mariotti.

Bortolotti, E., I sistemi di Darboux alle derivate parziali. — 128 pp. 8. 1922.

I sistemi semplici del Darboux. I sistemi intermediari (II) di Darboux. Prima dimostrazione del Teorema gen. di esistenza ed unicità. Nuova dimostrazione del teorema d'esistenza e unicità dei sistemi intermediari di Darboux. Estensione a sistemi più generali.

Methuen & Co.

London.

Benedicks, Carl, Space and time. An experimental physicist's conception of these ideas of their alteration. With an introduction of Sir Oliver Lodge. — XIV + 98 pp. 8. 1924.

J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung.

Stuttgart.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. Fortgesetz von C. Reinhertz. Bd. 3. Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung. Mit zahlreichen Abbildungen. 7., erweiterte Aufl. bearb. von O. Eggert. — XI + 836 + 79 pp. 8. 1923.

Haupttriangulierung. Mathemat. Hilfs-Mittel d. geodät. Entwicklungen. Das Erdellipsoid. Sphär. Dreiecksberechnung. Sphär. Koordinaten. Normalschnitte u. geodät. Linie. Sphäroid. Dreiecksberechn. Sphäroid. Koord. Konforme Abbild. d. Ellipsoids auf d. Kugel. Bestimm. d. Dimensionen d. Erd-Ellipsoids durch Gradmessungen. Mathemat. Erdgestalt u. d. Schwerkraft. Messung d. Schwerkraft. Lotabweichungen. Period. Lotstörungen u. Polbewegung.

Hermann Meusser.

Berlin.

Gehrcke, E., Die Massensuggestion der Relativitätstheorie. Kulturpsychologische Dokumente. Mit 17 Abbild. — 108 pp. 8. 1924.

—»—, Kritik der Relativitätstheorie. Gesammelte Schriften über absolute und relative Bewegung. — 99 pp. 8. 1924.

P. Noordhoff.

Groningen.

Rutgers, J. G., Meetkunde der kegelsneden (met atlas). (Noordhoff's verzam. van wiskund. werken. D. 9.) — 129 pp. 8. 1924.

De kegelsneden als doorsneden v. een omwentelingskegel met een plat vlak. Constructies en daarmede samenhangende eigenschappen, voortvloeiende uit de brandpuntseigenschappen. De ellips als parallelprojectie v. een cirkel. Hiermede samenhangende eigenschappen en constructies betr. de ellips. De stellingen v. Pascal en Brianchon. Projectieve ontstaanswijze der kegelsneden.

—»—, Inleiding tot de analytische meetkunde. (Noordhoff's verzameling van wiskund. werken. D. 7.) D. 1. Het platte vlak. Met atlas. — XIV + 299 pp. 8. 1923. f. 6.50.

Cartesische en poolcoördinaten. Krommen door vergelijkingen voorgesteld. Transformatie-formules. Algebr. krommen. Homog. coörd. De rechte lijn. De cirkel. Meetkund. plaatsen. De krommen v. d. tweeden graad. Pool en poolijn bij de kegelsneden. Over het opstellen d. vergelijk. van kegelsneden, die aan bepaalde voorwaarden voldoen. Lineaire stelsels v. kegelsneden.

Rutgers, J. G., Vol. 2. De ruimte. Met atlas. — XIV + 302 pp. 8. 1923. f. 6.50.

Cartesische coörd. Oppervlakken en ruimtekrommen in het algemeen. Transform.-formules. Homog. coörd. Het platte vlak. De rechte lijn. Het boloppervlak. Meetkund. plaatsen. De oppervlakken v. d. 2. graad. Pool en poolvlak bij de oppervlakken van den 2. graad. Eenvoud. vergelijk v. O_2. Over het opstellen d. vergelijk. v. $O_2's$, die aan bepaalde voorwaarden voldoen. Doorsnede v. $O_2's$ en lin. stelsels $O_2's$. Cycl. doorsneden v. O_2. Algebr. oppervlakken en algebr. krommen.

Schuh, Fred., Vraagstukken over differentiaal- en integraalrekening en over analytische en beschrijvende meetkunde, in het bijzonder met het oog op het examen wiskunde KV. D. 3. Vraagstukken over differentiaal- en integraalrekening met volledige aanwijzingen ter oplossing. — 478 pp. 8. 1924. f. 14.50.

Vraagstukken differentiaalrek. Vragstukken integraalrek. Overzicht over de gemengde opgaven differentiaalrek.

—»—, Lessen over de hoogere algebra. Uitgeg. als 9. druk van Lobatto's lessen over de hoogere algebra. D. 1. — XX + 525 pp. 8. 1921. f. 13.75.

Determinanten. Toepassing d. determin. op het oplossen v. lineaire vergelijk. Lin. transformaties. Kwadrat. vormen. Complexe getallen. Eenvoud. eigenschappen d. hoogere-machtsvergelijk. Grenzen d. wortels eener hoogere-machtsvergelijking. Stellingen betr. het bestaan v. reëele wortels v. een hoogere-machtsvergelijking. Theorema v. d'Alembert en gevolgen daarvan. Afzond. d. wortels met gegeven multipliciteit. Bepaling d. meetbare wortels eener vergelijk. met meetbare coëfficienten. Theorema v. Rolle. Regel v. Descartes betr. het aantal posit. wortels. Theor. v. Budan-Fourier. Theor. v. Sturm. Benadering d. reëele wortels v. een hoogere-machtsvergelijking. De S-vergel. (Seculaire vergel.) met toepassing op kwadrat. vormen.

—»—, D. 2. — XVI + 357 pp. 8. 1924. f. 11.50.

Geheele rationale functies van meerdere veranderlijken. Symmetr. functies d. wortels eener n^{de} machtsvergel. Discriminant v. een hoogere-machtsvergelijking. Binomiaalvergelijkingen. Oplossing d. derde- en vierdemachtsvergelijking met behulp v. wortelvormen. Oplosbaarheid v. hoogere-machtsvergelijkingen met wortelvormen. Eliminatiemeth. bij twee hoogere-machtsvergel. Het oplossen v. twee of meer hoogere-machtsvergel. met meerd. onbekenden. Discriminant v. een veelterm in een of meer veranderlijkingen. Splitsing v. een rationale functie in partiëelbreuken.

VERSLUYS, J., Perspectief. 2. Herzien door H. de Vries. 5. druk. — 174 pp. 8. 1924. f. 3.00.

Schaduwbepaling bij zonlicht. Algem. eigenschappen. Perspectieven v. zonnestralen. Bepaling v. het zonpunt. Schaduwbepaling bij kaarslicht. Algem. eigenschappen. Perspectieven v. lichtstralen. De gezichtshoek. Luchtperspectief. Lichtsverstrooiing. Zinsbegoochelingen. Geschied. d. perspectief. Overzicht.

—»—, 3. Herzien door H. de Vries. 4. druk. — 150 pp. 8. 1924. f. 3.00.

Het verdeelen v. lijnen. Het snijden v. rechte lijnen en platte vlakken. Doorsneden v. kegels en cylinders. Perspectief v. gewelven. Schaduwen v. kegels en cylinders. Wenteling v. staande vlakken. Schaduwen op kegels en cylinders . . .

WIJDENES, P., Vraagstukken over hoogere algebra en rekenkunde. 2. druk. — 178 pp. 8. 1924.

Permutaties en combinaties. Machten v. een Polynomium. Rekenkund. reeksen v. hoogere orde. Determinanten. Lineaire vergelijkingen. Complexe getallen. Eenvoudigste eigenschappen v. hoogere machtsvergelijkingen. Grenzen d. wortels. Het begrif functie. Reëele wortels. Over de wortels v. een n^{de} machtsvergelijking. Theorema v. Rolle. Maxima en minima. De stellingen v. Descartes, Budan en Sturm. Oplossing v. hoogere machtsvergelijkingen. Splitsing in gebrokens. Limieten; afgeleiden. Oneindig voortloopende reeksen. Wederkeerige reeksen. Kettingbreuken met toepassingen. Binomium. Exponentieele en logarithm. functies. Transcendentale functies met complexe variabele. Symmetr. functies. Eliminatiemethoden. Algem. herhaling v. de hoogere algebra. — Rekenkunde. Gemengde opgaven ov. rekenkunde.

VRIES, HK. DE, Leerboek der differentiaal- en integraalrekening, en van de theorie der differentiaalvergelijkingen. (Noordhoff's verz. van wiskund. werken. D. 6.) D. 1. De differentiaal-, en elementaire integraalrekening. 2. druk. — 765 pp. 8. 1924. f. 19.80.

Grondslagen d. differentiaalrekening. Afgeleiden d. elem. functies. Hoog. afgeleiden en differentialen. Implic. functies. Partieele afgel. Invoeren v. nieuwe veranderl. Grondslagen d. integraalrek. Integreeren v. rationale en irrat. breuken. Bepaalde integralen, en eenvoud. meetkund. toepassingen d. differentiaal- en integr.-rek. Theorie d. oneindige reeksen. Reeksen v. Taylor en Mac-Laurin. Toepass. d. differ. en integr.-rek. op de theorie d. vlakke krommen. Kromming v. vlakke krommen. Kromtestraal, krommingsmiddelpunt, evoluut, enz. Functies. v. meer dan éen veranderl. Meervoud. integr. Meetkund. toepass. d. functies v. éen en twee onafhank. veranderl.

VRIES, HK. DE, Beknopt leerboek der projectieve meetkunde. (Noordhoff's verzameling van wiskund. werken. D. 8.) — 306 pp. 8. 1923. f. 7.50.

University of North Carolina press.

Chapel Hill.

HENDERSON, A., HOBBS, A. W., & LASLEY, J. W., The theory of relativity. Studies and contributions. — XIII + 99 pp. 8. 1924.

Some experim. anticipations. The spec. theory. The gen. theory. On the curvature of manifolds.

R. Oldenbourg.

München u. Berlin.

Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Unter Mitw. von C. WIESELSBERGER und A. BETZ herausg. von L. PRANDTL. — Lief. 1. Mit einer Beschreibung der Anstalt und ihrer Einrichtungen und einer Einführung in die Lehre vom Luftwiderstand. — 140 pp. 8. 1923.

Beschreib. d. Anlage d. Versuchseinricht. Einführ. in d. Lehre v. Luftwiderstand. Versuchstechnik. Versuchs-Ergebnisse.

—»—, L. 2. — 80 pp. 8. 1923.

Beschreib. d. kleinen Windkanals. Beschreib. v. Messeinrichtungen. Der induzierte Widerstand v. Mehrdeckern. Versuchsergebnisse.

OBERTH, H., Die Rakete zu den Planetenräumen. Mit 2 Taf. und 58 Textabb. — 92 pp. 8. 1923.

Arbetsweise u. Leistungsfähigkeit. Beschreibung d. Modells B. Diskussion d. techn. Durchführung. Zweck u. Aussichten.

Orient-Buchhandlung Heinz Lafaire.

Hannover.

SCHOY, K., Über den Gnomonschatten und die Schattentafeln der arabischen Astronomie. Ein Beitrag zur arabischen Trigonometrie nach unedierten arabischen Handschriften. Mit 5 Abb. — 29 pp. 4. 1923.

Begriff u. Arten d. Schattens. Urspr. u. Erstellung d. Schattentafeln. Der saṭr ʿadd al-qusîj (Kolumne d. Gradzahl). Genauigk. d. trigonometr. Funktionswerte. Das Interpolationsverfahren des Abû ʾl-Rîḥân al-Bîrûnî. Bedeut. d. Schatten (Tangenten od. Kotangenten) in d. arab. Astron. Besond. Schattenprobleme aus d. Ḥâkimitischen Tafeln des Ibn Yûnus.

Clarendon Press.

Oxford.

Bowley, A. L., The mathematical groundwork of economics. An introductory treatise. — VIII + 98 pp. 8. 1924.

Simple exchange in two commodities. Multiple exchange. Production. Supply and demand of the factors of production. Gen. equations of supply and demand in a stationary population. Applic. of the gen. equations. Surplus value, rent and taxation. Appendix. Summary of the mathemat. ideas and formulae used.

Oxford University Press.

Hart, Ivor B., Makers of science. Mathematics. Physics. Astronomy. — 320 pp. 8. 1923. 6/—.

Aristotle. The school of Alexandria. Roger Bacon. Copernicus. Johann Kepler. William Gilbert, father of magn. philosophy. Galileo, founder of exper. science. Descartes and co-ord. geom. Sir Isaac Newton. Rob. Boyle. Ampère and magn. electricity. Sir Humphrey Davy. Ohm and his famous law. Mich. Faraday. Lord Kelvin and applied science. Science to-day & tomorrow. Bibliography.

Circolo matematico di Palermo.

Ruffini, Paolo, Opere matematiche. Pubbl. sotto gli auspici del Circolo matematico di Palermo a cura di E. Bortolotti. T. 1. — XIII + 421 pp. 8. 1915.

Teoria gen. delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebr. delle equazioni gen. di grado super. al quarto. Appendice alla Teoria delle equazioni. Rischiarimenti e risposte alle obbiezioni. Della soluzione delle equazioni algebr. determinate particolari di grado super. al quarto.

G. B. Paravia & Cie.

Torino.

Ciamberlini, Corrado, Saggi di didattica matematica. Raccolta di scritti vari preceduti da una lettera di R. Marcolongo. (Coll. Paravia.) — VIII + 215 pp. 8. 1920. L. 15.

Peano, G., Giochi di aritmetica e problemi interessanti. — 63 pp. 8. L. 3.75.

Operazioni curiose. Indovinelli aritm. Abaco. Operazioni aritm. semplificate. Probl. sul calendario (anni, mesi, giorni della settimana). Età della Luna. Pasqua. Probl. pratici.

Ministère de l'instruction publique.

Paris.

Bibliographie des travaux scientifiques (sciences mathématiques, physiques et naturelles) publ. par les sociétés savantes de la France dressée sous les auspices du Ministère de l'instruction publique. T. 1: Livr. 1—3, par J. Deniker. — III + 607 pp. 4. 1895—1897. — T. 2: Livr. 1, par R. Descharmes. — VII + 235 pp. 4. 1922.

Les presses universitaires de France.

Paris.

Atanassievitch, Xénia, La doctrine métaphysique et géométrique de Bruno, exposée dans son ouvrage »De triplici minimo». — 156 pp. 8. 1923.

Les précurseurs de la doctrine du minimum de Bruno. La doctrine du minim. de Bruno. Critique de la doctr. du minim. de Bruno.

Casa editrice Giuseppe Principato.

Messina.

Marcolongo, R., Relatività. 2:a ed. rived. ed. ampl. (Biblioteca di matematiche superiori, dir. da R. Marcolongo e G. Scorza.) — XII + 235 pp. 8. 1923.

1. Fondamenti analit. della teoria della relatività.

Le forme quadrat. differenziali. Elementi del calcolo differenziale assoluto.

2. La teoria della relatività in senso stretto.

Relatività in senso stretto. Le trasformazioni spec. di Lorentz. La meccanica relativistica. Il principio di relatività secondo Minkowski.

3. La teoria gen. della relatività.

Le equazioni del campo gravitazionale. Statica einsteiniana. Lo spostamento del perielio di Mercurio e la flessione dei raggi luminosi in un campo gravitazionale.

Appendice. 1. Cenni sulla metrica di uno spazio multiplo. 2. Uno guardo sintet. alla teoria spec. e gen. della relatività.

Vivanti, Giulio, Elementi del calcolo delle variazioni. — 290 pp. 8. 1923. L. 40.

1. Condiz. dipend. dalle variazioni prime. Il probl. fond. del calc. delle var. nel caso più sempl. Metodo parametr. Soluz. discontinue. Massimi e minimi condizionati o probl. isoperimetr. Integrali con limiti variabili. Integr. contenenti deriv. d'ord. super. Integr. cont. più funz. Probl. di Lagrange. Integr. doppi. 2. Condiz. dipend. dalle var. d'ord. super. Il probl. fond. nel caso più sempl. Metodo parametr. Soluz. discontinue. Massimi e minimi condizionati o probl. isoperimetr. Integr. con lim. variab. Probl. di Lagrange. Integr. doppi. Append.: Il calc. funz. e il calc. delle var. Il min. assoluto.

L. Röhrscheid.

Bonn.

Bucherer, A. H., Die Planetenbewegung auf Grund der Quantentheorie und eine Kritik der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. 2. Aufl. erw. durch eine allgem. Kritik der Einsteinschen Relativitätstheorie. — IV + 42 pp. 8. 1924.

Rösl & Cie.

München & Leipzig.

Kühn, F. R., Descartes' Verhältnis zu Mathematik und Physik. Zugleich als eine Einführung in die Philosophie für Mathematiker und Physiker. (Philosophische Reihe herausg. von Alfr. Werner. Bd 77.) — 173 pp. 8. 1923.

Van Rysselberghe & Rombaut.

Gand.

Stuyvaert, M., Introduction à la méthodologie mathématique. — 257 pp. 8. 1923. 20 fr.

Préliminaires. Principes de l'arithmétique. Congruences. Fractions ordinaires. Nombres irrationnels. Nombres négatifs. Corps et domaines. Nombres imaginaires. Exposants algébr. Problèmes antiques. Principes de la géom. Géom. gén. projective.

F. Sangiovanni & Figlio.

Napoli.

Amodeo, F., Sopra alcune opere matematiche napoletane estremamente rare. (Atti dell' Accademia Pontaniana.) — 31 pp. 8. 1924.

Schulzesche Hofbuchdruckerei u. Verlagsbuchhandl., Rud. Schwartz.

Oldenburg i. Gr.

Röver, G., Zur Lehre vom Raum. Ein Standpunkt, gewonnen durch eine Betrachtung d. Lehre Kants vom Raum. — 80 pp. 8. 1922.

Kurze Betracht. üb. d. Raumproblem in Philos. u. Wiss. vor Kant u. Kants Stellung dazu. Bedeut. des a priori, welches d. eigentl. Grundlage bildet f. Kants Lehre v. Raum. Kants Ansicht v. Form u. Materie als Voraussetzung seiner Lehre v. Raum. Kants Beweise f. d. Apriorität d. Raumes in d. metaphys. Erörterung. Kants Beweise f. d. Anschauungsnatur d. Raumes in d. metaphys. Erörterung. Kants transzendentale Erörterung als Beweis dafür, dass d. Raum eine Anschauung a priori ist.

L. W. Seidel & Sohn.

Wien.

Bertini, Eugenio, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Mit einem Anhang über algebraische Kurven und ihre Singularitäten. Nach der 2. italienischen Aufl. Deutsch herausg. von Adalbert Duschek. — XXII + 480 pp. 8. 1924. Kr. 19.25.

Der Raum S_r. Der Raum Σ_r u. seine Beziehungen zum S_r. Projektivität verschiedener S_r. Kollineationen eines Raumes S_r in sich. Korrelationen eines Raumes S_r in sich. Hyperflächen zweiten Grades. Büschel von V_{r-1}^2. Hyperflächen. Allgem. Mannigfaltigkeiten. Lineare Systeme v. Hyperflächen. Eigenschaften linearer Syst. bez. d. Basismannigfaltigkeit. Die Postulationsformel. Moduln. Darstell. einer Form durch lin. Kombinationen anderer. Rationale Kurven. Rationale Regelflächen. Die V_2^{r-1} des S_r. Die Veronese'sche Fläche. Zweige einer alg. Kurve. Einige fund. Eigenschaften derselben. Quadrat. Transform. Auflös. eines mehrfachen Punktes einer ebenen Kurve. Über d. Korrespondenzprinzip v. Chasles. Die Zeuthen'sche Formel. Die Formeln v. Cayley u. Veronese.

Rothe, H., Einführung in die Tensorrechnung. — [4] + 179 pp. 8. 1924.

Mannigfaltigk. v. Wertesystemen. Mannigfaltigk. v. belieb. Elementen. Skalare u. Skalarfelder. Ortsfunktionen. Transformation d. Koordinaten. Linienelemente. Invariante u. nicht invariante Funktionen. Kontravariante Vektoren. Kovariante Vektoren. Addition v. koinitialen Vektoren. Multipl. v. Vektoren mit Skalaren. Multipl. v. koinitialen Vektoren untereinander. Tensoren. Tensoralgebra. Multipl. u. Verjüngung v. Tensoren. Lineare Formen. Konjugierte Tensoren. Symmetr. Tensoren. Schiefsymmetr. (antisymmetr.) Tensoren. Lineare Abhängigk. v. Tensoren. Lineare Vektormannigfaltigk. Tensorfelder.

Smithsonian Institution.

Washington.

Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions. Mathematical formulae prep. by E. P. Adams. Tables of elliptic functions prep. under the direction of Sir George Greenhill by R. L. Hippisley. (Smithsonian miscellaneous collections, Vol. 73, N:o 1.) — VIII + 309 pp. 8. 1922.

Algebra. Geom. Trigonometry. Vector analysis. Curvilinear coördinates. Infinite series. Special applic. of analysis. Differ. equations. Numer. solution of differ. equations. Elliptic functions.

J. Springer.

Berlin.

Blaschke, Wilhelm, Vorlesungen über Differential-Geometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. 1. Elementare Differentialgeometrie. 2., verbess. Aufl. mit einem Anhang von K. Reidemeister. Mit 40 Textfig. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Herausg. von R. Courant. Bd 1.) — XII + 242 pp. 8. 1924.

Kurventheorie. Extreme bei Kurven. Anfangsgründe d. Flächentheorie. Geom. auf einer Fläche. Fragen d. Flächentheorie i. grossen. Extreme bei Flächen. Liniengeom. Über d. Kugel.

Born, A., Isostasie und Schweremessung, ihre Bedeutung für geologische Vorgänge. Mit 31 Abb. — 160 pp. 8. 1923.

Die Lehre v. d. Isostasie. Voraussetzungen. Schweremessung. Heut. Gleichgewichtszustand d. Erdkruste. Pseudo-Anisostasien. Theoret. Erörter. z. Ablauf. isostat. Vorgänge. Isostasie u. Orogenese. Diluviale Vereisung u. Isostasie. Sedimentation u. Abtragung. Die ozeanischen Vulkaninzeln. Isostasie u. Erdbeben. Lokale u. regionale Kompensation. Isostasie u. Grossformen d. Erde.

Courant, R., & Hilbert, D., Methoden der mathematischen Physik. Bd 1. Mit 29 Abb. (Die Grundlehren der mathematischen Wiss. Herausg. von R. Courant. Bd 12.) — XIII + 450 pp. 8. 1924.

Die Algebra d. linearen Transformationen u. quadrat. Formen. Das Problem d. Reihenentwickl. willkürlicher Funktionen. Theorie d. linearen Integralgleichungen. Grundtatsachen d. Variationsrechnung. Schwingungs- u. Eigenwertprobl. d. mathemat. Physik. Anwendung d. Variationsrechnung auf d. Eigenwertprobl. Spez. durch Eigenwertprobl. definierte Funktionen.

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Herausg. von der Schrift-Leitung der »Naturwissenschaften». Bd 3. — 404 pp. 8. 1924.

Brill, A., Die Strahlung d. Sterne. Hess, R., Die Statistik d. Leuchtkräfte d. Sterne. Kienle, H., Die astronom. Prüfungen d. allgem. Relativitätstheorie. Minkowski, R., & Sponer, H., Üb. d. Durchgang v. Elektronen durch Atome. Laski, G., Ultrarotforschung. Gudden, B., Elektrizitätsleitung in kristallisierten Stoffen unter Ausschluss d. Metalle. Meitner, Lise, Der Zusammenhang zwischen β- und γ-Strahlen. Gerlach, W., Atomstrahlen. Hückel, E., Zur Theorie d. Elektrolyte. Günther-Schulze, Elektr. Ventile u. Gleichrichter. Katz, I. R., Quellung. T. 1.

Fraenkel, A., Einleitung in die Mengenlehre. Eine elementare Einführung in das Reich des Unendlichgrossen. 2., erweit. Aufl. Mit 13 Textfig. (Die Grundlehren d. mathemat. Wiss. in Einzeldarstell. Herausg. von R. Courant. Bd 9.) — IX+251 pp. 8. 1923.

Einl. Begriff d. Menge. Beispiele v. Mengen. Begriffe d. Äquivalenz, d. Teilmenge, d. unendl. Menge. Abzählbare Mengen. Das Kontinuum. Begriff d. Kardinalzahl od. Mächtigk. Die Kardinalzahlen a, c und f. Grössenordn. d. Kardinalzahlen. Addition u. Multipl. d. Kardinalzahlen. Potenzierung d. Kardinalzahlen. Geordnete Mengen. Ähnlichk. u. Ordnungstypus. Lineare Punktmengen. Wohlgeordnete Mengen u. Ordnungszahlen. Wohlordn. u. ihre Bedeutung. Einwände gegen d. Mengenlehre. Notwendigk. einer veränderten Grundlegung u. Wege hierzu. Der axiomat. Aufbau d. Mengenlehre. Die axiomat. Methode. Schluss.

Günther, Paul, Tabellen zur Röntgen-Spektralanalyse. — 61 pp. 8. 1924.

Hammarsten, H., Untersuchungen einiger hochmolekularer Elektrolyte mit Hinsicht auf ihre Bedeutung in der Zelle. Inaug.-Diss. der Hochschule zu Stockholm. (Aus: Biochemische Zeitschrift. Bd 147.) — 63 pp. 8. 1924.

Harnack, Adolf von, Immanuel Kant 1724—1924. Gedächtnisrede zur Einweihung des Grabmals im Auftrag der Albertus-Universität und der Stadt Königsberg in Preussen am 21. April 1924 im Dom zu Königsberg gehalten. — 14 pp. 8. 1924.

Hertz, P., Über das Denken und seine Beziehung zur Anschauung. T. 1. Über den funktionalen Zusammenhang zwischen auslösendem Erlebnis und Enderlebnis bei elementaren Prozessen. — X+167 pp. 8. 1922.

Problemstellung u. Methode. Beantwortung einer Vorfrage. Log. Vorbetrachtungen. Mathemat. Sätze u. mathematisch zu fassende Sätze. Der relat. Raumsinn. Der absolute Raumsinn. Gleichkeitstranszendenz u. and. Transzen-

denzen. Mathemat. Sätze (geometr. Sätze); vorbereitende Betrachtungen. Erklär. f. d. Bestehen mathemat. Sätze. Anhang.

Hölder, Otto, Die mathematische Methode. Logisch erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik. Mit 235 Abb. — X+563 pp. 8. 1924.

1. Beispiele aus d. einz. Gebieten.

Der geometr. Beweis. Beweise und Konstruktionen in d. Mechanik. Synthese d. Massbegriffs. Die mathemat. Stetigk. Eigensch. unendlicher Punktmengen. Analyt. Geom. Widerspruchslosigk. u. Unabhängigk. d. geometr. Axiome. Höhere Mannigfaltigkeiten. Methode d. Grenzwerte od. Infinitesimalverfahren. Funktion u. Differentialquotient. Reine niedere Arithmetik d. reellen Zahlen. Die sogen. imaginären Zahlen u. ihre Anwendungen. Höhere Arithmetik d. reellen Zahlen.

2. Logische Analyse d. Methoden.

Allgemein log. Vorbemerkungen. Bausteine zu einer Logik d. mathemat. Wiss.

3. Der Zusammenhang mit d. Erfahrung.

Die Tatsachen räumlicher Wahrnehmung u. d. Grundbegriffe u. Axiome d. Geom. Tatsachen u. Annahmen in d. klass. Mechanik. Tatsachen u. Annahmen in d. Physik.

Anhang 1. Die Kunst d. Untersuchung.

Anhang 2. Paradoxien u. Antinomien.

Zenneck, J., Elektronen- und Ionen-Ströme. Experimental-Vortrag bei der Jahres-Versammlung des Verbandes deutscher Elektrotechniker am 30. Mai. Mit 41 Abb. — 48 pp. 8. 1923.

Konorski, B. M., Die Grundlagen der Nomographie. Mit 72 Abb. im Text. — 86 pp. 8. 1923.

Allgem. Bemerk. Darstell. einer Funktion einer Variabeln mittels Kurve u. mittels Skala. Die Potenz- u. d. logarithm. Skala. Die projektive Skala. Nomograph. Tafeln mit 3 parall. Skalen. Nomograph. Tafeln mit 2 Parallelen u. einer sich schneidenden Geraden. Tafeln mit 3 einander schneidenden Geraden. Tafeln mit krummlinigen Skalen. Allgem. Gleich. Zentralprojektion einer krummlin. Skala auf eine Gerade; auf eine Kurve. Nomograph. Tafeln mit einer krummlin. Skala; mit 2 od. 3 krummlin. Skalen. Zusammenstellung d. Resultate. Die zusammengesetzten Tafeln. Tafeln f. 4. Variable mit d. Schnittsystem 2. Grades. Duale Nomogramme, Kurvenscharen. Metr. Nomogramme.

KRIES, JOHANNES VON, Immanuel Kant und seine Bedeutung für die Naturforschung der Gegenwart. — IV + 127 pp. 8. 1924.

Kant als Naturforscher. Kants Lehre v. d. Mathem. Das Kausalprinzip. Die teleolog. Betrachtung d. belebten Natur.

LACMANN, O., Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln. Ein Lehrbuch der Nomographie. Mit 68 Abb. im Text und auf 3 Taf. — VIII + 100 pp. 4. 1923.

Zur Einführung. Gezeichnete Rechentafeln f. Gleichungen mit 2 Veränderlichen. Gezeichnete Rechentafeln für Gleichungen mit 3 Veränderlichen. Gezeichnete Rechentafeln f. Gleichungen mit 4 od. mehr Veränderlichen. Räumliche Rechenmodelle.

LEVI-CIVITA, T., Fragen der klassischen und relativistischen Mechanik. Vier Vorträge gehalten in Spanien im Januar 1921. Autor. Übers. Mit 13 Textfig. — VI + 110 pp. 8. 1924.

Regularisierung d. Drei-Körper-Problems u. ihre Tragweite. Flüssigkeitswellen: Ausbreitung in Kanälen. Parallelismus u. Krümmung in einer belieb. Mannigfaltigkeit. Die geometr. Optik u. d. allgem. Einsteinsche Relativitätsprinzip.

LOEWY, ALFRED, Versicherungsmathematik. 4., neubearb. und durch Hinzunahme der Invalidenversicherung. Erweit. Auflage. — V + 224 pp. 8. 1924.

Zins. Sterblichkeitstafeln. Einmalige Nettoprämien f. d. Versich. auf d. Leben einer Person. Jährl., gleichbleibende Prämienzahlung. Die Praxis. Deckungskapital od. Prämienreserve. Die Bilanz. Versich. auf verbundene Leben. Selektionssterbetafeln. Invalidenrenten. Die Ausscheidetafel f. Aktive u. ihre Bedeut. f. d. Invalidenversicherung. Soz. Hinterbliebenenversicherung. Deckungssysteme einer Versicherung. Ausgew. Fragen d. Lebensversicherung. Tafel f. Versicherungstreue u. Dividendenreserve.

LORENZ, H., Lehrbuch der technischen Physik. 2., neubearb. Aufl. Bd 1. Technische Mechanik starrer Gebilde. 2., vollst. neubearb. Aufl. der Techn. Mechanik starrer Systeme. T. 1. Mechanik ebener Gebilde. Mit 295 Textabb. — VIII + 390 pp. 8. 1924.

1. Kinematik ebener Gebilde.

Geometr. Bewegungslehre. Zeitl. Bewegungsänderungen. Einfache u. zusammengesetzte Schwingungen. Gezwungene u. Relativbewegung.

2. Dynamik d. Massenpunktes.

Grundlagen d. Dynamik d. Massenpunktes. Die allg. Schwere. Widerstandskräfte. Dynamik ebener Schwingungen.

3. Statik ebener Gebilde.

Analyt. Statik. Graph. Statik. Das Reibungsgleichgewicht.

4. Dynamik starrer Gebilde.

Grundlagen d. Dynamik starrer Gebilde. Reibungsfreie Bewegung starrer Scheiben. Scheibenbewegung mit Widerständen. Der Stoss fester Scheiben. Die Seilbewegung.

Ludwig, W., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. T. 3. Das rechtwinklige Zweitafelsystem. Krumme Flächen. Axonometrie. Perspektive. Mit 47 Textfig. — V + 169 pp. 8. 1924.

Abschn. 5. Flächen.

Gerade Regelschraubenflächen. Schiefe Regelschraubenflächen. Hüllflächen. Das geradlinige Drehhyperboloid. Schatten krummflächig begrentzter Körper.

Abschn. 6. Projektion auf eine einzige Risstafel.

Axonometrie. Gesetze d. Zentralprojektion. Herstellung perspektiver Bilder.

Nörlund, Niels Erik, Vorlesungen über Differenzenrechnung. (Die Grundlehren der math. Wiss. Bd 13.) — IX + 551 pp. 8. 1924.

Grundbegriffe. Die Bernoullischen u. Eulerschen Polynome. Die Summe einer gegeb. Funktion. Hauptlösungen i. komplexen Gebiet. Die Gammafunktion u. verwandte Funktionen. Die höheren Bernoullischen u. Eulerschen Polynome. Mehrfache Summen. Interpolationsreihen. Fakultätenreihen. Allgem. üb. homogene lineare Differenzengleichungen. Homog. lineare Differenzengleichungen mit rationalen Koeffizienten. Homog. lineare Differenzengleichungen, deren Koeffizienten sich mit Hilfe v. Fakultätenreihen ausdrücken lassen. Die Untersuchungen v. Birkhoff. Vollständ. lineare Differenzengleichungen. Reziproke Differenzen u. Ketten-Brüche.

Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke. Im Auftr. der Nachkommen herausg. von C. Schrilling. Bd 1—3. 8.

1. Gesammelte Werke. XIX + 707 pp. 1894. 2—3. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. Abth. 1—2. VI + 767, IV + 758 pp. 1900—09.

Runge, C., & König, H., Vorlesungen über numerisches Rechnen. Mit 13 Abb. (Die Grundlehren der mathemat. Wissenschaften. Herausg. von R. Courant.) — VIII + 372 pp. 8. 1924.

Das Rechnen u. seine Hilfsmittel. Lineare Gleichungen. Ausgleichungsrechnung. Ganze rationale Funktionen. Das Rechnen mit unendl. Reihen. Gleichungen mit einer Unbekannten. Gleichungen mit mehr. Unbekannten. Annäherung willkürl. Funktionen durch Reihen gegebener. Numer. Integration v. gewöhnl. Diff.-Gleichungen. Auflösung d. Aufgaben.

Schneider, Erich, Mathematische Schwingungslehre. Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sowie einiges über partielle Differentialgleichungen und Differenzengleichungen. Mit 49 Textabb. — VI+194 pp. 8. 1924.

Gewöhnl. Diff.-Gleichungen; Schwingungen bei einem Freiheitsgrade. Systeme v. 2 gewöhnl. Diff.-Gleichungen; Schwingungen bei 2 Freiheitsgraden. Systeme v. mehr als 2 gewöhnl. Diff.-Gleichungen; Schwingungen bei mehr als 2 Freiheitsgraden. Diff.-Gleichungen, die sich auf solche mit konstanten Koeffizienten zurückführen lassen. Partielle Diff.-Gleichungen; Schwingungen stetig zusammenhängender Systeme. Diff.-Gleichungen.

Schouten, J. A., Der Ricci-Kalkül. Eine Einführung in die neueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. Mit 7 Textfig. (Die Grundlehren der mathemat. Wiss. Herausg. von R. Courant. Bd 10.) — X+312 pp. 8. 1924.

Der algebr. Teil des Kalküls. Der analyt. Teil des Kalküls. Integrabilitätsbedingungen d. Diff.-Gleich. Die affine Übertragung. Die Riemannsche Übertragung. Die Weylsche Übertragung. Die invariante Zerlegung einer Grösse höheren Grades.

Schwerdt, H., Lehrbuch d. Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage. — VIII+267 pp. 8. 1924.

Grundlagen d. Darstellung. Funktions-Leitern. Abbild. einer Ebene auf eine andere (Punkttransformationen). Netz-Tafeln. Fluchtlinientafeln. Duale Abbild. einer Ebene. Rechentafeln mit besond. Schlüsseln. Anhang.

Siegbahn, Manne, Spektroskopie der Röntgenstrahlen. Mit 119 Abb. — IV+257 pp. 8. 1924.

Kurze Zusammenfassung unserer Kenntnisse v. d. Röntgenstrahlen bis zu d. Entdeckung v. Laue. Interferenz d. Röntgenstrahlen. Technik d. Röntgenspektroskopie. Emissionsspektren. Absorptionsspektren. Systematik u. Theorie d. Röntgenspektren. Das kontinuierl. Röntgenspektrum. Andere Methoden z. Ermittl. d. inneren Energieniveaus d. Atome.

Warburg, Emil, Über Wärmeleitung und andere ausgleichende Vorgänge. — X+106 pp. 8. 1924.

Begriff u. Eigenschaften ausgleichender Vorgänge. Allgem. Theorie d. Wärmeleitung. Der stationäre Wärmefluss. Zeitlich veränderl. Zustände. Flüssigkeitsreibung (Viskosität).

Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922). Gehalten von A. G. v. Baumhauer, V. Bjerknes, J. M. Burgers, B. Caldonazzo, U. Cisotti, V. W. Ekman, W. Heisenberg, L. Hopf, Th. v. Kármán, G. Kempf, T. Levi-Civita, C. W. Oseen, M. Panetti, E. Pistolesi, L. Prandtl, D. Thoma, J. Th. Thysse, E. Trefftz, R. Verduzio, C. Wieselsberger, E. Witoszynski, G. Zerkowitz. Herausg. von Th. v. Kármán und T. Levi-Civita. Mit 98 Abb. im Text. — IV + 251 pp. 8. 1924.

Sten Editrice.

Torino.

Burali-Forti, C., & Boggio, T., Espaces courbes. Critique de la relativité. — XIII + 251 pp. 8. 1924. 50 L.

Vecteurs et homographies gén. dans l'S_n. Vecteurs. Homographies. Homogr. de l'ordre u. Opérateurs différentiels. Élimination des coordonnées dans le »Calcul différ. absolu». Espaces courbes et relativité. Variétés et géodésiques. Courbure de Riemann. Lignes et hypersurfaces des espaces courbes. Recherches de M. C. Somigliana. Critique de la relativité.

Summablitz-Verlag Dr. A. Söhner.

Berlin-Karlshorst.

Raabe, E., & Söhner, A., Kein Multiplizieren und Dividieren mehr. Aktuelles Welt-Rechenbuch »Summablitz». 5. Ausg. herausg. von A. Söhner und J. Themessl. — 241 pp. 8. 1923.

B. G. Teubner.

Leipzig u. Berlin.

Bachmann, P., Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. T. 4. Die Arithmetik der quadratischen Formen. Mit einem Geleitworte herausg. von R. Haussner. Abt. 2. — XXII + 537 pp. 8. 1923.

Die binären quadrat. Formen. Gitter u. Kettenbrüche. Reduktion unbestimmter binärer Formen. Minima unbestimmter binärer Formen. Gitter binärer quadrat. Formen. Raumgitter u. positive ternäre quadrat. Formen. Der n-dimensionale Raum. Die posit. quadrat. Formen mit n Unbestimmten. Reduktion d. posit. quadrat. Formen. Vollkommene u. Grenzformen. Äquivalenz u. Klassen positiver quadrat. Formen. Die zerlegbaren Formen. Die quadrat. u. kubischen Irrationellen. Der verallgemeinerte Kettenbruchalgorithmus.

Minkowskis Charakteristik algebr. Zahlen. Die unbestimmten quadrat. Formen mit mehr als zwei Unbestimmten.

Birkemeier, W., Über den Bildungswert der Mathematik. Ein Beitrag zur philosophischen Pädagogik. (Wissenschaft u. Hypothese. 25.) — VI + 191 pp. 8. 1923.

Einleit.: Üb. Bildung, Bildungswert, Bildsamkeit i. allgem. Vom Wesen d. mathemat. Erkenntnis. Vom Bildungswert d. Mathematik.

Czuber, E., Die philsophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Wissenschaft u. Hypothese. 24.) — VIII + 343 pp. 8. 1923.

Möglichk. u. Wahrscheinlichk. Die mathemat. Wahrscheinlichkeitsdefinition. Wahrscheinlichkeitsdeduktion. Die Theoreme v. Bernoulli u. Poisson u. d. Gesetz d. grossen Zahlen. Kausalität u. Zufall. Das Theorem v. Bayes. Induktion. Wahrscheinlichkeitstheorie u. Naturphilosophie.

—»—, Mathematische Bevölkerungstheorie. Auf Grund von G. H. Knibbs' »The mathematical theory of population». Mit 71 Fig. im Text. — XVI + 357 pp. 8. 1923.

Einleitung. Verschied. Typen d. Fluktuation v. Bevölkerungen. Bestimmung v. Kurvenkonstanten u. v. Zwischenwerten, wenn d. Daten Augenblickswerte darstellen. Spez. Kurventypen u. ihre Charakteristiken. Gruppenwerte, ihre Ausgleichung u. Analyse. Summationen u. Integrationen in d. Statistik. Stellung d. graph. Darstellungen u. d. Ausgleichung in d. Bevölkerungsstatistik. Übersicht d. Bevölkerungscharaktere. Die Bevölkerung als Ganzes u. ihre Verteilung nach Geschlecht u. Alter. Männlichkeit d. Bevölkerung. Natalität. Bezieh. d. beiden Geschlechter. Fruchtbark. u. Ergiebigk. u. reproduktive Wirksamk. Die komplexen Elemente d. Fruchtbark. u. Ergiebigk. Sterblichk. Wanderungen. Zusätze.

Ebner, M., Ausführliche Stoffauswahl für die Lehrpläne im wissenschaftlichen Zeichnen an den höheren Lehranstalten. Mit Literaturangaben. Unter Beigabe der vom Reichsverband deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine bearbeiteten Lehrpläne für den Unterricht im wissenschaftlichen Zeichnen im Anschluss an diese und im Auftrag des Verbandes. (Beihefte zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 8.) — VI + 17 pp. 8. 1924.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausg. im Auftr. der Akademien der Wissenschaften in Berlin,

Göttingen, Heidelberg, Leipzig, München und Wien. . . In 6 Bänden. Bd 2: 3: Heft 7. — S. 851—1187. 8. 1924.

L. Zoretti & A. Rosenthal, Die Punktmengen. — P. Montel & A. Rosenthal, Integration u. Differentiation. — M. Fréchet & A. Rosenthal, Funktionenfolgen.

Fettweis, E., Wie man einstens rechnete. Mit 10 Fig., 2 Tab. u. zahlreichen Aufgaben. (Mathemat.-physikal. Bibliothek. 49.) — 56 pp. 8. 1923.

Fueter, R., Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen. T. 1. Mit 16 Fig. im Text. (B. G. Teubners Samml. v. Lehrbüchern auf d. Geb. d. mathemat. Wiss. mit Einschluss ihrer Anwendungen. Bd 41: 1.) —

Die ellipt. Modulfunktion. Transformationsgleich. Die singulären Werte d. Modulfunktionen. Die ellipt. Funktion. Die komplexe Multiplikation d. ellipt. Funktionen.

Grossmann, M., Darstellende Geometrie. T. 1. 2., durchgeseh. Aufl. Mit 134 Fig. and 100 Übungsaufgaben im Text. (Teubners technische Leitfäden. Bd 2.) — 81 pp. 8. 1922.

Normalprojektion auf eine Ebene. Zugeordnete Normalprojektionen. Körper mit ebenen Flächen. Einfache Körper mit krummen Flächen.

—»—, Darstellende Geometrie. T. 2. 2., umgearb. Aufl. Mit 144 Fig. im Text. (Teubners techn. Leitfäden. Bd 3.) — VI + 154 pp. 8. 1921.

A. Darstellungsmethoden.

Konjugierte Normalprojektionen. Axonometrie. Zentralprojektion. Geometr. Grundlagen d. Photogrammetrie.

B. Kurven u. Flächen.

Allgem. Eigenschaften. Topograph. Flächen. Kegel- u. Zylinderflächen. Kurven 2. Grades. Durchdringung v. Kegel- u. Zylinderflächen. Rotationsflächen. Regelflächen. Flächen 2. Grades.

Hahn, K., Mathematische Physik. Ausgewählte Abschnitte und Aufgaben aus der theoretischen Physik für höhere Lehranstalten und Fachschulen und zum Selbstunterricht für Studierende. Mit 46 Fig. — IV + 163 pp. 8. 1924.

Einl. Aus d. Mechanik. Aus d. statist. Mechanik u. Wärmelehre. Aus d. Elektr.- u. Potentiallehre. Das Relativitätsprinzip. Anhang.

Happach, V., Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in ihrer Anwendung auf Physik, Maschinenbau, Elektrotechnik und Geodäsie. (Teubners techn. Leitfäden. Bd 18.) — [4] + 74 pp. 8. 1923.

Allgem. üb. Fehler u. Genauigk. einer Messung. Ausgleichung direkter Beobacht. gleicher Genauigk. Ausgleich. direkter Beobacht. ungleicher Genauigk. Ausgleich. vermittelnder Beobacht. Konstantenbestimmung. Ausgleich. bedingter Beobacht. Andere Probleme, d. sich mit Hilfe d. Methode d. kleinsten Quadrate lösen lassen. Zulässigk. d. Anwendung d. Methode d. kleinsten Quadrate.

Heffter, Lothar, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Bd 2. Geometrie im Bündel und im Raum. — XII + 423 pp. 8. 1923.

Geom. i. Bündel: Elemente d. äquiformen Geom. i. eigentl. Bündel. Kegel 2. Grades. Haupt- u. Scheitelelem. d. Kegels. Durch spez. Eigensch. ausgezeichnete Kegelarten. Fokalelem. u. Fokaleigensch. d. Kegels. Durch spez. Fokaleigensch. ausgezeichnete Kegelarten.

Geom. i. Grundgebilde 3. Stufe, i. Raum: Projektive Punkt- u. Ebenenkoordinaten i. Raum. Projektive Sätze üb. Punkte u. Ebenen. Projektive Koordinaten d. Geraden i. Raum. Allgem. projektive Eigensch. d. Flächen 2. Ordn. u. 2. Klasse. Projektive Einteil. d. Flächen 2-Grades. Spez. projektive Eigensch. d. einzelnen Flächenarten. Polarität in bezug auf eine Fläche 2-Grades. Elemente d. affinen Geom. i. Raum. Affine Klassifikation u. allgem. parallelgeometr. Eigensch. d. Flächen 2. Ordn. u. 2. Klasse. Parallelgeom. d. Zentralflächen. Parallelgeom. d. Paraboloide u. d. entarteten Flächen 2. Ordn. u. 2. Klasse. Elemente d. äquiformen Geom. i. Raum. Hauptachsen u. Hauptebenen d. Flächen 2-Grades. Orthogonalgeometrisch ausgezeichnete Flächen 2-Grades. Fokalelemente u. Fokaleigensch. d. Zentralflächen 2-Grades. Fokalelem. u. Fokaleigensch. d. Paraboloide. Flächenbüschel u. Flächenscharen 2. Grades. Die biquadrat. Raumkurven.

Herold, Karl, Finanz-Mathematik. (Zinses-zinsen-, Anleihe- und Kurs-Rechnung.) (Math.-physikal. Bibliothek 56.) — 50 pp. 8. 1923.

Horst von Sanden, Praktische Analysis (Handbuch der angewandten Mathematik. Herausg. von H. E. Timerding. T. 1.) 2., verbess. Aufl. Mit 32 Abb. im Text. — XVIII + 195 pp. 8. 1923.

Allgemeines üb. numer. u. graph. Rechnen. Rechenschieber u. Rechenmaschinen. Die ganzen rationalen Funktionen. Extrapolation u. Interpolation einer ganzen rationalen Funktion. Interpolation, numer. Differentiation u. Integration belieb. Funktionen. Mechan. Quadratur. Graph. Integration u. Differentiation. Analyt. Approximation empirischer Funktionen. Auflösung v. Gleichungen. Graph. u. numer. Integration v. gewöhnl. Differentialgleich. 1. Ordn. Graph. u. numer. Integration v. gewöhnl. Diff.-Gleich. 2. u. höheren Ordn.

Iamblichus, Theologoumena arithmeticae. Ed. V. de Falco. — XVII + 90 pp. 8. 1922.

Jahnke, E., & Emde, F., Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Unveränd. Nachdruck der 1. Aufl. vom Jahre 1909. Mit 53 Textfig. (Samml. mathem.-physikal. Lehrbücher. 5.) — XII + 176 pp. 8. 1923.

Die Funktionen $x \operatorname{tg} x$ u. $x^{-1} \operatorname{tg} x$. Wurzeln transzendenter Gleichungen. Verwandl. v. $a+bi$ in $re^{\varphi i}$ u. umgekehrt. Die Exponentialfunktionen e^x u. e^{-x}. Die Hyperbelfunktionen. Der Integralsinus, der Integralkosinus u. d. Integrallogarithmus. Die Fresnelschen Integrale. Die Gammafunktion. Das Gausssche Fehlerintegral Φx. Die Pearsonsche Funktion $F(r, v)$. Die ellipt. Integrale u. Funktionen. Kegelfunktionen. Die Besselschen od. Zylinderfunktionen.

Kerst, B., Ebene Geometrie. Mit 60 Fig. im Text und 3 Übersichtstaf. (Mathemat.-physikal. Bibliothek. Herausg. von W. Lietzmann und A. Witting. 10.) — 36 pp. 8. 1923.

Kirchberger, P., Atom- und Quantentheorie. 1—2. (Mathemat.-physikal. Bibliothek. 44—45.) — 49 + 52 pp. 8. 1922.

Kommerell, K., Der Begriff des Grenzwerts in der Elementarmathematik. Ein Versuch zur Vertiefung des mathematischen Unterrichts. Mit 25 Fig. im Text. (Beihefte zur Zeitschrift für mathemat. u. naturwissenschaftl. Unterricht. 6.) — 62 pp. 8. 1922.

Wurzelgrössen. Berechn. d. Zahl π. Berechn. d. trigonometr. Funktionen. Elementare Begründung d. sphär. Trigonometrie f. Eulersche u. Möbiussche Dreiecke. Untersuch. aus d. Nachlass v. Gauss. Das Messen. Der Proportionallehrsatz. Flächenmessung. Proportionallehre ohne Stetigkeitsbetrachtungen. Quadratur d. Parabel. Die Zahl e.

Lie, S., Gesammelte Abhandlungen . . . — Samlede avhandlinger. Ved bevilgning fra statens forskningsfond av 1919 og med understöttelse av Videnskapsselskapet i Kristiania og Videnskapernes akademi i Leipzig utg. av Norsk matematisk forening ved F. Engel, P. Heegaard. Bd 5. Abhandl. üb. d. Theorie d. Transformationsgruppen. Abt. 1. Herausg. von F. Engel. — X + 776 pp. 8. 1924.

Lietzmann, W., Trugschlüsse. 3., stark verm. Aufl. des ersten Teiles von »Wo steckt der Fehler?« Mit 27 Fig. im Text. (Mathemat.-physikalische Bibliothek. 53.) — 54 pp. 8. 1923.

Lietzmann, W., & Trier, V., Wo steckt der Fehler? Mathematische Täuschungen und Fehler. 3., stark verm. Aufl. Mit 35 Fig. im Text. (Mathemat.-physikal. Bibliothek. 52.) — IV + 48 pp. 8. 1923.

Lindow, Martin, Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Mit 38 Fig. im Text und 160 Aufgaben. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd 589.) — 106 pp. 8. 1921.

Kurvenscharen u. Diff.-Gleich. Diff.-Gleich. 1. Ordn.: Unmittelbare Integration. Trennung d. Variabeln. Substitutionen. Homogene Diff.-Gleich. Lineare Diff.-Gleich. Totale Diff.-Ausdrücke. Eulerscher Multiplikator. Diff.-Gleich. höheren Grades. Singuläre Lösungen. Graph. Näherungsmethoden. Numerische Näherungsmethoden. Die einfachsten Typen d. Diff.-Glelch. 2. Ordn. Lineare Diff.-Gleich. 2. Ordn. Näherungsmethoden f. Diff.-Gleich. 2. Ordn. Lösungen.

Lotze, A., Die Grundgleichungen der Mechanik insbesondere starrer Körper. Neu entwickelt mit Grassmanns Punktrechnung. (Abhandl. u. Vorträge aus d. Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik. Heft 7.) — VI + 50 pp. 8. 1922.

Kinematik d. starren Körpers. Allgem. Dynamik materieller Punktsysteme. Dynamik d. starren Körpers.

Myrberg, P. J., Über Systeme analytischer Funktionen welche ein Additionstheorem besitzen. (Preisschriften gekrönt u. herausg. von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig.) — 24 pp. 4. 1922.

Einl. Funktionen einer Veränderlichen mit rationalem Additionstheorem. Funktionen mehrerer Veränderlichen mit rationalem Additionstheorem. Funktionen mehrerer Veränderlichen mit verallgemeinertem rationalen Additionstheorem. Funktionen mit algebr. Additionstheorem.

Onnensen, H., Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. Mit 15 Fig. im Text. (Mathemat.-physikalische Bibliothek. 51.) — 49 pp. 8. 1923.

Peters, Illo, Die mathematischen und physikalischen Grundlagen der Musik. Mit einer Kurve. (Mathemat.-physikalische Bibliothek. 55.) — IV + 35 pp. 8. 1924.

Repertorium der höheren Mathematik. 2., völlig umgearb. Aufl. der deutschen Ausg., unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker herausg. von H. E. Timer-

DING. Bd 2. Geometrie. Hälfte 2: Raumgeometrie. Mit 12 Fig. im Text. — XII pp. 537—1165. 8. 1922.

Flächen 2. Ordn. nach ihrer Gestalt u. Einteilung. Von O. STAUDE. — Allgem. Eigensch. d. Flächen 2. Ordn. u. d. Theorie ihrer ebenen Schnitte. Von O. STAUDE. — Fokaleigensch. u. konfokale Systeme v. Flächen 2. Ordn. Von O. STAUDE. — Systeme v. Flächen 2. Ordn. Von O. STAUDE. — Raumkurven 3. u. 4. Ordn. Von O. STAUDE. — Allgem. Theorie d. algebr. Flächen. Von L. BERZOLARI. — Die Geom. auf einer algebr. Fläche. Von F. SEVERI. — Flächen 3. Ordn. Von L. BERZOLARI. — Besond. Flächen 4. Ordn. Von H. E. TIMERDING. — Allgem. Theorie d. algebr. Raumkurven. Von L. BERZOLARI. — Besond. algebr. Raumkurven. Von L. BERZOLARI. — Rationale Transformationen d. Raumes. Von H. E. TIMERDING. — Algebr. Liniengeom. Von K. ZINDLER. — Raumkurven u. abwickelbare Flächen. — Allgem. Flächentheorie. Von E. SALKOWSKI. — Besond. Flächenklassen u. Flächensysteme. Von E. SALKOWSKI.

ROTHE, R., Elementarmathematik und Technik. Eine Sammlung elementarmathematischer Aufgaben mit Beziehungen zur Technik. Mit 70 Abb. (Mathemat.-physikalische Bibliothek. 54.) — IV + 52 pp. 8. 1924.

SALKOWSKI, E., Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unterrichts. Ein Beitrag zur Methodik des mathematischen Unterrichts. Mit 74 Fig. im Text. (Beihefte zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 7.) — IV + 59 pp. 8. 1924.

SCHAEFER, CLEMENS, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. 2., verm. u. verbess. Aufl. Mit 33 Textfig. (Samml. mathemat.-physikal. Lehrbücher, herausg. von E. Jahnke. 3.) — VI + 174 pp. 8. 1922.

Elektrostatik. Magnetostatik. Der elektr. Strom u. sein Magnetfeld. Induktion. Elektr. Wellen.

SCHRUTKA, L., Zahlenrechnen. (Sammlung mathemat.-physikal. Lehrbücher, herausg. von E. Jahnke. 20.) — X + 146 pp. 8. 1923.

Allgem. Erörterungen. Darstell. d. Zahlen. Ungenaue Zahlen. Addition u. Subtraktion. Multiplikation. Rechenmaschinen u. ihre Anwendung beim Multiplizieren. Division. Zusammengesetzte Rechenoperationen. Potenzieren u. Wurzelziehen. Rechnerische Behandl. v. Polynomen. Logarithmen. Winkelfunktionen u. verwandte Funktionen.

URBAŇ, F. M., Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler. — VI + 274 pp. 8. 1923.

Vom Zufalle. Die Lehren v. Zufalle. Wahrscheinlichkeit. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Grundlagen d. Theorie d. Beobachtungsfehler.

VOSS, A., Über das Wesen der Mathematik. Rede gehalten am 11. März 1908 in der öffentl. Sitzung der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Erweit. u. mit Anmerkungen vers. 3., verbess., anastatisch gedruckte Auflage. — 123 pp. 8. 1922.

Bedeut. d. Mathem. f. d. Entwickl. u. d. Verständnis unserer techn.-wissenschaftl. Kultur. Allgem. Verständnis f. d. Wesen u. d. Aufgaben d. Mathem. Abriss d. histor. Entwickl. d. Mathem. Die reine Mathem. als Wiss. v. d. Zahlen. Die mathem. Erkenntnis d. 19. Jhs. Anwendungsgebiete d. Mathem., Geom. u. Mechanik. Axiomatik in d. Arithmetik. Der Fortschritt d. mathemat. Wissens. Objektiver Wert d. Mathem. Notwendigk. gründl. mathemat. Vorbildung, Reform d. mathemat. Unterrichts.

WINTERNITZ, J., Relativitätstheorie und Erkenntnislehre. Eine Untersuchung über die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Einsteinschen Theorie und die Bedeutung ihrer Ergebnisse für die allgemeinen Probleme des Naturerkennens. Mit 6 Fig. im Text. — VIII + 230 pp. 1923.

Einleitendes üb. Aufgaben, Methoden u. Grenzen d. Naturerkenntnis. Der Sinn d. Relativität v. Raum u. Zeit. Der absolute Raum in d. Physik. Der Grundgedanke v. Einsteins spez. Theorie. Die vierdimensionale Welt. Zeitordn. u. Kausalzusammenhang. Geom. u. Erfahrung. Geom. als physikal. Hypothese. Allgem. Relativität u. Gravitation. Zeit, Raum u. Kausalität in d. allgem. Theorie. Die Relativitätstheorie i. Streite d. Schulen.

WITTING, ALEXANDER, Abgekürzte Rechnung nebst einer Einführung in die Rechnung mit Logarithmen. Mit 4 Fig. im Text und zahlreichen Aufgaben. (Mathemat.-physikalische Bibliothek. 47.) — 51 pp. 8. 1922.

WITTING, ALEX., & GEBHARDT, M., Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Ein mathematisch-historisches Lesebuch. T. 2. Mit einem Titelbild und 28 Fig. im Text. 2., verbess., anastatisch gedruckte Aufl. (Mathematische Bibliothek. 15.) — VI + 62 pp. 8. 1923.

WITTING, ALEXANDER, Funktionen; Schaubilder und Funktionstafeln. Eine elementare Einführung in die graphische Darstellung und in die Interpolation. Mit 26 Fig. im Text, 3 Taf. und zahlreichen Aufgaben. (Mathemat.-physikal. Bibliothek. 48.) — 41 pp. 8. 1922.

Vereinigung wiss. Verleger.

Berlin & Leipzig.

EUCKEN, R., Die Lebensanschauungen der grossen Denker. Eine Entwicklungsgeschichte des Lebensproblems der Menschheit von Plato bis zur Gegenwart. 17. und 18. Aufl. — VIII + 564 pp. 8. 1922.

1. Das Griechentum. 2. Das Christentum. 3. Die Neuzeit.

Eucken, R., Prolegomena und Epiloge zu einer Philosophie des Geisteslebens. — — V + 156 pp. 8. 1922.

Bezeichn. d. Vorhabens. Rechtfertigung d. Problems aus d. Zeitlage. Entwick. d. Problems. Darlegung d. eigenen Verfahrens. Erwägungen u. Aussichten.

Die Geschichte der Zeitmessung und der Uhren, unter Mitwirkung von Ludw. Borchardt, J. Drecker . . . und anderen herausg. von E. v. Bassermann-Jordan.

Bd. 1, Lief. B. Die altägyptische Zeitmessung von Ludw. Borchardt. Mit 18 Taf. u. 25 Abb. im Text. — 70 pp. 4. 1920.

Bd. 1, Lief. F. Die Gnomonik der Araber von Karl Schoy. Mit 30 Abb. — 95 pp. 4. 1923.

F. Vieweg & Sohn.

Braunschweig.

Forsyth, A. R., Lehrbuch der Differential-Gleichungen mit den Auflösungen der Aufgaben von Herm. Maser. 2., autoris. Aufl. Nach den 3. des englischen Originals besorgt und mit einem Anhang von Zusätzen versehen von Walther Jacobsthal. — XXIII + 920 pp. 8.

Fricke, Robert, Lehrbuch der Algebra verfasst mit Benutzung von Heinr. Webers gleichnamigem Buche. Bd 1. Allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen. Mit 4 in den Text gedruckten Figuren. — VIII + 468 pp. 8. 1924.

1. Grundlegende Entwicklungen.

Rationale Funktionen. Matrisen u. Determinanten. Analyt. Entwickl. üb. ganze Funktionen. Symmetr. Funktionen u. Elimination. Lineare Transformationen. Transformationen höheren Grades.

2. Einzelsätze üb. reelle Gleichungen.

Realität u. Eingrenzung d. Wurzeln reeller Gleichungen. Satz v. Sturm u. verwandte Entwicklungen. Numer. Lösung reeller Gleichungen.

3. Galoissche Gleichungstheorie.

Endl. Gruppen. Abelsche Gruppen. Permutationsgruppen. Grundsätze d. Galoisschen Gleichungstheorie. Algebraisch lösbare Gleichungen.

Reichenbach, H., Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre. (Die Wissenschaft. Herausg. von E. Wiedemann. Bd. 72.) — X + 162 pp. 8. 1924.

Einleitung.

1. Spez. Relativitätstheorie: Die Axiome u. d. Aufbau d. Metrik. Krit. Beobachtungen.

2. Allgem. Relativitätstheorie: Die Axiome u. d. Aufbau d. Metrik. Integraleigenschaften.

Seegers, Carl, Über die Bewegung und die Störungen der Planeten, wenn dieselben sich nach dem Weberschen elektrodynamischen Gesetz um die Sonne bewegen. Neu herausg. von P. Heylandt. — VII + 54 pp. 8. 1924. M. 2.50.

Study, E., Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung. T. 1. (Die Wissenschaftl. Sammlung . . . herausg. von E. Wiedemann. Bd. 71.) — 268 pp. 8. 1923.

Einleit.: Probl. u. Methoden. Fundamentalsätze d. Algebra d. Vektoren in spez. Fassung. Invariante Darstellung d. linearen Transformationen. Zusammensetzung bilinearer Formen. Invariantensysteme, an denen eine quadrat. Form beteiligt ist. Fundamentalsätze d. Algebra d. Vektoren in allgem. Fassung. Ternäre bilineare Formen mit kontragredienten Veränderlichen. Ternäre bilineare Formen mit kogredienten Veränderlichen. Automorphe Transformationen quadrat. Formen, Orthogonale u. quasi-orthogonale Invarianten ternärer bilinearer Formen. Das Formensystem v. zwei ternären quadrat. Formen, nach Gordan.

—»—, Mathematik und Physik. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung. — 31 pp. 8. 1923.

Librairie Vuibert.

Paris.

Bouligand, Georges, Leçons de géométrie vectorielle. Préliminaires à l'étude de la théorie d'Einstein. Avec préf. de Ed. Goursat. — VIII + 356 pp. 8. 1924. 25 fr.

1. Opér. vectorielles en géom. linéaire. Scalaires et vecteurs. L'addition géom. et la compos. des translations. Expression d'un vecteur quelconque. Syst. vect. fondam. Coordonnées. Changem. de coord. Fonct. scalaires d'un point ou d'un vecteur. Fonct. scal. de plusieurs vecteurs: volume du parallélépipède. Déterminants. Equations du prem. degré. Notions sur les transform. lin.

2. Opér. vector. métr. La multipl. scal. et la géom. métr. Applic. de la multipl. scal. Etude des transform. lin., au point de vue métr. La multipl. vect. Théorie des vecteurs glissants.

3. Opér. vect. infinitésimales. La dérivation géom. Les propr. métr. des courbes gauches. Les propr. métr. des surfaces. Elém. différ. invariants des fonct. scal. en géom. lin. ou métr. Elém. différ. invariants des champs de vect. Transform. finies et infinitésim. Champs remarquables. Potentiels. Propr. intégr. Flux et circulation. Fonct. de lignes et de surf. Applic. Complém. sur la théorie des surf. méthode du trièdre mobile. Théorie du déplacement parallèle et théorème de Gauss. Champs scal. ou vectoriels sur les surf. Param. diff. Sur les principes du calcul tens. Sur les multiplic. de Riemann à plus de deux dimens. Sur les princ. de la géom.

Bricard, Raoul, Petit traité de perspective. — 87 pp. 8. 1924.

Introd. en géométrie des éléments à l'infini. Homologie. Objet de la perspective. Ses principes phys. et psycholog. Principes géométr. de la perspective. La perspective indép. et la perspective appliquée. La perspective indép.: les probl. descriptifs et les probl. sémi-métr. La perspective indép.: les probl. métr. La perspective appliquée: le problème direct. La perspective appliquée: le probl. inverse. Valeur de la perspective. Résumé histor. La perspective cavalière.

Gandillot, M., Les faiblesses de la science. — 76 pp. 8. 1924. Fr. 5: —.

Généralités. Bases de la géométrie. Figures primordiales. Courbure et relativité. L'espace. Éther et relativité.

Lemoyne, T., Les lieux géométriques en mathématiques spéciales avec application du principe de correspondance et de la théorie des caractéristiques à 1 400 problèmes de lieux et d'enveloppes. — 146 pp. 8. 1923.

Lieux des pôles d'une droite donnée. Lieux de centres de coniques. Enveloppes des polaires d'un point. Enveloppes de directrices de foyer donné. Enveloppes des tangentes aux coniques (μ, ν) aux points où elles rencontrent une droite D. Enveloppes d'axes. Lieux de foyers. Lieux des points d'intersection de deux tangentes menées de deux points donnés P, Q. Enveloppes de directrices. Lieux de points de contact des tangentes menées d'un point P. Lieux des points de rencontre des tangentes communes à une conique donnée et aux coniques (μ, ν). Lieux des points de contact des coniques (μ, ν) et des tangentes communes à une conique donnée et aux coniques (μ, ν). Enveloppes des cordes interceptées par deux droites fixes sur les coniques (μ, ν). Enveloppes des sécantes communes à une conique fixe et aux coniques (μ, ν). Lieux des points ayant la même polaire par rapport à une conique donnée et à une conique satisfaisant à quatre conditions simples. Lieux des pieds des normales menées d'un point aux coniques. Lieux des pieds des normales menées d'un point aux coniques. Lieux rel. aux diamètres. Lieux de sommets. Lieux et

enveloppes rel. aux paraboles. Lieux et enveloppes rel. à des cercles. Détermination des caractéristiques données au tableau. Applic. de la théorie des caractéristiques aux propriétés descriptives des coniques.

Tripier, Henri, Les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques étudiées parallèlement en partant de la définition géométrique. — 56 pp. 8. 1923. 5 fr.

—»—, Définition géometrique de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique, propriétés. — VI + 22 pp. 8. 1924. 2 fr.

Zaklada Tiskare Narodnih Novina.

Zagreb.

Varićak, Vladimir, Darstellung der Relativitätstheorie im dreidimensionalen Lobatschefskijschen Raume. Mit 45 Textfig. — 104 pp. 8. 1924.

Trigonometrie d. Lobatschefsk. Ebene. Kompos. d. Geschwindigkeiten. Die Lorentz-Transformation. Optik bewegter Körper. Die Bewegungsgrösse (Impuls). Transform. d. elektromagnet. Feldes. Elemente d. hyperbol. Vektoralgebra. Üb. d. Rotation starrer Körper. Üb. d. Vorzeichen d. Weltparameters.

Zanichelli.

Bologna.

Belardinelli, Giuseppe, Esercizi di algebra complementare con oltre 700 questioni risolute e proposte. — 280 pp. 8. 1923. L. 30.

Numeri complessi. Aggregati e limiti. Le serie e i prodotti infiniti. Frazione continue. Funzioni e l'operazione di derivazione. Serie di potenze e lo sviluppo di Taylor. Forme illusorie. I massimi ed i minimi. L'analisi combinatoria. Determinanti e sistemi di equazioni lineari. Funzioni raz. intere. Risultanti e discriminante. Equazioni. Binomie. Cubiche e biquadr. Risol. numer. delle equaz. alg.

Bianchi, Luigi, Lezioni di geometria differenziale. 3ª ed. interam. rifatta. Vol. 1. — IV + 802 pp. 8. 1922. L. 65.

Curve a doppia curvatura. Forme differenziali quadrat. Coord. curvilinee sulle superficie. Rappresentaz. conformi. Formole fondam. per la teoria delle superf. Rappresentazione sfer. di Gauss. Coord. tangenziali. Curvatura tangenziale o geodetica. Linee geodet. Superf. applicabili e teoremi gen. sulla deformazione. Deformazione delle superf. rigate. Superf. evolute e teoremi di Weingarten. Sistemi ∞^2 di raggi o congruenze rettilinee. Superf. con un

sistema di linee di curvatura piane o sferiche. Superf. d'area minima. Il probl. di Plateau e la superf. minima di Schwarz. Geom. pseudosferica e la sua interpretaz. non-euclidea. Superficie a curvatura costante e la trasform. complem. delle superf. pseudosferiche. Trasformaz. di Bäcklund per le superf. a curvatura cost. e il teorema di permutabilità.

Bianchi, Luigi, Vol. 2: P. 1. — VIII+412+V pp. 8. 1923. L. 35.

Deformazioni infinitesim. delle superf. flessibili ed inestendibili. Congruenze rettilinee W. Deformazione delle congruenze di sfere e rotolamento di superf. applicabili. I teoremi di Guichard sulle deformate delle quadr. rotonde e le trasformaz. di Ribaucour. I sistemi ciclici e il nouvo metodo di Weingarten per il probl. d'applicabilità. Trasformaz. B_k per congruenze W delle deformate del paraboloide iperbolico. Trazform. B_k delle deformate dell'iperboloide ad una falda. Trasform. B_k delle deformate delle altre specie di quadriche.

—»—, Vol. 2: P. 2. — Pp. 413 — 833+XI pp. 8. 1924. L. 55.

Spazi a n dimensioni. Ipersuperf. e curve di questi spazî. Geom. degli spazî a curvatura costante. Ipersuperf. negli spazî di curvatura costante. I sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio euclideo a n dimensioni. Sistemi tripli ortogonali nello spazio euclideo. Le famiglie di Lamé composte di superf. a curvatura costante. Nota sul parallelismo di Levi-Civita. Introd. alla geom. proiett. differenziale d'una superf. Nota di Guido Fubini.

—»—, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. — VI+590 pp. 8. 1918. L. 45.

Teorie ausil. Primi principii della teoria dei gruppi continui. I tre teoremi fondam. della teoria dei gruppi continui. Gruppi misti. Equazioni di definiz. di un gruppo G_r. Ordini delle trasform. infinitesime. Funzioni e varietà invar. rispetto ad un gruppo. Gruppi transitivi ed intrans. Gruppi imprimitivi. Gruppi sistat. ed asistat. Serie invar. di trasform. infinitesime. Sottogruppi invar. e serie di compos. di un gruppo. Gruppi integrabili. Gruppo aggiunto. Ricerca dei sottogruppi di un gruppo. Prime ricerche sulla simiglianza dei gruppi. Trasform. permutab. con tutte le trasform. di un gruppo. Gruppi semplicemente transit. reciproci. Isomorfismo dei gruppi. Gruppi parametr. Risoluz. gen. del probl. di riconoscere la simiglianza dei gruppi. Gruppi ampliati e prolungati. Invarianti differenziali. Gruppi continui finiti sopra una e sopra due variab. Applic. della teoria dei gruppi continui finiti ai probl. d'integraz. delle equaz. differenziali. Applic. alla teoria degli spazî pluridimensionali con gruppi continui di movimenti.

Bianchi, Luigi, Lezioni di geometria analitica. — 604 pp. 8. 1920. L. 45.

1. Metodo delle coord. Fondamenti della geom. analit. Coord. nelle forme fondam. di prima specie. Coord. nel piano punteggiato. Equaz. delle curve in generale. Equaz. lineari come rappresentanti rette. Coord. nello spazio punteggiato. Equaz. delle superficie e delle curve nello spazio. Equaz. lineari come rappresentanti piani. Equaz. delle rette nello spazio. Coord. omogenee cartesiane e coord. projettive. Projettività nelle forme geom. di prima e seconda specie.

2. Le curve di secondo grado (coniche). Proprietà proiettive delle curve di secondo grado. Proprietà diametr. delle coniche. Riduz. della equaz. a forma normale. Forma e prime proprietà metr. delle tre specie di coniche. Fuochi delle coniche e proprietà focali.

3. Le superficie de secondo grado (quadriche). Proprietà gen. projettive delle quadriche. Propr. diametr. delle quadr. Descriz. della forma e prime propr. delle cinque specie di quadriche. Sezioni circolari. I due sistemi di generatrici sulle quadriche rigate e loro distrib. Fuochi e coniche focali nelle quadriche. Forme quadrat. in n variabili.

—»—, Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici. — 641 pp. 8. 1923. L. 75.

Prelim. d'aritmetica raz. colle prime nozioni della metrica di Minkowski. Il campo dei numeri di Gauss ed i campi quadrat. Proprietà fondam. dei numeri algebr. Corpi algebr. finiti. Le unità nei corpi algebr. e il teorema di Dirichlet. Ideali nei corpi algebr. Moltiplicazione e divisibilità. Decompos. in ideali primi. Congruenze di numeri risp. ad ideali. Estensione delle teorie di aritm. raz. Equivalenza di ideali. Numero finito delle classi. Gruppo di compos. delle classi. Forme decomponibili coord. agli ideali. Decompos. dei numeri primi raz. e congruenze di grado super. Caratteristica dei numeri primi crit. secondo Dedekind. Ideali primi nei corpi circolari. Ordini nei corpi algebr. Unità negli ordini. Ideali regolari e loro leggi di decompos. Corpi di Galois. Primi principii d'aritmetica analit. Funz. zèta di Riemann e Dedekind e la determinaz. trascend. del numero h delle classi. Il num. h delle classi nei corpi quadrat. e nei corpi circolari e il teorema di Dirichlet sulle progressioni aritm.

Burgatti, Pietro, Lezioni di meccanica razionale. 3ª ed. — XI + 544 pp. 8. 1921. L. 36.

Elementi di calcolo vettoriale. Cinematica: Cap. 1—5. Statica: 1—4. Dinamica: 1—7. Meccanica dei corpi deformabili: 1—3.

—»—, Complementi. Problemi ed esercizi di meccanica razionale raccolti, spiegati e risoluti per cura di P. Burgatti e R. Roghi. — 385 pp. 8. 1921. L. 40.

Problemi di cinematica. Probl. di statica. Probl. di dinamica.

Castelnuovo, G., Spazio e tempo. Secondo le vedute di A. Einstein. (Attualità scientifiche. N:o 31.) — VII + 126 pp. 8. 1923. L. 12.

1. Principio di relatività di Galileo. Accordo degli orologi. Principio della costanza della velocità della luce. Carattere relativo della simultaneità. Trasform. di Lorentz. Alterazioni delle misure di spazio e tempo per effetto del moto. Tempo proprio. Lo spazio-tempo di Minkowski. Una nuova formulazione della legge d'inerzia.

2. Sistemi galileiana e gravitazione. Digressione sulle carte geogr. Esplorazione dello spazio-tempo. L'inerzia come caso part. della gravitazione. Caratteri dello spazio-tempo gravit. La teoria di Einstein e la legge di Newton. Le tre prove astron. della relatività. Valore della nouva teoria.

Ciani, Edgardo, Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici. (Sèguito alle lezioni di geometria proiettiva ed analitica.) — VIII + 215 pp. 8. 1915. L. 15.

1. Sopra le forme geometr. fondam. di prima specie. Coord. proiett. sopra le forme di prima specie e le proiettività binarie. Forme bin. quadrat. 2. Sopra le forme geom. fondam. di seconda specie. Coord. proiett. omogenee sopra le forme di seconda specie e la proiettività ternaria. Coniche in relaz. alle forme ternarie quadrat. 3. Sopra le forme geom. fondam. di terza specie. Coord. proiett. omogenee sopra le forme di terza specie e la proiettività quaternaria. Quadriche in relaz. alle forme quaternarie quadratiche. 4. Sopra la forma geometr. fondam. di quarta specie (lo spazio rigato). Coord. omogen. di retta. Complessi e congruenze lineari. Alcuni esempi di complessi quadrat.

—»—, Lezioni di geometria proiettiva ed analitica. 3ª ed. (rived. e corr.). — VIII + 624 pp. 8. 1922. L. 60.

Nozioni fondam. di geom. proiett. Elem. di geom. analit. sulla retta (e più in gen. su di una forma di prima specie). Proiettività fra forme di 1ª specie. Elem. di geom. analit. nel piano. Risoluz., col metodo delle coord., dei principali metr. e di posiz. inerenti a punti e rette nel piano. Princip. generazioni e definiz. delle coniche. Princip. proprietà analit. della equazione quadrat. completa (a coeff. reali) in due incognite. Interpretazioni geom. relative. Il probl. di costruire la conica quando sieno dati p punti e t tangenti in guisa che si abbia $p+t=5$. — Risol. e discuss. La teoria della polarità risp. a una conica. Propr. princip. delle coniche inerenti al centro, ai diametri e agli assi. I fuochi e le direttrici delle coniche. Punti comuni a due coniche. Cerchio osculatore a una conica in un suo punto. Esempi di curve piane algebr. di grado super. al secondo e di curve trascend. Proiettività fra forme di seconda specie. Geom. proiett. sulle coniche. Elem. di geom. analit. nello

spazio. Risol., col metodo delle coord., dei princip. probl. metrici e di posizione inerenti a punti, rette e piani nello spazio. Prime considerazioni analit. e geometr. sopra le quadriche. La sfera. Coni e cilindri quadrici. Teoria della polarità risp. a una quadrica. Proprietà diametrali delle quadriche e loro equazioni normali. Quadriche rigate proprie. Principali proprietà delle quadriche reali desunte dalle loro equazioni normali. Rappresentazione analit. delle superficie e delle linee nello spazio. Proiettività fra forme di 3ª specie.

Del Lungo, Carlo, Elementi della teoria cinetica dei gas. — XI + 167 pp. 8. 1920. L. 12.50.

Preliminari. Il gas perfetto. Movimento molecolare e la pressione. Il calore nei gas. La legge di Avogadro. Dinamica interna dei gas.

Leggi statistiche. Distribuz. delle molecole. Distribuz. delle velocità. L'equipartizione dell'energia. L'entropia dei gas.

Appendice.

Enriques, Federigo, Lezioni di geometria proiettiva. 4ª ed. accresciuta. — X + 463 pp. 8. 1920. L. 22.

Proposizioni fondam. Legge di dualità. Teoremi prelim. Gruppi armonici. Il postulato della continuità e le sue applicaz. Il teorema fondam. della proiettività. Proiett. fra forme di 1ª specie. Involuzione nelle forme di 1ª specie. Proiett. tra forme di 2ª sp. Le coniche. Proiett. fra coniche. Probl. determin. Propr. focali delle coniche. Propr. metr. dei coni quadrici. Cenni sulle rigate quadr. e sulle curve gobbe del terz' ordine. Proiett. tra forme di 3ª sp.

—»—, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Pubbl. per cura di Oscar Chisini. Vol. 3. — 593 pp. 8. 1924. L. 65.

Libro 5. Curve e funz. algebr. di una variabile. Le serie lineari sopra une curva. La geometria sopra le curve del piano e le trasform. cremoniane; evoluzione stor. delle idee. Curve e trasform. Corrispondenze fra curve. Sulla teoria delle curve gobbe.

Pasini, Claudio, Metodo dei minimi quadrati per la compensazione degli errore di osservazione. Appendice al trattato di topografia. — 174 pp. 8. 1921. L. 15.

Introduzione. Metodo dei minimi quadrati. Compensazione delle osservazioni dirette. Compensaz. delle osservaz. mediate. Compensaz. delle osservaz. condizionate. Calcoli di compensaz. Triangolazioni. Poligonazioni. Livellazioni.

Pasini, Claudio, Trattato di topografia. 4^a ed. — 612 pp. 8. 1921. L. 32.

I. Topografia. Introd.: Preliminari. Strumenti semplici. P. 1. Planimetria. Strum. planimetr. Rilevamenti planimetr. Figuramento del rilevato. 2. Altimetria. Strumenti altimetr. Livellazione geom. Livell. trigonom. Livell. barometr. Rilevamenti altimetr. 3. Celerimensura o tacheometria. Strumenti. Rilevamento tacheometr.

II. Agrimensura. Misura delle superficie agrarie. Divisione dei terreni. Tavole.

Pincherle, Salvatore, Lezioni di algebra complementare dettate nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti. Teoria delle equazioni. 2^a ed., rived. — VI+354 pp. 8. 1921. L. 32.

Elem. dell'analisi combinatoria. Un cenno sulla teoria delle sostituzioni. I determinanti. Forme ed equazioni lineari. Il teorema fondam. dell'algebra. Funzioni simmetriche. Risultante, eliminazione. Radici multiple e discriminante. Funz. razionali fratte. Trasform. nelle equaz. Equaz. binomie, cubiche e biquadrat. Cenno sulla risol. algebr. delle equaz. Separazione delle radici. Approssimazione delle radici.

—»—, Lezioni di calcolo infinitesimale dettate nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti. 2^a ed. riv. — VII+785 pp. 8. 1920. L. 40.

1. Calcolo differenziale. Funzioni di una variabile in senso gen. Funz. elementari. Derivate e differenziali per le funz. di una variabile. Ulteriori proprietà delle funz. derivabili di una variabile. Sviluppo di Taylor per le funz. di una variab. e sue applic. Funz. di più variabili. Funz. implicite. Sviluppo di Taylor per le funz. di più variab. e sue applicaz.

2. Calcolo integrale. L'integraz. definita. Calc. degli integrali. Integrali generalizzati. Integraz. delle funz. di forma analit. semplice. L'integraz. nei campi a due dimensioni. L'integraz. multipla.

3. Applicazioni geometr. del calcolo infinitesimale. Curve piane: Quadratura e rettificaz. delle curve piane. Curve sghembe. Superficie. Volumi. Area delle superficie curve.

4. Equazione differenziali. Generalità. I teoremi d'esistenza per l'equazione del primo ordine. Equaz. del primo ord. Cenno sulle equaz. di ord. super. Equaz. lineari. Cenni sulle equaz. alle deriv. parziali.

Porro, Francesco, Trattato di astronomia. Vol. 1. — XIX+424 pp. 8. 1922. L. 45.

Trigonom. sferica. La sfera celeste e il suo moto diurno. Il sole e il suo moto annuo. La luna e i suoi movimenti. La parallasse. L'aberrazione della luce. Refrazione astronom. Precessione e nutazione. Riduzioni dei luoghi stellari.

Questioni riguardanti le matematiche elementari raccolte e coordinate da Federigo Enriques. P. 1. Critica dei principii. Vol. 1. Articoli di U. Amaldi, F. Enriques, F. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali. 3ª ed. — VI+389 pp. 8. 1924. L. 50.

Enriques: L'evoluzione delle idee geometr. nel pensiero greco: punto, linea e superficie. Amaldi: Sui concetti di retta e di piano. Guarducci: Della congruenza e del movimento. Vailati: Sulla teoria delle proporzioni. Vitali: Sulle applicaz. del postulato della continuità nella geom. elem. Enriques: I numeri reali. I numeri naturali. I numeri razionali. I numeri irraz. I numeri non-archimedei e la generalizzazione del continuo numerico.

Tonelli, Leonida, Fondamenti di calcolo delle variazioni. 2. — VIII+660 pp. 8. 1923. L. 80.

1. Estremi liberi assoluti. A. Forma parametr. Esistenza dell'estremo libero assol. Prime proprietà delle estremanti. Le estremali. Ulteriori proprietà delle estremanti.

2. Estremi liberi assoluti. B. Forma ordinaria. Esist. dell'estremo libero assol. Prime propr. delle estremanti. Estremanti ed estremali. Ulteriori proprietà delle estremanti. Alcuni probl. classici.

3. Problemi isoperimetrici. Forma parametr.: esistenza e proprietà delle estremanti. Forma parametr.: ulteriori propr. delle estremanti. Forma ordinaria: esistenza e proprietà delle estrem.

4. Estremi relativi. Estremi relativi liberi. Estremi relativi condizionati.

CORRECTIONS

au mémoire »Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et du problème de Cauchy» (Acta Mathematica, T. 31, 1908) par Jacques Hadamard.

Ces corrections sont introduites dans l'ouvrage de M. Hadamard »Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations» (Oxford University Press, London), 1923.

	Au lieu de	Lire
p. 349, ligne 6 par en bas	est égale à πA	est égale à $2\pi A$
ibid., formule (30′) second membre	$\frac{(-1)^{n'-1}}{2}$	$(-1)^{n'-1}$
ibid., avant dernière ligne .	au facteur $2i$	au facteur i
p. 370, dernière ligne . .		Ajouter: en désignant par **k** un facteur numérique,
p. 371, formule (48) . . .	$(-1)^{n_1-1}v$	$\mathbf{k}\,v$
ibid. ligne 4 (troisième après la formule (48))		Ajouter: , en déterminant **k** par la condition du n^0 2 (fin)
ibid. première formule (49)	$V=C_{n_1-1}$, etc.	$V=(n_1-1)\,C_{n_1-1}$, etc.
ibid. deuxième formule (49)	$V_0=C_{n_1-1}$, etc.	$V_0=-(n_1-1)\,C_{n_1-1}$, etc.
p. 373, ligne 2	. . . . est égale à π, multiplié	. . . . est égale à 2π, multiplié
ibid. ligne 3	. . . . à πV_0	. . . . à $\frac{\pi V_0}{(n_1-1)\,C_{n_1-1}}$
p. 374, dernière ligne . .	$\pi K f \frac{V}{C_{n_1-1}}$	$\pi K f \frac{V}{(n_1-1)\,C_{n_1-1}}$
p. 375, formule (57) . . .	$(-1)^{n_1}\frac{2\pi}{(n_1-2)!}$	$\frac{-\pi}{(n_1-1)\,C_{n_1-1}}\,\frac{1}{(n_1-2)!}$

	Au lieu de	Lire
p. 376, formule (60) . . .	$\left\lvert \overline{\int_{\nu_r}^{c_1} \frac{dv'}{d\nu}\, dz} \right.$	$\left\lvert \overline{\int_{\nu_r}^{c_1} \frac{dv'}{d\nu}\, dc} \right.$
ibid. 5^e ligne par en bas (formules comptées)	Or l'intégrale (58)	Or l'intégrale (60)
ibid. 4^e ligne par en bas (avant dernière formule) .	$\frac{d}{d\nu} \left\lvert \overline{\int_{\nu_r}^{c_1} v'\, dz} \right.$	$\frac{d}{d\nu} \left\lvert \overline{\int_{\nu_r}^{c_1} v'\, dc} \right.$
p. 378, formule (62), premier membre	$\pm \frac{\Omega_{n-2}}{2\, C_{n_1-1}} u_O$	$(-1)^{n_1-1}(n_1-1)\, C_{n_1-1}\, \Omega_{n-2} u_O$
même formule, deuxième ligne	$\pm 2 \left\{ \frac{1}{(n_1-2)!}, \right.$ etc.	$+ \left\{ \frac{-1}{(n_1-2)!}, \right.$ etc.

0.5 Math.
C
1.45
#3-4

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT JOURNAL

HERAUSGEGEBEN RÉDIGÉ

VON PAR

G. MITTAG-LEFFLER

N. E. NÖRLUND

45: 3—4

7528

DJURSHOLM
ACTA MATHEMATICA

REDACTION

SVERIGE:

T. Carleman, Stockholm.
I. Fredholm, »
A. Lindstedt, »
J. Malmquist, »
G. Mittag-Leffler »
E. Phragmén, »
A. Wiman, Uppsala.

NORGE:

C. Störmer, Oslo.

DANMARK:

Harald Bohr, Kjöbenhavn.
J. Hjelmslev, »
J. L. W. V. Jensen, »
N. E. Nörlund, »

FINLAND:

Ernst Lindelöf, Helsingfors.
Hj. Mellin, »
Karl F. Sundman, »

WEIERSTRASS-WOCHE IN MÜNSTER

veranstaltet von der

Westfälischen Mathematischen Gesellschaft an der Wilhelms-Universität Münster i. W. vom 2. bis 6. Juni 1925.

Dienstag, 2. Juni,	abends 8 Uhr: Zwangsloser Begrüssungsabend im Zwei-Löwen-Klub (hinter dem Rathaus).
Mittwoch, 3. Juni,	vormittags 10 $^1/_2$ Uhr: Feierliche Eröffnung der Tagung in der Aula der Universität.
	Festrede von Prof. Dr. G. Mittag-Leffler (Stockholm): Erinnerungen an Weierstrass.
	mittags 2 Uhr: Gemeinsames Mittagessen im Casino (Neuplatz).
	nachmittags 5 Uhr: L. Bieberbach (Berlin): Weierstrass' Briefwechsel mit H. A. Schwarz.
	N. N. Zur Variationsrechnung.
Donnerstag, 4. Juni,	vormittags 10 Uhr: Vorträge über Grundlagen der Mathematik.
	D. Hilbert (Göttingen): Über das Unendliche und die Begründung der Mathematik.
	G. Mittag-Leffler (Stockholm): Was ist Zahl, Unendlichkeit, Kontinuität?
	O. Perron (München): Die vollständige Induktion im Kontinuum.
Freitag, 5. Juni,	vormittags 10 Uhr: Vorträge über Funktionentheorie.
	P. Koebe (Jena): Methoden der konformen Abbildung und Uniformisierung.
	O. Perron (München): Über eine besondere Klasse polynomischer Entwicklungen.
	K. Knopp (Königsberg): Das Eulersche Summierungsverfahren.
Samstag, 6. Juni,	vormittags 10 Uhr: H. Weyl (Zürich): Über Darstellung kontinuierlicher Gruppen durch lineare Transformationen.

[1] Auskunft durch das mathematische Seminar der Universität Münster i. W.

[2] Teilnehmerkarten bis 15. Mai durch Herrn Dr. E. Kamke, Münster i. W., Gröningerstr. 14, gegen Einsendung von 3 Mark.

Uppsala 1925. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B. 2454

MATHEMATISCHE BIBLIOTHEK

"Geheimrat Gutzmer, Halle a/S,

en bloc zu verkaufen:

über	1,000	Bände math. Werke
über	700	„ „ Zeitschriften
etwa	550	Separatabzüge,
etwa	160	Dissertationen.

Interessenten steht ausführl. Katalog zur Verfügung. Anfragen an Frau Geheimrat Gutzmer, Halle a/S. Wettinerstr. 17".

Inhaltsverzeichnis. Table des matières.

Uppsala 1925. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.
251889

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5AC C001
ACTA MATHEMATICA STOCKHOLM
44-45 1922-25
3 0112 016741925

FROM:
CENTRAL SERIALS SERVICE
NORTH SUBURBAN LIBRARY SYSTEM
6140 LINCOLN AVENUE
MORTON GROVE, ILLINOIS 60053

TO:
I. U. URBANA

LIBRARY RATE

RETURN POSTAGE GUARANTEED—ADDRESS CORRECTION REQUESTED
MAY BE OPENED FOR POSTAL INSPECTION IF NECESSARY
PARCEL POST ______ EXPRESS COLLECT ______
PREINSURED ______ EXPRESS PREPAID ______
$ ______ VALUE
DEMCO